

文章编号: 1000-8055(2005)06-01018-010

跨音压气机/风扇旋转失速 稳定性模型

于巍巍, 孙晓峰

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘要: 以一个三维可压缩旋转失速稳定性模型为出发点, 通过引入带有激波的半激盘模型建立了针对跨音压气机/风扇的稳定性模型, 并通过与一些实验结果的对比验证了模型的有效性。另外, 环绕积分求复函数根方法尽管早已存在, 但是却不被广泛使用, 该方法实际上比 Newton-Raphson 方法具有更稳定和高效的特点, 该方法在跨音模型上的成功应用证明了该方法值得推广。

关键词: 航空、航天推进系统; 旋转失速; 激波; 稳定性模型; 环绕积分法

中图分类号: V 211

文献标识码: A

Rotating Stall Stability Theory of the Transonic Axial Compressors/Fans

YU Wei-wei, SUN Xiao-feng

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: One semiractuator stability model for rotating stall considering in-passage shock wave was developed based on a three-dimensional compressible theory, and it was evaluated to be effective by comparing the results with experiments. Winding number integral method has been developed to solve the roots of complex functions for a long time, although it is not widely used, in some way, it is more stable than Newton-Raphson iteration method. The author used this approach to solve the eigen equation of the transonic stability model, and it is strongly recommended to extend its use in other fields because of its advantages over other methods.

Key words: aerospace propulsion system; rotating stall; shock wave; stability model; winding number integral method

众多设计人员面临的一个困难是, 采用定常计算设计出来的压气机很难保证失速裕度, 尤其是高负荷跨音转子, 即使有较多经验的设计者也无法保证用定常 CFD 计算的结果能最终满足失速裕度的要求。因此, 非定常的数值计算^[1,2]被引

入用来计算旋转失速等不稳定现象, 并且能够给出直观的结果。但是就目前来看, 非定常数值计算还只能应用于二维或者准三维亚音流动, 它所面临的困难在于, 非定常方法研究旋转失速是一个初边值问题, 这涉及到初始扰动在何时何处代入

收稿日期: 2005-06-26; 修订日期: 2005-09-05

基金项目: 国家自然科学基金资助(50136010)

作者简介: 于巍巍(1978-), 男, 江苏盱眙人, 北京航空航天大学能源与动力工程学院博士生, 主要从事压气机稳定性理论的研究

计算, 非定常边界条件如何给等难题, 这些都非常依赖研究人员的经验。并且非定常计算要得到一个或多个周期的解所要消耗的时间是巨大的, 即使最近的非定常 CFD 对压气机的稳定性的模拟研究工作也需要对转子和静子的叶片数做出限制性假设^[2]。这样看来, 就工程应用的目的来说, 目前通过初边值问题研究压气机稳定性还有很长的路要走。

求解稳定性的另一类方法是将描述系统稳定的方程作为特征值问题而不是初边值问题处理, 即通过求解旋转失速特征频率来研究系统的稳定性。比如一维的 Greitzer-Moore 模型^[3], 也有 Bonnaure 等在此后发展的线性稳定性模型等^[4]。这些模型对于亚音流动, 它们都能给出较好的预测结果。然而, 遗憾的是, 对于跨音流动以及三维径向扰动波的影响, 这些模型都无法计算。稳定性模型计算的另外一个困难是求解特征值的手段, 传统的方法是使用单点迭代的 Newton 方法, 这种方法的优点是收敛快, 但是缺点是非常依赖起始点的给定。因此, 如何建立跨音压气机的稳定性模型以及相关的特征值求解一直是研究人员希望解决的问题。

本文首先在一个三维可压缩稳定性模型^[5]的基础上建立一个带有通道激波的半激盘模型。一般的旋转失速稳定性模型采用激盘或者半激盘方法来模拟叶栅的作用力, 对于亚音速转子来说, 这样的假定是可行的。而跨音转子叶栅通道中存在强烈的通道激波。针对这一问题, 如果用纯粹的激盘法来处理, 也可以做出一定的稳定性预测, 缺点是模型完全忽略了跨音流动以及叶栅通道流动对稳定性的影响; 如果用通常的半激盘方法, 由于激波的存在, 无法给出叶栅通道内的一个统一的流速, 从而造成半激盘方法的失效。事实上, 过去在研究叶轮机气动弹性问题上, 应用激盘模型往往也不能对跨音速问题做出较好的预测, 而带有激波的半激盘模型这取得了较好的效果^[6]。文献^[6]的半激盘模型中在转子通道内置入一道正激波, 引入 R-H 关系, 将通道分为超音和亚音部分, 变成带有激波的半激盘模型。本文借鉴了该方法的思想, 但在匹配关系上则强调了对旋转失速的发

生机制的刻画。数值结果表明, 由此建立的跨音压气机稳定性模型与目前所能得到的跨音压气机实验结果定性相符。

其次, 我们引入环绕积分方法克服在特征值计算上的困难。在最近所发展的许多应用科学计算问题的应用中^[7,8], 该方法被证明是求解特征值问题的一个有力的工具。

1 稳定性模型

1.1 基本方程

压气机中叶片区域和非叶片区域有各自不同的控制方程和解, 它们的解会通过界面上匹配条件而关联起来。

1.1.1 非叶片区域的控制方程及解

假定压气机或风扇内为可压无粘的流动, 在非叶片区域的主流速度为二维, 扰动速度为三维, 应用质量守恒、动量守恒和能量守恒定律, 可得到关于扰动量的线性欧拉方程组:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\kappa}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (5)$$

式中: U, V 各为轴向和周向的平均流速; u, v, w 为各方向扰动速度; p, ρ 分别代表为压力和密度; 下标“0”代表平均量; κ 为空气的比热比。

求解偏微分方程组的一个标准方法就是用分离变量法和级数展开的形式来消除方程组中对独立变量的导数。以下是本文应用级数展开后得到的各扰动量的解:

$$p^j(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\bar{p}_{mn}^+ \alpha_{mn}^+ e^{i\alpha_{mn}^+ (x-x^j)} \psi^j(z) + \bar{p}_{mn}^- \alpha_{mn}^- e^{i\alpha_{mn}^- (x-x^j)} \psi_m^j(z) \right] \times e^{i(\beta_m y + \omega t)} \quad (6)$$

$$u^j(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\overline{p}_{mn}^+ \alpha_{mn}^+ e^{i\alpha_{mn}^+ j(x-x^j)}}{\omega + \alpha_{mn}^+ U^j + \beta_n V^j} \psi_{mn}^j(z) + \frac{\overline{p}_{mn}^- \alpha_{mn}^- e^{i\alpha_{mn}^- j(x-x^j)}}{\omega + \alpha_{mn}^- U^j + \beta_n V^j} \psi_{mn}^j(z) \right) + \right. \\ \left. \overline{u}_{vmn}^+ \psi_{vmn}^j(z) e^{-i[(\omega + v^j \beta_n)/U^j](x-x^j)} \right] e^{i(\beta_n y + \omega t)} \quad (7)$$

$$v^j(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\overline{p}_{mn}^+ \alpha_{mn}^+ e^{i\alpha_{mn}^+ j(x-x^j)}}{\omega + \alpha_{mn}^+ U^j + \beta_n V^j} \psi_{mn}^j(z) + \frac{\overline{p}_{mn}^- \alpha_{mn}^- e^{i\alpha_{mn}^- j(x-x^j)}}{\omega + \alpha_{mn}^- U^j + \beta_n V^j} \psi_{mn}^j(z) \right) + \right. \\ \left. \overline{v}_{vmn}^+ \psi_{vmn}^j(z) e^{-i[(\omega + v^j \beta_n)/U^j](x-x^j)} \right] e^{i(\beta_n y + \omega t)} \quad (8)$$

$$w^j(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{i \overline{p}_{mn}^+ \alpha_{mn}^+ e^{i\alpha_{mn}^+ j(x-x^j)}}{\omega + \alpha_{mn}^+ U^j + \beta_n V^j} \varphi_{mn}^j(z) + \frac{i \overline{p}_{mn}^- \alpha_{mn}^- e^{i\alpha_{mn}^- j(x-x^j)}}{\omega + \alpha_{mn}^- U^j + \beta_n V^j} \psi_{mn}^j(z) \right) + \right. \\ \left. \overline{w}_{vmn}^+ \varphi_{vmn}^j(z) e^{-i[(\omega + v^j \beta_n)/U^j](x-x^j)} \right] e^{i(\beta_n y + \omega t)} \quad (9)$$

各解中的 ω 为待求的扰动频率, 这个 ω 是复数实部对应实际的扰动频率, 而虚部则对应了扰动的阻尼; m, n 分别对应扰动在周向和径向的模式数。因为在周向要应用周期性边界条件, 本文采用了傅立叶级数 $e^{i\beta_n y}$ 的形式, 周向波数 $\beta_n = m/r_m$, r_m 是叶栅通道的平均半径; 而在径向要考虑在硬壁面下的无穿透, 无滑移以及零振动条件, 本文应用了正余弦函数级数的形式, 分别用 φ 和 ψ 来表征径向特征函数:

$$\varphi_{mn}^{\pm j}(z) = \varphi_{vmn}^{\pm j}(z) = \sin(k_{mn}^{\pm j} z)$$

$$\psi_{mn}^{\pm j}(z) = \psi_{vmn}^{\pm j}(z) = \cos(k_{mn}^{\pm j} z)$$

径向波数:

$$k_{mn} = \frac{(n-1)}{h} \pi \quad (n = 1, 2, K)$$

在轴向存在分别向上游和下游传播的扰动, 波数 $\alpha_{mn}^{\pm j}$ 分别为:

$$\alpha_{mn}^{\pm j} = \frac{M \alpha_x k_y \pm K_{mn}^j}{1 - M \alpha_x^2}$$

式中, $M \alpha_x$ 为马赫数轴向分量, k_y 及 K_{mn}^j 分别为:

$$k_y = M \alpha_y \beta_n + \frac{\omega}{a_0}$$

$$K_{mn}^j = \sqrt{k_y^2 - (1 - M \alpha_x^2)(\beta_n^2 + (k_{mn}^j)^2)}$$

式中: $M \alpha_y$ 为马赫数周向分量。

对于轴向速度扰动中第三项的 $\overline{u}_{vmn}^j$, 可以应用质量守恒条件, 将涡波系数 $\overline{u}_{vmn}^j$, $\overline{v}_{vmn}^j$ 和 $\overline{w}_{vmn}^j$ 相关, 其关系式为:

$$\overline{u}_{vmn}^j = \frac{\beta_n U^j}{\omega + \beta_n V^j} \overline{v}_{vmn}^j - \frac{i k_{vmn}^j U^j}{\omega + \beta_n V^j} \overline{w}_{vmn}^j \quad (10)$$

那么, 对于每一个模式波 (m, n) 都存在 5 个决定扰动量大小的系数, 其中 $\overline{p}_{mn}^+$, $\overline{p}_{mn}^-$ 对应的是压力波的模式系数, $\overline{v}_{mn}^+$ 和 $\overline{w}_{mn}^+$ 是涡波的系数, $\overline{p}_{mn}^j$ 为熵波的系数。

1.1.2 叶片区域的控制方程及解

对于一般的半激盘模型来说, 比如无跨音流动的转子和静子, 原本有弯角的叶栅被平板叶栅代替, 叶栅通道内的速度和压力等参数相同。若研究的对象是超跨音转子, 那么转子进口相对速度超音, 出口亚音。此时模型依然使用半激盘模型描述跨音转子的流动, 但是用正激波将叶栅通道分为两段, 如图 1 所示, 激波前为超音速来流, 并满足唯一攻角条件, 而激波前后的流动参数通过 R-H 关系关联起来。由于激波前后只是流动平均参数发生变化, 而扰动量的控制方程是没有变化的,

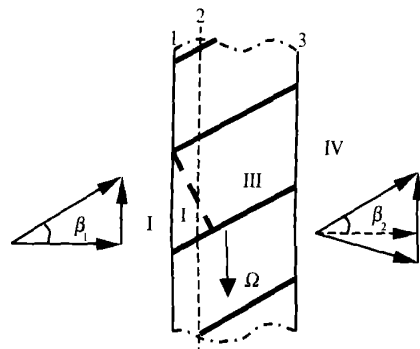


图1 带有激波的叶栅示意图

Fig 1 Sketch of a blade row with in-passage shock wave

因此, 这里给出一个统一的控制方程组, 这个方程组同样适用于无激波半激盘模型。

假定弦向速度为 w_c , 无径向流动, 而扰动则存在于弦向和径向两个方向, 分别是 q 和 w 。扰动量的控制方程和非叶片区域类似, 下式中 ξ 表示叶栅弦向:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w_c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho_0 \left(\frac{\partial q}{\partial \xi} + w_c \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + w_c \frac{\partial q}{\partial \xi} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w_c \frac{\partial w}{\partial \xi} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w_c \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) - \frac{k}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + w_c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (14)$$

由于扰动的方向是沿着叶栅通道方向和径向的, 但是在叶栅前后缘处扰动的相位必须和非叶片区域的扰动的相位匹配起来, 为了统一, 叶栅中的扰动可以用 $e^{i(\alpha + \alpha_{mn}x + \beta_m y)}$ 来表示, ξ 和 (x', y') 的关系是:

$$x' = \xi \cos \theta, \quad y' = \xi \sin \theta$$

对于动叶栅来说, 随叶栅运动的坐标系 (x', y', t) 和固定坐标系 (x, y, t) 之间的关系是:

$$x = x', \quad y = y' - \Omega r_m t \quad (15)$$

叶栅中的扰动变成 $e^{i[(\alpha - \Omega r_m)t + \alpha_{mn}x + \beta_m y]}$ 的形式, 对于静叶栅而言, $\Omega = 0$ 。叶栅中解的形式和非叶片区域的解的形式相近, 这里不再细述。对于静叶栅而言, 每一个模态 (m, n) 也存在决定扰动大小的4个系数, $(\bar{p}_{an}^k, \bar{p}_{an}^k, \bar{w}_{cvmn}^k, \bar{p}_{cvmn}^k)$; 而对于有激波的动叶栅通道, 每一个模态也存在决定扰动大小的4个系数, 前后共8个系数, $(\bar{p}_{ban}^k, \bar{p}_{ban}^k, \bar{w}_{ban}^k, \bar{p}_{ban}^k)$ 和 $(\bar{p}_{aan}^k, \bar{p}_{aan}^k, \bar{w}_{acvmn}^k, \bar{p}_{aan}^k)$, 式中上角标“ k ”对应于第 k 排叶栅, 下角标“ c ”也用来和非叶片区域相区别, 而下角标“ b ”和“ a ”分别表示激波前和激波后。

$$p_i^k = \left(S_1^k - \frac{K(Ma^k)^2}{2} S_2^k \right) p^k + \frac{(W^k)^2}{2} S_2^k \rho^k + \rho_0^k S_2^k U^k u^k + \rho_0^k S_2^k V^k v^k \quad (22)$$

式中, Ma^k 为相对马赫数, S_1^k 和 S_2^k 分别为:

$$S_1^k = \left[1 + \frac{K-1}{2} (Ma^k)^2 \right]^{\kappa/(\kappa-1)}, \quad S_2^k = \left[1 + \frac{K-1}{2} (Ma^k)^2 \right]^{1/(\kappa-1)}$$

也可以类似写出叶栅内的总压扰动:

$$p_i^k = \left(S_1^k - \frac{K(Ma^k)^2}{2} S_2^k \right) p^k + \frac{(W^k)^2}{2} S_2^k \rho^k + \rho_0^k S_2^k w_c^k q^k \quad (23)$$

式中, Ma^k 为通道内弦向相对马赫数, S_1^k 和 S_2^k 分别为:

1.2 匹配条件

前面两小节得到了在叶片区域和非叶片区域的扰动的解, 对于压缩系统来说, 这些扰动是相关的, 必须通过一些匹配条件将它们关联起来, 以反映各守恒定律和压气机的性能、损失等特性, 而匹配的位置自然是叶栅前后缘, 对于有激波存在的超音转子, 则需要在正激波位置匹配前后的扰动。

1.2.1 叶栅前缘

无激波模型假定损失和扭转都发生在前缘, 并且叶栅通道内的主流方向和出口流动方向一致的, 因此在叶栅前缘模型有4个匹配条件, 依次是流量连续, 相对总温守恒, 相对总压损失以及径向扰动守恒条件, 这里的损失条件相对来说包含了扭转的关系。

$$\rho^j U^j + \rho_0^j u^j = \rho^k W_c^k + \rho_0^k q^k \quad (16)$$

$$T^j = T^k \quad (17)$$

$$p_i^j - p_i^k = \xi_{ss}^k \frac{(W^j)^2}{2} \rho^j + \left[\xi_{ss}^k (U^j u^j + V^j v^j) (\xi_{ss}^k) \frac{(W^j)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{U^j} v^j - \frac{V^j}{(U^j)^2} u^j \right) \right] \rho_0^k \quad (18)$$

$$w^j = w^k \quad (19)$$

相比而言, 相对总压损失条件最为复杂, 该条件中使用了相对总压损失系数, 其定义为:

$$\xi_{ss}^k = \frac{p_i^j - p_i^{j+1}}{(W^j)^2/2} \quad (20)$$

式中, 下标“ ss ”表示定常状态, W^j 是叶栅进口相对流动速度, 假定损失系数 ξ_{ss}^k 是进口流动角的函数, 则:

$$(\xi_{ss}^k)' = \frac{\partial \xi_{ss}^k}{\partial \tan \beta^k} \quad (21)$$

式(17)左边进口相对总压的扰动 p_i^j 可以表示为:

$$S_1^k = \left[1 + \frac{K-1}{2} (M a^k)^2 \right]^{\kappa/(\kappa-1)}, \quad S_2^k = \left[1 + \frac{K-1}{2} (M a^k)^2 \right]^{1/(\kappa-1)}$$

扰动解代入总压损失匹配条件, 得到匹配方程如下:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\Psi_{mn}^j(z) \left(C_{10} \bar{p}_{mn}^{j+1} + C_{11} \bar{p}_{mn}^{(j+1)} + C_{12} \bar{p}_{vmn}^{(j+1)} + C_{13} \bar{v}_{vmn}^{(j+1)} + C_{14} \bar{w}_{vmn}^{(j+1)} \right) + \right. \\ \left. \Psi_{mn}^k(z) \left(C_6 \bar{p}_{mn}^k + C_7 \bar{p}_{mn}^k + C_8 \bar{p}_{vmn}^k + C_9 \bar{v}_{vmn}^k \right) + \Psi_{mn}^{j+1}(z) \cdot \right. \\ \left. \left(C_{10} \bar{p}_{mn}^{(j+1)} + C_{11} \bar{p}_{mn}^{(j+1)} + C_{12} \bar{p}_{vmn}^{(j+1)} + C_{13} \bar{v}_{vmn}^{(j+1)} + C_{14} \bar{w}_{vmn}^{(j+1)} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

上式中共有 $14 \times N$ 个未知数, C_L ($L = 1, 2, K, 14$) 是由匹配条件决定的系数, 其余匹配方程也都会得到一个与上式类似的方程。由于用级数的形式来表示扰动解, 每个解都会包含有无穷的周向和径向模态, 而对于旋转失速稳定性影响最大的是低阶的模态波, 因此模型中只考虑低阶的周向和径向模态。应用模态匹配的方法, 即考虑压气机的轴对称和周向的周期性, 各扰动解中的周向模态可以自然的分开, 因此各匹配方程对于每个单独的周向模态也是适用的。

考虑激波的半激盘模型假定在转子前缘处流动满足唯一功角条件, 来流经过前缘等熵扭转至叶栅弦向, 因此前缘的匹配条件中的相对总压损失条件将变为相对总压相等条件, 其余条件不变。

$$p_t^j = p_{tb}^k \quad (25)$$

上式中叶栅的总压扰动下标“b”表示对应激波前的相对总压扰动量。将扰动解带入公式(25)后将得到与(24)类似的方程, 但是由于叶栅通道的拆分将使通道内的未知数个数增加, 相应于一个周向模态的未知数个数将增为 $18 \times N$ 。

$$(\rho_a^k W_{ac}^k + \rho_{0a}^k q_a^k) \cos \theta = \rho^{j+1} U^{j+1} + \rho_0^{j+1} u^{j+1} \quad (31)$$

$$T_{ta}^k = T_t^{j+1} \quad (32)$$

$$p_{ta}^k - p_t^{j+1} = \xi \frac{(W^j)^2}{2} \rho^j + \xi \rho_0^j (U^j u^j + V^j v^j) + \xi p_0^j \frac{(W^j)^2}{2 U^j} (v^j - \tan \beta^j u^j) \quad (33)$$

$$\frac{v^{j+1}}{U^{j+1}} - \tan \beta_2 \frac{u^{j+1}}{U^{j+1}} = \frac{\partial G}{\partial \tan \beta_1} \left[\frac{v^j}{U^j} - \tan \beta_1 \frac{u^j}{U^j} \right] \quad (34)$$

$$w_a^k = w^{j+1} \quad (35)$$

1.2.3 正激波匹配条件

有激波时要考虑激波处的匹配条件, 本模型没有直接应用正激波的 R-H 关系式, 而是从推导 R-H 关系式的基本方程出发来推导扰动量应满足的关系。通过激波的平均量和扰动量均要满足流量连续, 动量守恒, 相对总温守恒和径向扰动连续4个条件, 经过线性化后的关系式如下:

$$\rho_a^k W_{bc}^k + \rho_{0b}^k q_b^k = \rho_a^k W_{ac}^k + \rho_{0a}^k q_a^k \quad (36)$$

1.2.2 叶栅尾缘匹配条件

无激波模型中叶栅尾缘的匹配条件相对比较简单, 因为模型假定亚音叶栅的损失和扭转发生在叶栅前缘, 尾缘处没有损失和扭转。这里的5个匹配条件依次分别是压力、密度和径向扰动速度连续, 以及轴向和周向扰动速度匹配条件。

$$p^k = p^{j+1} \quad (26)$$

$$\rho^k = \rho^{j+1} \quad (27)$$

$$w^k = w^{j+1} \quad (28)$$

$$q^k \cos \theta = u^{j+1} \quad (29)$$

$$q^k \sin \theta = v^{j+1} \quad (30)$$

但是有激波的模型中叶栅尾缘匹配条件有所不同, 因为激波后的叶栅通道中流阻损失以及激波和附面层干扰损失在总损失中同样占了较大的比重, 因此本模型假定激波后的损失以及扭转发生在叶栅的尾缘处, 因此匹配条件也相应的发生变化, 变为流量连续, 相对总温守恒, 相对总压损失, 出口扭转以及径向扰动守恒条件。

$$p_b^k + \rho_b^k W_{bc}^2 + 2 \rho_{0b}^k q_b^k =$$

$$p_a^k + \rho_a^k W_{ac}^2 + 2 \rho_{0a}^k q_a^k \quad (37)$$

$$T_{ab}^k = T_{ta}^k \quad (38)$$

$$w_b^k = w_a^k \quad (39)$$

1.3 封闭方程的形式

如图2所示考察跨音压气机的稳定性, 转子静子前后缘及正激波处共有5个匹配界面, 共22个匹

配方程。但是周向模态 m 对应的未知数个数却有 $27 \times N$ 个, 因此扰动量的方程组并不封闭,

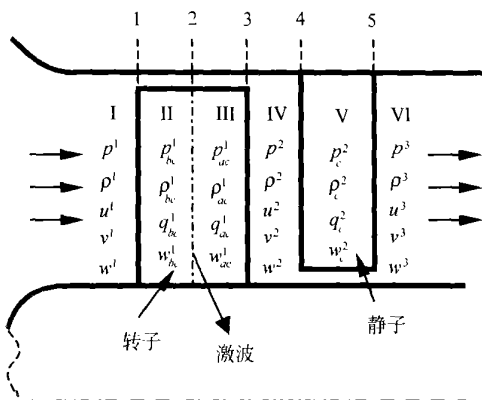


图2 跨音压气机及稳定性模型中扰动量分布示意图

Fig 2 The draft of a single-stage transonic compressor and the distribution of arguments of the disturbance wave

还需要在压气机进出口给出适当的边界条件。本文使用无反射边界条件, 即压气机进出口只有从压气机向外传播的扰动, 从而得到:

$$\overline{p}_{mn}^{+1} = \overline{\rho}_{mn}^{+1} = \overline{v}_{mn}^{+1} = \overline{w}_{mn}^{+1} = 0 \quad (40)$$

$$\overline{p}_{mn}^{-3} = 0 \quad (41)$$

使未知数的个数降为 $22 \times N$ 个; 进一步, 考虑到各扰动解中径向的特征函数 $Q(z)$ 和 $\psi(z)$ 分别为正余弦函数, 利用三角函数的正交性, 可以将不同的径向模态分开; 因此, 模型最后可以得到一个关于单个模态 (m, n) 的齐次方程组:

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,22} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ C_{22,1} & \cdots & C_{22,22} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} \overline{p}_{mn}^{-1} \\ \overline{p}_{mn}^{+1} \\ \overline{v}_{mn}^{+3} \\ \overline{w}_{mn}^{+3} \end{bmatrix} = 0 \quad (42)$$

这是一个齐次的方程组, 若要方程组有解, 则方程组系数矩阵 C 的行列式必须为零, 而系数矩阵的行列式是扰动频率 ω 的函数:

$$\det [C(\omega)] = 0 \quad (43)$$

解以上方程可以得到满足条件的复频率 ω 决定系统旋转失速稳定性的就是该频率的虚部 ω , 因为扰动解中都含有 $e^{i(\omega_k + i\omega)t}$, 若 $\omega < 0$, 则扰动将随时间发展被放大, 反之则系统稳定。

以上给出的是针对一级跨音压气机的模型, 事实上, 只要合理考虑匹配条件, 本模型可以处理亚音问题, 或者单转子、多排叶栅的问题。

2 环绕积分方法

解特征方程 (43) 的常用方法是 Newton 法或者 Müller 法等迭代求解方法, 但是这些方法的一个主要缺点是依赖给出的初值的质量; 其次, 收敛的方向无法控制, 解的物理意义也会被混淆。因为满足行列式为零的解可能不至一个, 如文献 [9] 给出的二维不可压模型的解析解中就有一个物理解和一个非物理解。因此, 用数值方法求解这类问题, 一个常见的困难就是如何保证解的准确和物理意义。本文使用了环绕积分方法求解该问题, 该方法一个最大的优点在于能够在符合物理意义的区域内搜寻解, 并且保证解的精度。

2.1 环绕积分定义

考察单值解析函数 $f(z)$ 的环绕积分的值:

$$S_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^n \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (44)$$

$n=0$ 时对应的积分 S_0 称为 $f(z)$ 的对数残数, 由它推出的幅角原理可以计算区域 C 内解析函数的零点与极点的个数之差:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z)] = N_{\text{zeros}} - N_{\text{poles}} \quad (45)$$

而 $n=1$ 时对应的值 S_1 , 可以用来帮助判断函数的零点, 假定 $f(z)$ 在积分回路 C 中有一个一级零点 $z_0 = S_1$, 没有极点, 那么可以证明, 该零点。对于高阶零点和多个零点的问题, 同样可以通过高阶环绕积分值的求解得到。尽管理论上该方法可以同时求出一个区域内的 3 个或以上零点, 但是从精度和效率出发, 在一个区域内求解一个根的可行性最好。

2.2 数值解法

实现该方法时, 首先需要了解零极点的分布, 对于一般的问题来说, 如果能够将待求函数化简成分子和分母相除的形式, 可以先求分母的零点, 然后再求分子的零点, 即函数的零点, 这样就可以通过 S_0 直接判断零点个数。本文在应用该方法时, 总是在给定求解域时避开极点。下面是本文通过区域分裂方法来求解根的步骤:

(1) 初始化一个搜索域的堆栈, 并给出初始的搜索域, 即矩形 R_1 , 设定指针为 1。

(2) 通过计算 S_0 判断域的堆栈中当前域的零点个数 (已知该域内极点个数条件下)。如果该域无零点, 将该域从堆栈中推出, 跳转到第 5 步; 如果

零点个数为1, 并且极点个数为零, 到第3步; 否则到第4步。

(3) 指针当前所指域内零点个数为1, 无极点, 求 s_1 得到零点。如果精度满足, 保存解, 并将该域从堆栈中推出, 回到第2步; 如果精度不满足, 转到第4步。

(4) 当前域内不止一个零点, 或者域的范围过大导致解不精确, 抑或域内有极点, 因此将当前域一分为二, 并分别放入域的堆栈中, 回到第2步。

(5) 由域的指针判断是否所有域已经计算完毕, 是则退出计算, 否则回到第2步。

本文通过一些问题对该方法做过验算, 尤其是针对在声学计算中复杂的特征值问题, 结果表明, 由于避开了令人困扰的初值问题, 该方法可以非常有效的求解很多情况下难以计算的复函数的根。

3 模型验证计算

模型需要的输入数据是流场流动和几何参数, 如半径、弦长、压力、速度、总压损失系数和其对进口扭转角的导数等等, 下面三个算例中压气机特性的数据皆来自实验^[10~12]。第一个例子是某低速压气机的失速起始点预测; 第二个例子是模型在高亚音条件下的应用, 第一和第二个算例中都是用不考虑激波的半激盘模型; 而第三个例子则是本文发展的考虑通道激波的旋转失速模型在超跨音压气机上的应用。

3.1 在低速压气机中的验证计算

第一个算例使用的数据来自于一个低速压气机的实验^[10], 该压气机级流道面积恒定, 内径 0.593 m, 外径 0.745 m, 动叶安装角 40° , 静叶安装角 28.2° , 转子弦长 3.7 cm, 静子弦长 3.3 cm。该实验中压气机进口的流动速度恒定在 18.3 m/s , 转速从 500 r/min 开始, 随着转速的增加, 压气机出口压升增加, 损失也随之增大, 最后压气机在 1030 r/min 附近失速; 为了对比单转子的特性, 该实验也做了无静叶栅条件下的单转子的特性实验, 结果表明, 在没有静叶栅的条件下, 动叶栅的失速转速会相应的提前, 大约在 1000 r/min 附近。

模型预测结果在图3中, 图中横坐标对应转子转速, 纵坐标给出的是扰动波的衰减因子 $r_m \omega / m U_0$, 表征压气机的相对稳定性。图中给出了两条曲线, 下面的一条曲线是对单转子的特性做的失

速稳定性预测, 上面的曲线是对转子-静子全级的稳定性预测。图中的箭头指明了实验中测得的旋转失速起始点位置, 无论是单转子的还是全级的理论预测都与实验点非常好的吻合。并可以看出, 对该转子而言, 静叶栅的存在起到了增强稳定性的作用。另外, 通过计算和分析可以得知对低速压气机稳定性影响最大的因素是相对总压损失对进口角正切的导数 ζ_{ss}^k 。数值实验表明, 衰减因子对于该系数是最敏感的。在接近失速的时候, 该导数会增大很多。

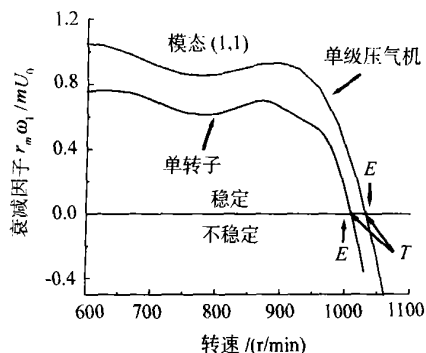


图3 某低速压气机的稳定性预测结果

Fig 3 Damping factor of disturbance wave of a low speed axial-flow compressor
Mode number (1, 1)

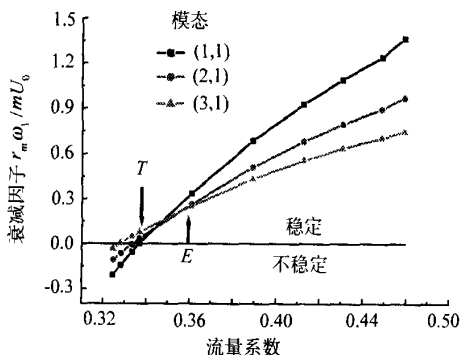


图4 NASA 37号压气机70%转速下的稳定性预测结果

Fig 4 Stability prediction of Stage 37 of NASA, 70% design speed

3.2 在高亚音速压气机中的验证计算

NASA 的37号压气机^[11]在70%转速下时, 转速在 12000 r/min , 动叶栅内相对马赫数范围在 $0.8 \sim 1.0$ 之间, 因此, 仍然可以使用无激波的半激盘模型来预测旋转失速起始。图4给出了周向模态

1~3的扰动频率虚部随流量系数的变化, 可以看出一阶模态下衰减因子最先达到中性稳定点, 这个结果与大部分的实验观察是相符的, 图中箭头 E (Experiment) 所指位置为实验中测量得到的失速点, 而本文预测的压气机失速流量点在箭头 T (Theory) 所指位置, 这与实验有一些偏差, 但是相对误差实际上是比较小的。因此, 通过本算例可以看出, 本文的三维可压缩模型在高亚音条件下同样具有较好的预测旋转失速起始点的能力。

3.3 正激波半激盘模型算例

本文重点是解决在跨音流动条件下的稳定性预测问题, 而前两个算例只是证明了本文三维模型在低速和高亚音速条件下和一般的二维模型具有同样的能力。但是, 如果应用这种不考虑通道激波的三维模型于跨音压气机时, 如100% 转速下的 NA SA 37号压气机^[11], 会发现无法得到如前两个

激盘模型的原因。

无通道激波的半激盘模型的一个特点是扭转关系被隐含于叶栅前缘损失关系中, 而损失系数及其对进口流动角的导数可以方便的得到。对跨音转子, 本文按照一般跨音叶栅设计时所使用的方 法, 假定流动要满足唯一攻角条件, 让来流等熵扭转至叶栅弦向(取平均截面处弦向角), 通过普朗特- 麦耶膨胀公式计算激波前马赫数, 然后通过 R-H 关系式得到波后通道内马赫数, 总压等, 最后得到激波后的叶型损失(包括激波附面层干扰损失); 而扭转关系可通过叶栅进出口的相对流动角而拟合出它们的关系式。

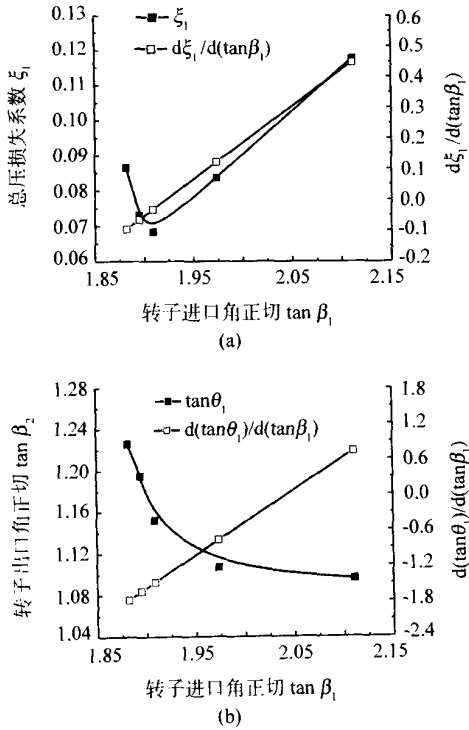


图5 37号压气机100% 转速下跨音转子特性:
(a) 相对总压损失系数与进口相对流动角关系;
(b) 进出口相对流动角关系

Fig 5 Characters of transonic rotor of compressor Stage 37

(a) Relative total pressure loss with inlet relative swirl;

(b) Outlet relative swirl with inlet relative swirl

算例所示的结果, 这也是本文发展带有激波的半

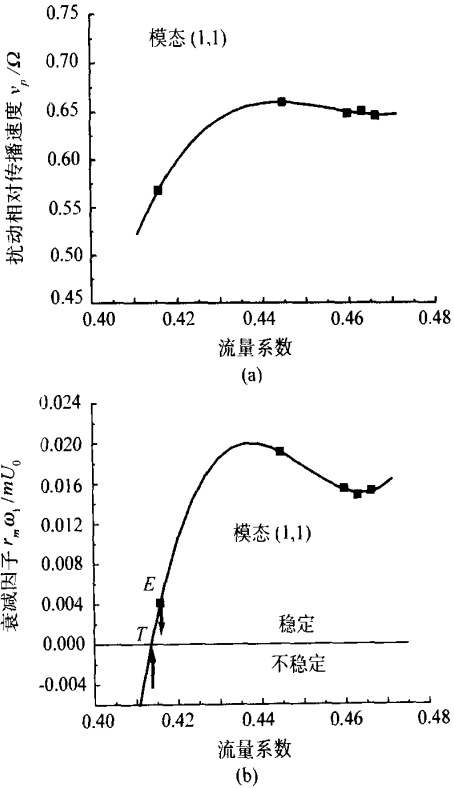


图6 NA SA 37号压气机100% 转速下的稳定性预测结果

(a) 扰动相对传播速度和流量系数关系;
(b) 扰动波衰减因子和流量系数关系

Fig 6 Stability prediction of Stage 37, 100% design speed

(a) Propagation speed of disturbance wave relative to rotor speed;

(b) Damping factor of disturbance wave

由于转子特性在压气机的特性中是主要的, 因此图5(a, b)给出了转子的损失以及扭转特性。从图5(a)中可以看出, 和低速叶型不太一样, 随着

进口攻角的增大, 叶型损失并不单调减小, 但是损失对进口流动角的导数却是和低速叶型一样单调增加的。由于损失的导数, 扭转关系等数据是通过实验结果的拟合得到的, 采用不同的拟合曲线会对模型结果有一点影响, 本文对损失、扭转等关系都采用了2次多项式, 这样不仅保证了拟合曲线的精度, 也保证了光滑, 我们认为这也更符合物理规律。

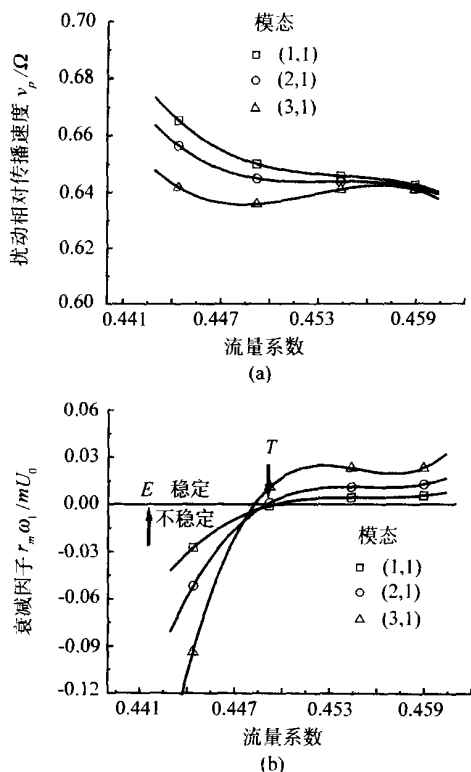


图7 NASA 36号压气机100%转速下的稳定性预测结果

Fig 7 Stability prediction of Stage 36, 100% design speed

(a) Propagation speed of disturbance wave relative to rotor speed;

(b) Damping factor of disturbance wave

图6(a, b)给出了模型对扰动失速先兆波相对转子转速以及衰减因子的预测, 模式为(1, 1), 高阶模式也做了计算, 但是高阶模式和低阶(1, 1)模式的结果差别较小, 因此, 图中没有给出。可以看出扰动频率在60%转子转速附近, 这和一般实验所得到的失速频率范围还是比较吻合的; 另外, 在小流量靠近失速点附近, 不仅传播频率变化比较大, 而且衰减变化也较大, 这在图8中看得也比较明显, 图6(b)给出的衰减因子和流量系数的关系;

在失速点的判断上, 通过图6(b)中的 T 点和 E 点可以看出理论预测与实验的差别, 就这个例子来说, 它们吻合的还是相当好的。

为进一步验证模型, 本文根据NASA 36号压气机的实验数据^[12], 对该跨音压气机也做了稳定性预测, 图7(a, b)分别给出了扰动传播速度以及衰减因子和流量系数的关系。和37号转子不同, 36号转子的各模态下频率略有不同, 因此图7(a, b)给出了3个模态的结果。但是通过图7(b)可以看出, 低阶的(1, 1)模式还是最先失速的模式。对36号压气机理论预测的结果与实验相比有一些出入, 差别相比37号的结果要大一些, 但是实际上从流量相对差别来比较, 两个例子的理论预测和实验结果差别都在2%之内。

另外, 本文通过对损失系数等参数微调所做的数值实验表明, 扰动频率或衰减并不单调的依赖某一个参数, 这和无激波模型中损失的导数起较大影响不同, 由于通道激波的存在, 叶型损失及其导数对扰动频率的影响大为削弱, 尽管在图5中可以看出叶型损失仍然有较大的变化, 但是对整个转子的损失来说, 毕竟叶型损失所占的比例不超过40%。

通过36号和37号压气机这两个算例, 我们已经大致对带有激波的激盘模型有了一定的认识。从物理图画上来看, 有了激波后, 激盘叶栅中扰动波传播的特性完全被改变, 上游的扰动波在激波处不仅被反射, 而且在激波界面处经过强烈的变化传播到下游, 这和一个简单的半激盘模型是完全不同的。从数值结果来看, 带有激波的半激盘模型确实能够抓住旋转失速的一些特征, 如传播速度以及衰减因子的变化规律等, 这是过去一维或一般二维模型无法做到的。

4 结 论

(1) 建立了有激波的半激盘稳定性模型, 模型和一些实验的对照表明, 在跨音流动条件下, 激波的影响不能被简单的激盘法代替, 或被半激盘模型所省略, 在模型中必须有真实反映激波作用的匹配界面来处理跨音转子对扰动波的影响。

(2) 本文在数值求根方法上采用了环绕积分方法, 使得原本复杂的计算特征值问题简单很多, 为压气机旋转失速稳定性模型研究又添了一个有用的工具。

(3) 目前模型只和一些有限的实验数据进行了对照, 若要进一步掌握跨音压气机稳定性机理,

在将来还需要有更多的实验对比, 或者和 CFD 方法相互结合从而促进对跨音稳定性问题的更深入的认识。

参考文献

[1] Gourdain N, Burguburu S, Leboeuf F, et al Numerical Simulation of Rotating Stall in Subsonic Compressor[R]. *IAA Paper* 2004~ 3929

[2] Gourdain N. Numerical Simulation of Rotating Stall in a Subsonic Compressor[R]. *IAA - 2004- 3929*, 2004

[3] Moore F K. A Theory of Rotating Stall of Multistage Axial Compressors: Part I - Small Disturbances[J]. *ASME J. of Eng. for Gas Turbines and Power*, 1983, 106: 313~ 320

[4] Hendricks G J, Bonnaure L P, Longley L P, et al Analysis of Rotating Stall Onset in High-Speed Axial Flow Compressors[R]. *IAA Paper* 93- 2233, 1993

[5] Xiao-Feng Sun. Three-Dimensional Compressible Flow Stability Theory of Rotating Stall[R]. *BUAA Technical Report*, BH - B 4765, May, 1996

[6] Micklow J, Jeffers J. Semi-Actuator Disk Theory for Compressor Choke Flutter[R]. *NASA CR- 3426*, 1982

[7] Brazier-Smith P R, Scott J F. On the Determination of the

Dispersion Equations by Use of Winding Number Integrals [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 141: 503~ 510

[8] Ivansson S, Karasab I. Computation of Modal Numbers Using an Adaptive Winding-Number Integral Method with Error Control[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 161: 173 ~ 180

[9] Nenni J P, Ludwig G R. A Theory to Predict the Inception of Rotating Stall in Axial Flow Compressors[R]. *IAA Paper* No. 74~ 528, 1974

[10] Ludwig Gary R, Nenni Joseph P. Basic Studies of Rotating Stall in Axial Flow Compressors[R]. *FA PL - 79- 2083*, 1979

[11] Royce D Moore, Lonnie Reid. Performance of Single-Stage Axial Flow Transonic Compressor with Rotor and Stator Aspect Ratios of 1. 19 and 1. 26, Respectively, and with Design Pressure Ratio of 2. 05 [R]. *NASA Technical Paper* 1659, 1980

[12] Royce D Moore, Lonnie Reid. Performance of Single-Stage Axial Flow Transonic Compressor with Rotor and Stator Aspect Ratios of 1. 63 and 1. 78, Respectively, and with Design Pressure Ratio of 1. 82 [R]. *NASA Technical Paper* 1974, February 1982