

文章编号: 1000-8055(2006)04-0722-5

# 叶片前缘高精度重建方法研究

张力宁<sup>1, 2</sup>, 张定华<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学 现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 西安 710072;

2. 西北工业大学 理学院应用数学系, 陕西 西安 710072)

**摘 要:** 叶片前后缘的形状对发动机的气动性能有非常重要的影响。对叶片前后缘的精确建模是高质量加工的前提。现有的叶片前缘大多为圆弧或椭圆弧。为了实现精确建模, 本文首先运用一种基于带约束的最小二乘方法对数据点进行拟合, 然后用拟合的结果作为初值, 根据椭圆的极线性质进行更精确地求解。实例表明本文的方法在对椭圆弧的拟合中具有比 Fitzgibbon 方法更好的鲁棒性及更高的精确度。在重建前缘时, 一些事先难以排除的出格点极大地影响了拟合精度, 鉴于本文方法具有较好的鲁棒性, 本文提出了以前缘点为中心, 对于逐次增加数据点多次运用本文的拟合方法, 最终排除出格点的方案。数据实验验证了这一方案的有效性。总之, 本文提出的拟合方法非常适合于在逆向工程中对叶片前缘的重建。

**关 键 词:** 航空、航天推进系统; 椭圆拟合; 叶片前缘; 最小二乘; 逆向工程

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

## High-precision reconstruction of blade leading edge

ZHANG Li ning<sup>1, 2</sup>, ZHANG Ding-hua<sup>1</sup>

(1. Key Lab of Contemporary Design and Integrated Manufacturing Technology,  
Ministry of Education, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Department of Applied Mathematics, School of Science,  
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The shape of leading/trailing edge is very important to the performance of the turbine blade. Precise description is the premise for turbine blade machining. Generally, the leading/trailing edge is a circular arc or elliptic arc. In order to reconstruct them accurately, a method for fitting the ellipse based on the principle of conditional least square was applied at first, and then its fitting result was used as an initial value to find a more precise result according to the polar line geometrical properties of the ellipse. Some examples were given to prove the good robustness and high accuracy of this fitting method, especially for a part of ellipse. During the reconstruction of the blade, some outliers which are difficult to exclude beforehand may influence the accuracy of fitting result greatly. Because of our method's good robustness, this fitting method was applied to the progressively increasing number of data centered at leading edge for several times to exclude outliers. Numerical experiments show the effectiveness of this scheme. In conclusion, the method presented is suitable for the reconstruction of blade in the reverse engineering.

**Key words:** aerospace propulsion system; ellipses fitting; blade leading edge; least square method; reverse engineering

收稿日期: 2005-07-22; 修订日期: 2006-05-18

基金项目: 航空科学基金(00H53076), 国家教委博士点基金(20006992)

作者简介: 张力宁(1974-), 男, 陕西西安人, 博士研究生, 讲师, 主要研究方向为: 计算机辅助几何设计、逆向工程、计算机图形学。

在航空发动机叶片重建的过程中,一般的方法是先建立精确的叶片截面形状,然后沿叶片轴向重建出叶片的三维模型。叶片的截面线可分为叶盆、叶背、前缘和后缘 4 个部分,其中前缘的形状对整个叶片的性能具有决定性的作用。传统的方法是将前后缘设计成圆弧,但是近年来越来越多的实验和数值研究显示,采用非圆弧形前缘,例如椭圆形前缘可以明显改善叶片的气动性能。因此在叶片的重建过程中,需要解决椭圆弧的高精度拟合问题。与图像识别和计算机视觉领域的椭圆提取问题相比,这里的拟合问题主要有以下几点不同: (1) 椭圆拟合处理的是二维离散数据,而椭圆提取处理的是图像数据,前者的精度要求更高; (2) 椭圆拟合研究的是单个椭圆的拟合问题,而椭圆提取经常涉及多个椭圆数据的分离; (3) 由于叶片前后缘只是一段椭圆弧,所以需要重点研究如何从部分椭圆弧数据出发,提高拟合精度,准确地提取椭圆参数。而椭圆提取问题包括对整个椭圆的提取。现有的椭圆拟合主要基于以下几种方法: (1) Fitzgibbon<sup>[1]</sup> 将椭圆拟合问题转化为一个带约束的最优化问题,椭圆的系数是对应的广义特征值问题的解。这种方法保证了拟合的结果一定是椭圆,且具有较高的逼近精度。但这种方法也有一些缺点,如果数据点是椭圆上的精确点时,广义特征值的系数矩阵是奇异或接近奇异的,这时的广义特征值的求解会不稳定,甚至得到错误的解。该方法后来得到改进,不仅将广义特征值问题转化为一般特征值问题,而且降低了特征向量的维数,提高了算法的稳定性。这些方法具有较好的鲁棒性,对整个椭圆拟合的精度较高,但当数据点集中在一小段椭圆弧时拟合精度有所降低。 (2) 杨志根<sup>[2]</sup> 提出了一种利用椭圆的极点-极线性质拟合椭圆的方法,这种方法也能够保证拟合的结果一定是椭圆,但这种方法必须提供每一个数据点在椭圆上的精确切线方向,陈燕新<sup>[3]</sup> 的方法是用相邻数据点的线性插值近似代替切线,但经过数据试验发现,即使当数据点分布比较密集时,这种方法的误差也相当大。即使用有理曲线对数据点进行拟合,用拟合曲线在数据点的切线提取椭圆参数时,误差仍较大,可见这种方法非常依赖于切线方向的准确性。 (3) 其它基于几何距离的加权拟合方法,如雷志杰<sup>[4]</sup> 提出的加权新度量方法,这些方法的缺点是权系数的意义不明显,如何选取合适的权系数也未给出结论。在对上述方法的优缺点进行了深入研究和大量数值

试验后,本文提出了一种椭圆弧拟和方法。与现有方法相比,它鲁棒性较好,尤其在对不完整椭圆弧的拟合时具有更高的精度,非常适于解决叶片重建中的椭圆弧拟合问题。

1 算法描述

1.1 椭圆切向量的计算

设需要拟合的数据点为  $p_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ , 当满足条件  $b^2 - 4ac < 0$  时,二次方程:

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

表示一条椭圆。Fitzgibbon 在拟合时将椭圆约束条件取为  $b^2 - 4ac = -1$ , 设椭圆的系数构成向量  $\mu = [a, b, c, d, e, f]^T, x_i = [x_i^2, x_i y_i, y_i^2, x_i, y_i, 1]^T$ ,

引入矩阵  $C = \begin{bmatrix} C_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , 其中  $C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{0}$  表示  $3 \times 3$  的零矩阵,从而将基

于代数距离的椭圆拟合转化为如下的带约束的最小二乘问题。

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i)^2 = \\ \min_{\mu} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \mu)^2, \text{ s. t } \mu^T C \mu = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

通过引入 Lagrange 乘子  $\lambda$ , 将式(2)的求解化为一个广义特征值问题的求解,具体的求解过程详见文献[1], 本文不再赘述。设向量  $\mu = [a, b, c, d, e, f]^T$  为式(2)的解。则对(1)关于  $x$  求导,可得到椭圆在每一个数据点处的切线斜率为

$$k_i = \frac{2ax_i + by_i + d}{bx_i + 2cy_i + e} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

1.2 椭圆中心的计算

如图 1(a) 所示,  $P, Q$  和  $K$  为椭圆上的三点,这三点的切线分别交于  $A, B, C$  三点,弦  $PQ$  称作  $A$  点对应的极线,  $A$  点称作  $PQ$  对应的极点。极点  $A$ , 极线  $PQ$  的中点  $E$  和椭圆中心  $O$  共线,这是椭圆的极点-极线性质。陈燕新<sup>[3]</sup> 根据此性质,在直线  $AE$  上搜索出椭圆的中心  $O$ 。实际上椭圆上的点可能是含有噪声的, 仅从两三个点出发搜索出的椭圆中心很难保证其准确性。为提高算法的抗噪性,本文的方法是首先将需要拟合的数据点按排列顺序平均分为三段,分段的目的是使采用的数据点尽量分布均匀,避免过分集中。如图 1(b) 所示,在三段中分别随机选取数据点

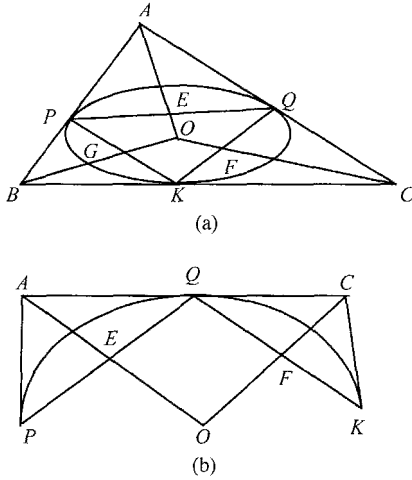


图 1 椭圆的极点-极线性质

Fig. 1 Geometric properties on the pole and polar line of ellipse

$P, Q$  和  $K$ , 利用式(3) 求出这三点的切线, 再求三条切线的两个交点  $A$  和  $C$ , 设  $E$  为  $PQ$  的中点,  $F$  为  $QK$  的中点, 最后求出直线  $AE$  和  $CF$  的交点  $O$ 。多次随机选取不同的三点组合  $P, Q$  和  $K$ , 并计算对应的点  $O$ 。在逆向工程实际中, 随着三维测量技术的不断提高, 数据点的精确度也越来越高, 只要数据点位于同一椭圆弧上, 每次求出的  $O$  点坐标非常接近, 最后将多次求得的交点  $O$  的坐标的算术平均值  $(x_0, y_0)$  作为椭圆的中心。

1.3 椭圆特征参数的计算

如图 2 所示, 椭圆的特征参数主要包括长短半轴  $a, b$ , 椭圆中心  $O$  的坐标  $(x_0, y_0)$ , 长轴和  $x$  轴的夹角  $\theta$ 。平面上任意位置的椭圆由这 5 个参数唯一确定。

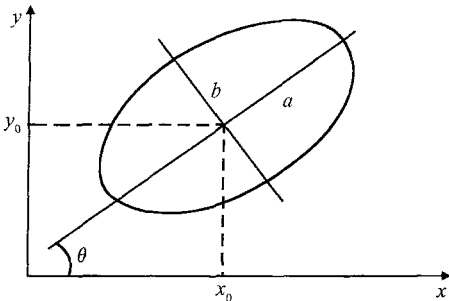


图 2 表示椭圆的 5 个参数

Fig. 2 Five parameters of an ellipse

当椭圆的中心求出以后, 椭圆的方程可以表示为:

$$F(x, y) = u(x - x_0)^2 + 2v(x - x_0)(y - y_0) + w(y - y_0)^2 - 1 = 0 \tag{4}$$

其中  $(x_0, y_0)$  为椭圆的中心,  $u, v$  和  $w$  为待定系数。根据式(4), 提出一种基于几何距离的最小二乘拟合。即:

$$\min_{u,v,w} F(x_i, y_i)^2 = \min_{u,v,w} [u(x_i - x_0)^2 + 2v(x_i - x_0)(y_i - y_0) + w(y_i - y_0)^2 - 1]^2 \tag{5}$$

从式(5)中解出  $u, v$  和  $w$ , 代入式(4) 并将其整理成式(1)的形式:

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{6}$$

刘书桂<sup>[5]</sup> 给出了由式(6) 计算  $a, b, x_0, y_0$  和  $\theta$  的公式, 即:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2BC - AD}{A^2 - 4B} \\ y_0 &= \frac{2D - AC}{A^2 - 4B} \\ a &= \frac{\sqrt{2(ACD - BC^2 - D^2 + 4BE - A^2E)}}{\sqrt{(A^2 - 4B)(B - \sqrt{A^2 + (1 - B)^2 + 1})}} \\ b &= \frac{\sqrt{2(ACD - BC^2 - D^2 + 4BE - A^2E)}}{\sqrt{(A^2 - 4B)(B + \sqrt{A^2 + (1 - B)^2 + 1})}} \\ \theta &= \arctan \frac{a^2 - b^2B}{\sqrt{a^2B - b^2}} \end{aligned}$$

1.4 出格点的排除

在叶片前缘重建的过程中, 难免会把一些不是椭圆弧上的点也拿来拟合, 这些点就是椭圆的

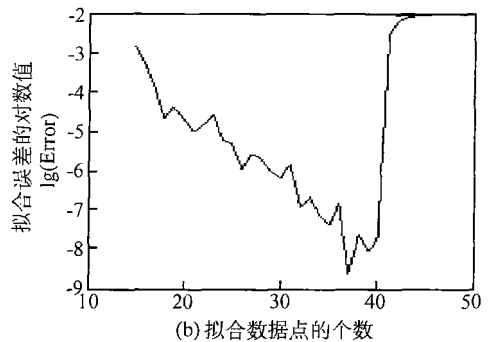
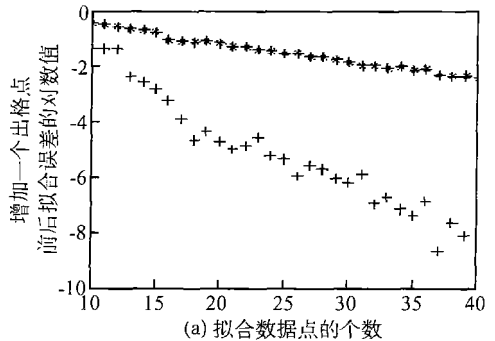


图 3 出格点对拟合误差的影响

Fig. 3 Influence of outliers to fitting error

出格点。出格点的出现对拟合精度有很大的影响。在图 3 中, 横坐标表示不同的拟合点数, 纵坐标表示 5 个特征参数最大相对误差的常用对数值。这个误差比 (2) 式的代数距离受出格点的影响更大, 反应更加灵敏。在图 3 (a) 中“+”点表示椭圆上正常点的拟合误差, “\*”表示增加一个出格点时的拟合误差。其中出格点与最近的正常点之间的距离小于 0.01。从中可以看出无论正常点有多少个, 仅仅增加一个非常近の出格点就大大地增大了拟合误差, 尤其是当正常点个数大于 20 时, 增加一个出格点就使误差至少扩大了 104 倍。为克服这一缺点, 有些学者使用最小截平方 (Least Trimmed Squares) 方法来拟合, 但这种方法的算法比较复杂, 效率较低。实际上叶片前缘是一段连续的椭圆弧, 因此可以利用出格点大大增大拟合误差这一特点找出出格点。具体方法是: 将叶片截面沿坐标轴方向横置。以横坐标最小的点为起点, 分别向前向后逐次增加数据点, 每增加一个数据点进行一次椭圆拟合, 并比较增加数据点前后的 5 个特征参数最大相对误差。总体上看一开始相对误差会随着正常点的增多而减小, 如果增加某一个点前后拟合误差增加许多倍 (可设一阈值, 如 1000), 而且继续增加数据点, 误差没有明显减少的趋势, 说明这个点就是出格点。并以此点作为前缘与叶盆和叶背的分界点。随机噪声产生的误差不具备这种变化特点。图 3 (b) 显示在对实例 1 中的椭圆型前缘的拟合过程中, 随着正常点的增多, 拟合误差的总体趋势是减小的, 中间稍有波动是因为每次拟合时的随机条件

不同, 在一共 40 个正常点取完后, 增加更多的出格点使拟合误差瞬时增大, 并且没有减小趋势。

2 仿真实例

一些学者对椭圆拟合的误差给出了不同的评价标准。在叶片逆向工程中, 拟合的目的是提取出椭圆的参数, 从而为确定叶片的前缘形状。所以, 本文以长短半轴  $a$ 、 $b$ , 椭圆中心  $O$  的坐标  $(x_0, y_0)$ , 长轴和  $x$  轴的夹角  $\theta$  这 5 个参数的相对误差作为评价拟合精度的标准。

2.1 实例 1

构造中心在  $(x_0, y_0) = (345.345, 456.456)$ , 长短半轴分别为  $a=160.34$ ,  $b=45.67$ , 倾角  $\theta=0.25$  的椭圆, 在椭圆前缘部分的一段弧上等距的取 30 个离散点作为需要拟合的数据, 分别采用 Radim Halir 改进的 Fitzgibbon 方法和本文提出的方法进行拟合, 结果如表 1。

表 1 中的各列表示对应参数的相对误差, 从最后一行可以看出本文方法的相对误差大约是 Fitzgibbon 方法相对误差的 40% 左右。本文方法运算时间 0.171 0s, 虽比 Fitzgibbon 方法的运算时间稍长, 但完全是可以接受的。

2.2 实例 2

逆向工程实际中得到的离散数据都不可避免的带有一定的噪声, 为了检验本文方法的鲁棒性, 在实例 1 中的每个点都加上服从正态分布  $N(0, \sigma^2 I_2)$  的随机数作为噪声, 其中  $\sigma^2$  为正态分布的方差。

表 1 椭圆拟合方法的比较  
Table 1 Results of different ellipse fitting methods

|                       | $\Delta x_0/x_0$ | $\Delta y_0/y_0$ | $\Delta a/a$  | $\Delta b/b$  | $\Delta \theta/\theta$ |
|-----------------------|------------------|------------------|---------------|---------------|------------------------|
| Fitzgibbon 方法         | 2.819 7e- 007    | 6.666 4e- 008    | 6.395 7e- 007 | 2.711 8e- 007 | 1.725 7e- 007          |
| 本文方法                  | 1.198e- 007      | 2.642 9e- 008    | 2.712e- 007   | 1.085 9e- 007 | 4.596 3e- 008          |
| 本文方法<br>Fitzgibbon 方法 | 0.424 86         | 0.396 44         | 0.424 03      | 0.400 45      | 0.266 34               |

表 2 本文方法对含噪声数据的拟合结果  
Table 2 Results of fitting method for data blurred by normal noise

| $\sigma^2$ |               | $\Delta x_0/x_0$ | $\Delta y_0/y_0$ | $\Delta a/a$ | $\Delta b/b$ | $\Delta \theta/\theta$ |
|------------|---------------|------------------|------------------|--------------|--------------|------------------------|
| 0.01       | Fitzgibbon 方法 | 1.112e- 003      | 2.457e- 004      | 2.527e- 003  | 1.018e- 003  | 4.693e- 004            |
|            | 本文方法          | 6.045e- 004      | 1.346e- 004      | 1.377e- 003  | 5.610e- 004  | 2.877e- 004            |
|            | 本文方法          | 0.5433           | 0.5477           | 0.5448       | 0.5510       | 0.6131                 |
|            | Fitzgibbon 方法 |                  |                  |              |              |                        |

| $\sigma^2$ |               | $\Delta x_0/x_0$ | $\Delta y_0/y_0$ | $\Delta a/a$ | $\Delta b/b$ | $\Delta\theta/\theta$ |
|------------|---------------|------------------|------------------|--------------|--------------|-----------------------|
| 0.01       | Fitzgibbon 方法 | 1.540e- 002      | 3.671e- 003      | 3.494e- 002  | 1.502e- 002  | 1.004e- 002           |
|            | 本文方法          | 3.784e- 003      | 1.037e- 003      | 8.626e- 003  | 4.107e- 003  | 4.151e- 003           |
|            | 本文方法          |                  |                  |              |              |                       |
|            | Fitzgibbon 方法 | 0.2458           | 0.2824           | 0.2470       | 0.2735       | 0.4134                |

从表 2 可以看出, 本文的方法在不同的噪声水平下, 都取得了比 Fitzgibbon 方法更高的拟合精度, 因此具有较好的鲁棒性。因为每次添加的随机噪声值不同, 所以每次拟合的精度也略有不同, 表 2 的数据是多次拟合结果的平均值。

### 3 结论

试验结果表明, 本文提出的椭圆弧拟合方法具有比 Fitzgibbon 方法更高的拟合精度, 且鲁棒性较好, 非常适合用于发动机叶片前后缘的高精度重建。另外, 圆弧可以看作是一种特殊的椭圆弧。数据实验表明本文的方法也同样适用于传统的圆弧型前缘的高精度重建, 限于篇幅, 具体的拟合结果从略。因此在逆向工程中也可以根据本文的拟合结果判断前后缘的曲线类型。

### 参考文献:

[1] Fitzgibbon A, Pilu M, Fisher R B. Direct least square fitting of ellipses[J]. *IEEE Transaction on Pattern Analysis*

*and Machine Intelligence*, 1999, 21(5): 476-480.

[2] 杨忠根, 栾晓明. 利用椭圆性质提取椭圆[J]. *中国图象图形学报*, 1997, 2 (7): 517-519.

Yang Zhonggen, Luan Xiaoming. Ellipse extraction using its geometric properties[J]. *Journal of Image and Graphics*, 1997, 27: 517-519.

[3] 陈燕新, 戚飞虎. 一种新的基于随机 Hough 变换的椭圆检测方法[J]. *红外与毫米波学报*, 2000, 19(1): 43-47.

Chen Yanxin, Qi Feihu. A new ellipse detection method using randomized hough transform[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2000, 19(1): 43-47.

[4] 雷志术, 张雁波. 椭圆定形曲线拟合问题若干新型算法[J]. *上海交通大学学报*, 2002, 36(8): 1 210-1 213.

Lei Zhishu, Zhang Yanbo. Some new algorithms for ellipse curve fitting problem[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2002, 36(8): 1 210-1 213.

[5] 刘书桂, 李蓬, 那永林. 基于最小二乘原理的平面任意位置椭圆的评价[J]. *计量学报*, 2002, 23(4): 245-247.

Liu Shugui, Li Peng, Na Yonglin. Evaluation of the form error of ellipse based on least square method[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2002, 23(4): 245-247.