

文章编号: 1000-8055(2006)04-0773-5

# 电弧喷射推力器电磁场模拟

肖应超, 刘 宇, 张振鹏, 张国舟  
(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

**摘 要:** 为了揭示电弧喷射推力器内部电磁场特征及其与高温电离气体间的相互作用机理, 建立了比较完善的电磁场模型, 详细讨论了电磁场数值模拟方法及其计算效果。模型同时考虑了电场力、洛伦兹力和电子压强梯度对传导电流的贡献, 由电子动力学方程和粒子微观碰撞理论推导出电流方程, 由麦克斯韦方程组推导出电磁场控制方程, 采用包括强隐过程(SIP)迭代法在内的十种迭代方法求解离散的电场方程。研究表明, SIP 迭代法是适用于电弧喷射推力器电磁场模拟的快速有效的方法, 模型能够准确地反映推力器内部电磁场与高温电离气体间的相互作用机理。

**关 键 词:** 航空、航天推进系统; 电弧喷射推力器; 电磁场; 高温电离气体; 模拟; SIP 迭代法  
**中图分类号:** V439 **文献标识码:** A

## Modeling of electromagnetic field within arcjet thruster

XIAO Ying-chao, LIU Yu, ZHANG Zhen-peng, ZHANG Guo-zhou

(School of Astronautics,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** In order to reveal electromagnetic characteristics and interaction between electromagnetic field and high temperature ionized gas within arcjet thruster, improved modeling of electromagnetic field was developed and various numerical techniques were observed and studied. Contributions of electric field force, Lorentz force and electronic pressure gradient to conduction current were considered in the model. Electricity equation was derived from electron dynamic equation and particle collision theory. Electromagnetic field equation was simplified from Maxwell's equations. And ten iteration techniques were introduced to solve discretized electromagnetic field equation, including Strong Implicit Procedure(SIP) iteration technique. The investigation shows that SIP iteration technique can be adopted to solve electromagnetic field within arcjet thruster very effectively, and the present modeling can well demonstrate the interaction between electromagnetic field and high temperature ionized gas within it.

**Key words:** aerospace propulsion system; arcjet thruster; electromagnetic field; high temperature ionized gas; modeling; SIP iteration technique

电弧喷射推力器(Arcjet)内部工作过程复杂强烈并且相互耦合, 由于其能量来源于外加的电能, 电磁场与高温电离气体间的相互作用过程是其内部各种物理过程最主要的源动力, 要准确反

映并模拟推力器内部过程机理, 全面考虑电磁源项并准确有效地计算电磁场参数至关重要, 也就是说建立完善的电磁场模型对电磁场进行有效的模拟是成功耦合数值模拟的前提。电磁场与高温

收稿日期: 2005-09-29; 修订日期: 2006-01-16

基金项目: 博士生创新性研究基金项目

作者简介: 肖应超(1979-), 男, 湖北孝感人, 博士生, 研究领域航空宇航推进理论与工程, 专业特长电推进技术研究。

电离气体间的相互作用体现于电场力、洛伦兹力和电子漂移等, 目前的研究都考虑了电场力, 对于洛伦兹力和电子压强梯度下的电子漂移, 考虑了其中之一或者将两者都忽略了<sup>[1-5]</sup>, 而实际上这两个因素都是比较重要的。为了更加准确地模拟推力器内部电磁作用过程, 本文模型同时考虑了电场力、洛伦兹力和电子压强梯度对传导电流的贡献, 由此推导出了电流本构方程, 并由普适的麦克斯韦方程组推导出适用于推力器内部电磁场的控制方程, 采用强隐过程(SIP)迭代法等十种方法对电磁场离散方程进行了迭代求解, 讨论了各种数值方法的计算效果和模型对推力器内部过程的模拟效果。

## 1 物理数学模型

### 1.1 物理模型

推力器内部电磁场物理模型包含的主要内容如下: (1) 高温电离气体呈电准中性, 没有空间净电荷; (2) 电磁场为轴对称稳态电磁场, 没有位移电流, 没有磁场时变项; (3) 同时考虑电场力、洛伦兹力以及电子压强梯度作用对传导电流的贡献; (4) 考虑电子与重粒子间的碰撞对传导电流的影响; (5) 磁导率为自由空间磁导率; (6) 高温电离气体为非均匀、线性、各向同性媒质, 没有分界面。

### 1.2 电流方程

由麦克斯韦方程组的非限定形式可知, 自由电荷和传导电流是外来的已知量, 它们的分布和电磁场中媒质的分布是确定电磁场的外部条件, 再加上分界面上的衔接条件, 就可以全面概括电磁场的规律。对于本文电磁场模型而言, 没有自由电荷, 因此传导电流是确定电磁场的外来已知量, 准确表达传导电流具有重要意义。考虑高温电离气体中电子的运动状态, 电子受到的主要作用力包括静电力、洛伦兹力、其它粒子的平均碰撞力以及电子压强梯度折合力, 单个电子的包含碰撞作用的动力学方程可以写为:

$$m_e \frac{d\vec{V}_e}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{V}_e \times \vec{B} - \frac{\nabla p_e}{n_e} + \vec{F}_h \quad (1)$$

其中  $m_e$ ,  $\vec{V}_e$ ,  $t$ ,  $e$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $p_e$ ,  $n_e$ ,  $\vec{F}_h$  分别为电子质量、电子运动速度、时间、电子电量、电场强度、磁感应强度、电子压强、电子数密度、其它粒子对电子的平均碰撞力。设  $\vec{V}$  为气体宏观速度, 趋于平衡稳态后有:

$$-e\vec{E} - e\vec{V} \times \vec{B} - \frac{\nabla p_e}{n_e} + \vec{F}_h = 0 \quad (2)$$

设在电子优先加速后与其它粒子碰撞前, 第  $j$  种粒子的平均速度为  $\vec{V}_j$ , 电子优先加速明显, 则平均碰撞力为:

$$\begin{aligned} \vec{F}_h &= \sum_{j \neq e} m_e \nu_{ej} (\vec{V}_j - \vec{V}_e) \doteq \\ &- m_e \vec{V}_e \sum_{j \neq e} \nu_{ej} = -m_e \vec{V}_e \nu_{eh} \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\nu_{ej}$  为电子与第  $j$  种粒子的碰撞频率,  $\nu_{eh}$  为电子与其它粒子的总碰撞频率, 联立方程(2)和方程(3)可以得到  $\vec{V}_e$ , 于是有:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -en_e \vec{V}_e = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{eh}} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) + \frac{e}{m_e \nu_{eh}} \nabla p_e \\ &= \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) + \Psi \nabla p_e \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{eh}}$  为电导率,  $\Psi = \frac{e}{m_e \nu_{eh}}$  为电子迁移率, 方程(4)即为媒质关于电流的本构方程。

### 1.3 电磁场控制方程

基于本文电磁场模型从麦克斯韦方程组出发可以推导出电磁场控制方程, 考虑媒质本构方程和方程组的封闭性, 首先由限定形式的麦克斯韦方程组可以得到:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) + \Psi \nabla p_e \end{cases} \quad (5)$$

在柱坐标下将矢量方程化为标量方程, 考虑轴对称性, 电磁场量对角向坐标偏导数为零, 不考虑磁感应强度的轴向和径向分量, 可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial (rB_\theta)}{\partial x} \right] = \\ \mu_0 \left[ \frac{\partial (vB_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi}{\sigma} \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial (uB_\theta)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Psi}{\sigma} \frac{\partial p_e}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

分别用  $x, y$  表示轴向坐标和径向坐标, 可以得到电磁场控制方程在物理平面上的形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sigma_y} \frac{\partial (yB_\theta)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sigma_y} \frac{\partial (yB_\theta)}{\partial y} \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_0}{y} u y B_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_0}{y} v y B_\theta \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_0 \frac{\Psi}{\sigma} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_0 \frac{\Psi}{\sigma} \frac{\partial p_e}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

同时还可以推导出  $J_x, J_y, E_e, E_y$ , 先数值求解方程(7)得到  $B_\theta$ , 然后差分求得  $J_x, J_y, E_x, E_y$ , 这样就得到了本文电磁场模型中的全部电磁场量。

## 2 电磁场控制方程的离散

令  $F = yB_\theta$ ,  $C_1 = \frac{1}{\sigma_y}$ ,  $C_2 = \frac{\mu_0}{y}$ ,  $C_3 = \mu_0 \frac{\Psi}{\sigma}$ , 方程

(7)可以化为:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(C_1 \frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C_1 \frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(C_2 u F) + \frac{\partial}{\partial y}(C_2 v F) \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left(C_3 \frac{\partial p_e}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C_3 \frac{\partial p_e}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

为了方便离散, 首先将电磁场控制方程(8)转化到计算平面上<sup>[6]</sup>, 电磁场方程在计算平面上形式为:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{C_1}{J}(\alpha F_{\xi} - \beta F_{\eta})\right]_{\xi} + \left[\frac{C_1}{J}(\alpha F_{\eta} - \beta F_{\xi})\right]_{\eta} = \\ &(C_2 F_{w1})_{\xi} + (C_2 F_{w2})_{\eta} - \\ &[C_3(p_e)_{\eta}]_{\xi} + [C_3(p_e)_{\xi}]_{\eta} \end{aligned} \tag{9}$$

采用有限控制容积积分方法<sup>[6]</sup>对方程(9)进行积分, 整理可得离散的代数方程:

$$LU = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & L_S & L_P & \\ & & & \ddots & \\ & & & & L_W \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M_{SE} & M_E & \\ & & & M_N & \\ & & & & M_S & M_P \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & M_{NW} \\ & & & & & & & M_W \end{bmatrix} = M = A + N \tag{11}$$

SIP 迭代法是利用代数方程组系数矩阵的稀疏特性来对其进行不完全的 LU 分解的, 在适宜的场合可以获得很好的计算效果<sup>[7]</sup>。对于离散的代数方程(10), 将  $A_C$  和  $S_P$  都作为源项来处理, 就可以得到二维问题五点格式的 SIP 迭代算法。联立所有的内节点可以得到五对角方程  $AF = B$ , 为了方便求解, 将系数分解为  $L$  和  $U$  两个三角矩阵。第一个基本思想是尽量简单, 于是可以使  $L$  和  $U$  为稀疏矩阵且非零元素所在对角线位置与矩阵  $A$  中的一致, 而两个三角矩阵  $L$  和  $U$  相乘后得到的是七对角矩阵  $M$ , 与矩阵  $A$  相比多出了七

$$\begin{aligned} A_P F_P &= A_E F_E + A_S F_S + A_W F_W + \\ &A_N F_N + A_C + S_P \end{aligned} \tag{10}$$

其中  $S_P$  为电子压强梯度对电流的贡献引起的源项。

### 3 离散方程的数值解法

代数方程(10)可以采用迭代法求解, 下面比较逐点迭代法、线隐式迭代法、交替方向隐式(ADI)迭代法和强隐过程(SIP)迭代法的计算效果, 重点介绍 SIP (Strong Implicit Procedure) 迭代法。逐点迭代法、线隐式迭代法和 ADI 迭代法都包含简单迭代、高斯-赛德尔迭代和超松弛迭代。线隐式迭代法需要求解三对角方程, 计算效果与扫描方向也有关。ADI 迭代法在同一步迭代中要在两个方向进行线隐式迭代。

对角稀疏矩阵的 LU 分解式(11)中的  $M_{SE}$  和  $M_{NW}$  对角线元素, 直观的方法是将这两条对角线元素分离出来和零元素作为矩阵  $N$  的元素, 矩阵  $M$  中的其它元素与矩阵  $A$  中的相同, 但是这样分解进行迭代求解收敛速度很慢<sup>[7]</sup>, 于是提出第二个构造思想, 令矩阵  $N$  与矩阵  $M$  具有相同的对角线位置, 并且满足  $NF \approx 0$ , 同时令  $N_{NW} = M_{NW}$  和  $N_{SE} = M_{SE}$ , 并认为其余非零对角线是用来抵消这两条对角线的, 第三个重要的构造思想是变量分布足够光滑, 可以对变量进行插值, 于是有方程组:

$$\begin{cases} N_P F_P + N_N F_N + N_S F_S + N_E F_E + N_W F_W + N_{NW} F_{NW} + N_{SE} F_{SE} \approx 0 \\ M_{NW}(F_{NW} - F_{NW}^*) + M_{SE}(F_{SE} - F_{SE}^*) \approx 0 \\ F_{NW}^* = \alpha(F_N + F_W - F_P) \\ F_{SE}^* = \alpha(F_S + F_E - F_P) \end{cases} \tag{12}$$

为了使计算稳定,应该使抵消参数  $\alpha < 1.0$ , 由方程组(12)可以得到用  $M_{NW}$  和  $M_{SE}$  的线性组合表示的矩阵  $N$  的其它五条对角线上的元素,这

$$\begin{cases} L_W^l = A_W^l (1 + \alpha U_N^{l-M_j}) \\ L_S^l = A_S^l (1 + \alpha U_E^{l-1}) \\ L_P^l = A_P^l + \alpha (L_W^l U_N^{l-M_j} + L_S^l U_E^{l-1}) - L_W^l U_E^{l-M_j} - L_S^l U_N^{l-1} \\ U_N^l = (A_N^l - \alpha L_W^l U_N^{l-M_j}) / L_P^l \\ U_E^l = (A_E^l - \alpha L_S^l U_E^{l-1}) / L_P^l \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中上标为方程序号,即矩阵行号,  $M_j$  为南北方向的节点总数。由于  $AF = B$ , 所以:

$$\begin{cases} (A + N)F = (A + N)F + (B - AF) \\ (A + N)F^{n+1} = (A + N)F^n + (B - AF^n) \\ M(F^{n+1} - F^n) = (B - AF^n) \\ LU\delta^{n+1} = r^n \end{cases} \quad (14)$$

由式(14)可以求出每步迭代的误差,当误差收敛到给定精度后就得到了  $F$  的收敛数值解。需要说明的是虽然计算过程是迭代性的,但是每步迭代中所有的内节点是联立求解的,因此称为强隐过程迭代法。本文取抵消参数为常数,只需要进行一次上下三角矩阵元素的计算,每步迭代计算量小,尽管迭代步数稍多,也能够得到比较快的收敛速度。矩阵  $N$  的元素怎样取值对最终解

样便可得到矩阵  $M$  进行  $LU$  分解,从西南角位置开始计算,  $L$  和  $U$  的各元素为:

没有影响,但会影响到迭代过程的快慢,因此按上述方法来构造矩阵  $N$  并试算抵消参数的值以获得较快的收敛速度。

4 结果及讨论

本文采用 Hilgenstock 方法生成计算网格,保证了网格的正交性、光滑性和疏密分布,可以满足局部大参数梯度数值模拟的要求,网格点数为  $101 \times 31$ 。表 1 为在生成计算网格的基础上采用不同方法求解代数方程(10)的计算效果,其中线隐式迭代法沿轴线方向扫描,最佳超松弛因子试算给出,逐点超松弛迭代法取 1.696,线隐式超松弛迭代法取 1.443,ADI 超松弛迭代法两个方向分别取 1.478 和 1.493。图 1 为超松弛迭代法和 SIP 迭代法的收敛过程曲线比较。

表 1 各种数值方法的计算效果  
Table1 Computational effects of various numerical techniques

| No. | 求解方法           | 收敛到 $10^{-9}$ 量级 | 最终收敛精度        | 收敛到最终精度 |
|-----|----------------|------------------|---------------|---------|
|     |                | 所需迭代步            |               | 所需迭代步   |
| 1   | 简单逐点迭代法        | 938              | $10^{-15}$ 量级 | 2135    |
| 2   | 高斯-赛德尔逐点迭代法    | 501              | $10^{-16}$ 量级 | 1203    |
| 3   | 逐点超松弛迭代法       | 84               | $10^{-14}$ 量级 | 150     |
| 4   | 简单线隐式迭代法       | 181              | $10^{-16}$ 量级 | 426     |
| 5   | 高斯-赛德尔线隐式迭代法   | 97               | $10^{-16}$ 量级 | 217     |
| 6   | 线隐式超松弛迭代法      | 34               | $10^{-15}$ 量级 | 66      |
| 7   | 简单 ADI 迭代法     | 127              | $10^{-16}$ 量级 | 309     |
| 8   | 高斯-赛德尔 ADI 迭代法 | 69               | $10^{-16}$ 量级 | 151     |
| 9   | ADI 超松弛迭代法     | 22               | $10^{-15}$ 量级 | 39      |
| 10  | SIP 迭代法        | 47               | $10^{-15}$ 量级 | 115     |

研究结果总体来说,相对误差收敛到相同的精度,高斯-赛德尔迭代法比简单迭代法需要的迭代步数少得多,超松弛迭代法比单纯的高斯-赛德尔迭代法需要的迭代步数少得多,线隐式迭代法比逐点迭代法需要的迭代步数少得多,ADI 迭代法比单方向扫描的线隐式迭代法需要的迭代步数少得多。由于不同迭代法每步迭代计算量不同,

尽管收敛到相同精度需要的迭代步数较多,沿轴线方向扫描的线隐式迭代法比 ADI 迭代法的计算效率还要高,而与沿轴线方向扫描的线隐式超松弛迭代法相比,SIP 迭代法的计算效率更高,因此在这十种迭代方法中,SIP 迭代法具有最高的计算效率。

模拟有关结果(图 2 和图 3)表明:在推力器

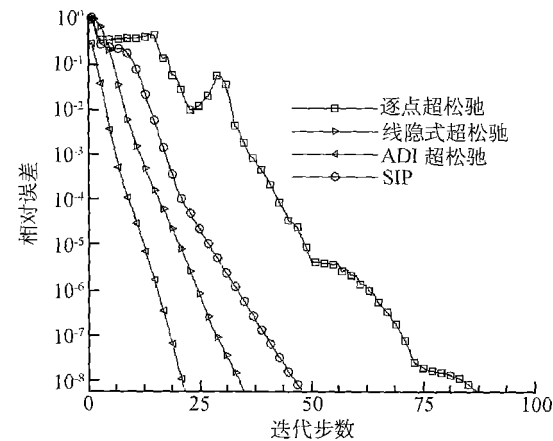


图 1 不同迭代法收敛过程曲线

Fig. 1 Convergence profiles of various iteration techniques

压缩室入口之前气体几乎没有电离, 所以几乎没有导电能力, 电导率几乎为零, 电流密度也几乎为零。在压缩室内的轴线附近电流密度很大, 能量输入作用很强, 高能高温下气体电离度较大, 电导率也较大。由于电流在阴极尖端附近的集中, 这里的电流密度非常大(轴向电流密度最高达  $7.6 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ )。电导率与温度、压强关系密切, 由于高温电离气体的膨胀加速以及物质能量交换, 从压缩室出口到喷管出口和阳极壁面电导率逐渐减小, 电导率分布与非平衡扩散等过程也有关系。

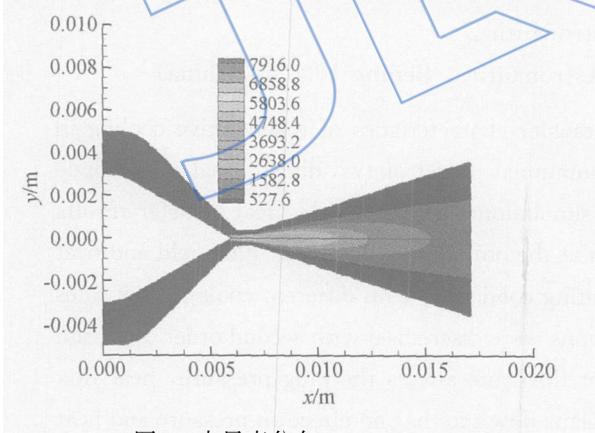


图 2 电导率分布 ( $1/\Omega \cdot \text{m}$ )

Fig. 2 Distribution of electrical conductivity ( $1/\Omega \cdot \text{m}$ )

5 结 论

本文在完整地考虑电弧喷射推力器内部电磁

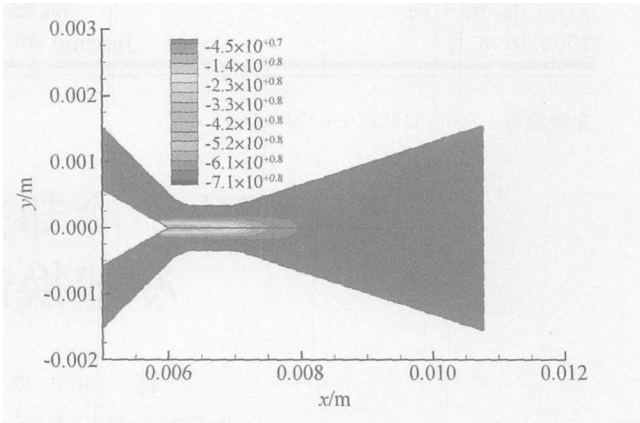


图 3 轴向电流密度分布 ( $\text{A/m}^2$ )

Fig. 3 Distribution of axial current density ( $\text{A/m}^2$ )

场与高温电离气体间的相互作用的基础上建立了比较完善的电磁场模型, 由电子运动方程推导出了媒质关于电流的本构方程, 并在此基础上由麦克斯韦方程组推导出了电磁场控制方程, 最后成功地采用包括强隐过程(SIP)迭代法在内的十种迭代方法对电磁场离散方程进行了求解, 从而模拟了推力器内部电磁场, 获得了推力器内部电导率分布和电流密度分布等。研究表明, 在这十种方法中 SIP 迭代法具有最快的收敛速度, 虽然算法相对复杂, 但实际编程实现也比较容易, 算法实用性好, 数值模拟可以比较准确地揭示推力器内部电磁场细节。研究为电磁流体电磁场模拟提供了新的建模与数值方法参考。

参考文献:

[1] Pawlas G E, Keith T G. Numerical modeling of a vortex stabilized arcjet thruster[R]. *AIAA-89-2724*.  
[2] Babu V, Aithal S M, Subramaniam V V. Numerical simulation of a hydrogen arcjet[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 1996, 12(6): 1114-1122.  
[3] Funaki I, Toki K, Kuriki K. Nonequilibrium flow analysis of a two-dimensional MPD arcjet[C]. *IEPC-97-112*.  
[4] 廖宏图. 电弧喷射器研究[D]. 上海: 上海交通大学, 1999.  
[5] Miyasaka Takeshi, Katsurayama Hiroshi, Fujiwara Toshi. Effect of applied magnetic field on arcjet thruster[C]. *IEPC-01-130*.  
[6] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.  
[7] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京: 科学出版社, 2000.