

文章编号: 1000-8055(2007)02-0169-06

确定性仿真结果检验和因子分析方法

傅惠民, 邬文娟

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100083)

摘要: 提出一种确定性仿真结果(不考虑随机因素影响的仿真结果)检验方法, 能够对仿真结果与试验结果之间的误差进行分析, 确定该误差是由于仿真不正确引起的系统误差, 还是由于试验结果的分散性引起的偶然误差, 进而判断仿真结果正确与否. 同时建立一种确定性仿真结果多因子分析方法, 能够对仿真结果的各个影响因素(因子)进行分析, 确定哪些因素已被正确仿真, 哪些因素尚未被正确模拟, 从而指导仿真软件的编制.

关键词: 航空、航天推进系统; 仿真; 检验; 因子分析; 小样本; 模型验证

中图分类号: TB301; O211 文献标识码: A

Methods for test and factor analysis of determinate simulation results

FU Huimin, WU Wenjuan

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A test method for determinate simulation results, in which random factors are not taken into account, is presented. It can analyze the error between simulation and experiment results, distinguish between system error caused by simulation incorrectness and accident error caused by the scatter of experiment results, and determine whether simulation results are right or not. A method for multiple factors analysis of determinate simulation results is also presented, which can analyze every influencing factor of simulation results and determine which factors have been simulated correctly and which have not. In this way, the method can guide the programming of simulation software.

Key words: aerospace propulsion system; simulation; test; factor analysis; small sample; model verification

目前仿真技术已在航空、航天、船舶、电子、通信、材料、机械、建筑、生物工程、经济、金融等各个领域发挥着重要作用, 例如, 核仿真、结构强度仿真、振动仿真、可靠性仿真、经济仿真等. 但是仿真结果的正确性与可信性问题一直困扰着人们. 为此, 文献[1~5]建立了随机仿真结果统计检验和

因子分析方法, 解决了随机仿真结果小样本检验问题. 鉴于确定性仿真(不考虑随机因素影响的仿真)在工程中的广泛应用, 本文进一步建立一种确定性仿真结果检验方法. 虽然确定性仿真未考虑随机因素的影响, 仿真结果并不存在随机性, 但由于试验结果存在分散性, 不可能与仿真结果完全

收稿日期: 2006-07-31; 修订日期: 2006-12-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(10472006)

作者简介: 傅惠民(1956-), 男, 浙江遂昌人, 北京航空航天大学航空科学与工程学院“长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究.

吻合,那么仿真结果与试验结果之间的误差是由于仿真不正确所引起的系统误差,还是由于试验结果的随机性引起的偶然误差?目前将试验结果与仿真结果进行简单比对的方法不能判断该误差是系统误差还是偶然误差,也就是说,不能科学合理地判断仿真结果正确与否.若分别在每一状态对仿真结果进行假设检验,则每一状态都要做大量试验,使总的试验量很大,而且每一状态下都存在弃真概率,这将导致所有状态的总的显著性水平无法控制.本文方法则能够将各个状态的仿真结果与试验数据作为一个整体进行统计推断,对其误差进行小样本检验,确定该误差是系统误差还是偶然误差,从而解决确定性仿真结果的正确性与可信性问题.

在仿真过程中需要对众多复杂的影响因素(如温度、应力等)进行模拟.当仿真结果不正确时,如何判断哪些影响因素已被正确仿真,哪些影响因素尚未被正确模拟,这是当前亟待解决的难题.为此,本文建立一种确定性仿真结果多因子分析方法,可以通过少量试验,分析各个因素对仿真结果的影响,确定哪些影响因素已被正确仿真,哪些尚未被正确模拟,从而指导仿真软件的编制.

1 多状态确定性仿真结果检验方法

1.1 基本模型

设 μ_i 为第 i 个状态下真值 μ_i 的仿真结果, $i = 1, 2, \dots, m$.当该仿真结果正确时,有

$$\mu_i = \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{1}$$

为了检验仿真结果 μ_i 是否满足式(1),在第 i 个状态下进行了 n_i 个试样的独立试验,试验值记为 $X_{ij}, j = 1, 2, \dots, n_i$.通常试验结果存在分散性,并遵循正态分布,即

$$X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2) \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n_i \tag{2}$$

若令

$$Y_{ij} = X_{ij} - \mu_i \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n_i \tag{3}$$

则当仿真结果 μ_i 正确,即式(1)成立时,有

$$Y_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n_i \tag{4}$$

因此,通过检验 Y_{ij} 是否来自于均值为零的正态母体,可以判断仿真得到的 μ_i 正确与否.

1.2 仿真结果检验方法

对于给定的显著性水平 α ,若

$$F = \frac{S_A \backslash m}{S_E \backslash (n - m)} \geq F_{\alpha}(m, n - m) \tag{5}$$

则可以断定仿真结果不正确.式中

$$S_A = \sum_{i=1}^m n_i \bar{Y}_i^2 \tag{6}$$

$$S_E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \tag{7}$$

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \tag{8}$$

可以证明, $\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - m)$,并且当仿真结果

正确时,有 $\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(m)$.

1.3 方差估计

方差 σ^2 的无偏估计量 σ^2 由下式给出

$$\sigma^2 = \frac{S_E}{n - m} \tag{9}$$

1.4 仿真检验算例

设某产品性能在第 i 个状态下的真值为 μ_i ,其仿真结果为 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, 5$.由于在工程实际中真值 μ_i 是未知的,因此无法将 μ_i 与 μ_i 进行比较,只能将 μ_i 与试验结果比较.本文方法能够很好地判断仿真结果 μ_i 和试验结果之间的误差是由于仿真不正确引起的系统误差,还是由于试验结果的随机性引起的偶然误差.下面给出一个算例.

表 1 确定性仿真结果和模拟试验数据
Table 1 Determinate simulation results and Monte Carlo experiment data

状态 i	真值 μ_i	仿真结果 μ_i	模拟试验数据 X_{ij}		
1	55	55	51.0		
2	60	60	56.3	61.4	63.6
3	65	65	62.6		
4	70	70	64.2	66.9	68.6
5	75	75	86.2		

表 1 第 2 列和第 3 列分别给出了真值 μ_i 和仿真结果 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, 5$.第 4 列给出了各个状态的模拟试验数据(标准差 $\sigma = 5$).现采用本文方法对表 1 第 3 列和第 4 列数据进行分析处理,结果列于表 2.从中可以看到,在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下,经本文方法检验可以得出表 1 第 3 列仿真结果是正确的结论.由于该算例采用了 Monte Carlo 模拟试验数据,真值 μ_i 已知,所以通过表 1

第 2 列真值 μ_i 和第 3 列仿真结果 $\hat{\mu}_i$ 的直接对比, 可知本文方法的检验结论是正确的. 从表 1 还可知, 第 5 个状态的仿真结果 $\hat{\mu}_5 = 75$ 与试验结果 86.2 之间的相对误差为 14.9%, 如按照简单比对的方法, 就有可能得出该仿真结果不正确的错误结论.

表 2 多状态确定性仿真结果检验表 ($\alpha = 0.05$)

Table 2 Multiple states determinate simulation results test ($\alpha = 0.05$)

平方和 S	F 值	F_α 值	检验结果
$S_A = 183.13$ $S_E = 37.89$	$F = \frac{S_A \backslash m}{S_E \backslash (n - m)} = 3.87$	$F_\alpha = 6.26$	$F < F_\alpha$ 不拒绝该仿真结果

若表 1 第 2 列真值 μ_i 的仿真结果为 $\hat{\mu}_i = 1.1\mu_i, i = 1, 2, \dots, 5$, 见表 3. 显然, 此时的仿真结果 $\hat{\mu}_i$ 是不正确的. 现采用本文方法对表 1 第 4 列模拟试验数据和表 3 仿真结果进行分析处理, 结果列于表 4. 从中可以看到, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 经本文方法检验, 可以得出表 3 仿真结果不正确的结论. 从表 1 第 4 列和表 3 第 6 列还可知, 此时第 5 个状态的仿真结果 $\hat{\mu}_5 = 82.5$ 与试验结果 86.2 之间的相对误差仅为 4.5%, 如按照简单比对的方法, 就有可能得出该仿真结果正确的错误结论.

表 3 5 个状态确定性仿真结果

Table 3 Determinate simulation results in 5 states

状态 i	1	2	3	4	5
仿真结果 $\hat{\mu}_i$	60.5	66	71.5	77	82.5

表 4 多状态确定性仿真结果检验表 ($\alpha = 0.05$)

Table 4 Multiple states determinate simulation results test ($\alpha = 0.05$)

平方和 S	F 值	F_α 值	检验结果
$S_A = 602.68$ $S_E = 37.89$	$F = \frac{S_A \backslash m}{S_E \backslash (n - m)} = 12.72$	$F_\alpha = 6.26$	$F > F_\alpha$ 拒绝该仿真结果

2 确定性仿真结果多因子分析方法

仿真结果因子分析旨在对仿真中遇到的众多影响因素(如温度、应力等)进行分析, 以确定哪些影响因素已被正确仿真, 而哪些尚未被正确模拟, 从而指导仿真软件的编制. 对于单一因子的情况, 只要把上节多状态仿真结果检验方法中的状态换

成因子, 即可得到仿真结果的多因子分析方法. 下面将给出多因子分析方法.

2.1 基本模型

对于多因子试验, 设试验总次数为 n , 试验值为 X_i , 且有 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$. 设 $\hat{\mu}_i$ 为真值 μ_i 的仿真结果. 当 μ_i 的各个影响因素被正确仿真时, 有

$$\hat{\mu}_i = \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{10}$$

令

$$Y_i = X_i - \hat{\mu}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{11}$$

则有 $Y_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$. 因此, 通过检验 Y_i 是否来自于均值为零的正态母体, 可以判断真值 μ_i 的各个影响因素是否被正确仿真.

2.2 多因子分析

2.2.1 因子及其交互效应分析

对于给定的显著性水平 α , 若

$$F_A = \frac{S_A \backslash f_A}{S_E \backslash f_E} \geq F_\alpha(f_A, f_E) \tag{12}$$

则可以断定仿真结果 $\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 未正确考虑因子 A 对真值 μ_i 的影响.

同样, 在显著性水平 α 下, 当

$$F_{A \times B} = \frac{S_{A \times B} \backslash f_{A \times B}}{S_E \backslash f_E} \geq F_\alpha(f_{A \times B}, f_E) \tag{13}$$

时, 可以断定仿真结果 $\hat{\mu}_i$ 未正确考虑交互作用 $A \times B$ 对真值 μ_i 的影响($i = 1, 2, \dots, n$). 式中 S_E 为误差平方和, S_A 为因子 A 的效应平方和, $S_{A \times B}$ 为因子 A 和因子 B 的交互作用效应平方和, f_E 、 f_A 和 $f_{A \times B}$ 分别为其自由度. 下面给出它们的计算方法.

2.2.2 总离差平方和

设总离差平方和为

$$S_T = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Q_T - T^2 \backslash n \tag{14}$$

式中 Q_T 为所有试验数据的平方和, T 为所有试验数据的总和, $\bar{Y}$ 为总平均值, 即

$$Q_T = \sum_{i=1}^n Y_i^2 \tag{15}$$

$$T = \sum_{i=1}^n Y_i \tag{16}$$

$$\bar{Y} = T \backslash n \tag{17}$$

S_T 的自由度为

$$f_T = n - 1 \tag{18}$$

可以证明, 当 $\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足式(10)

时,有

$$\frac{S_T}{\sigma^2} \sim \chi^2(f_T) \tag{19}$$

2.2.3 因子效应平方和

设 n_{Ai} 为因子 A 的第 i ($i=1, 2, \dots, m_A$) 个水平下的试验次数, X_{Aik} 为其第 k 个试验结果, Y_{Aik} 为其经式(11)变换得到的数据. 则因子 A 的效应平方和由下式计算

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{i=1}^{m_A} n_{Ai} (\bar{Y}_{Ai} - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m_A} T_{Ai}^2 \backslash n_{Ai} - T^2 \backslash n \end{aligned} \tag{20}$$

式中 T_{Ai} 为因子 A 第 i 个水平下的所有试验数据的总和, $\bar{Y}_{Ai}$ 为其平均值, 即

$$T_{Ai} = \sum_{k=1}^{n_{Ai}} Y_{Aik} \tag{21}$$

$$\bar{Y}_{Ai} = T_{Ai} \backslash n_{Ai} \tag{22}$$

S_A 的自由度为

$$f_A = m_A - 1 \tag{23}$$

可以证明, 当 μ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 满足式(10)时, 有

$$\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(f_A) \tag{24}$$

2.2.4 两因子交互效应平方和

因子 A 和因子 B 的交互作用效应平方和 $S_{A \times B}$ 由下式计算

$$S_{A \times B} = S_{AB} - S_A - S_B \tag{25}$$

式中

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} n_{ABij} (\bar{Y}_{ABij} - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} T_{ABij}^2 \backslash n_{ABij} - T^2 \backslash n \end{aligned} \tag{26}$$

$$T_{ABij} = \sum_{k=1}^{n_{ABij}} Y_{ABijk} \tag{27}$$

$$\bar{Y}_{ABij} = T_{ABij} \backslash n_{ABij} \tag{28}$$

其中 T_{ABij} 为因子 A 第 i 个水平和因子 B 第 j 个水平组合 (A_i, B_j) 下的所有试验数据的总和, $\bar{Y}_{ABij}$ 为其平均值, n_{ABij} 为两因子水平组合 (A_i, B_j) 下的试验次数, Y_{ABijk} 为其第 k 个试验结果 X_{ABijk} 经式(11)变换得到的数据, $i=1, 2, \dots, m_A$; $j=1, 2, \dots, m_B$; $k=1, 2, \dots, n_{ABij}$.

$S_{A \times B}$ 的自由度等于因子 A 和因子 B 的自由度 f_A 和 f_B 乘积

$$f_{A \times B} = f_A \times f_B \tag{29}$$

可以证明, 当 μ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 满足式(10)

时,有

$$\frac{S_{A \times B}}{\sigma^2} \sim \chi^2(f_{A \times B}) \tag{30}$$

2.2.5 采用正交表时的两因子交互效应平方和

若采用正交表^[6]安排多因子有交互作用的试验, 其中因子 A 和因子 B 的交互作用在正交表上占了若干列, 那么该交互作用效应平方和 $S_{A \times B}$ 等于正交表上这若干列的效应平方和之和, 其中每列的效应平方和可将每列看成单一因子按式(20)计算. 此外也可按式(25)直接计算 $S_{A \times B}$.

2.2.6 误差平方和

误差平方和为

$$S_E = S_T - S_F - S_I \tag{31}$$

式中 S_F 为所有因子的效应平方和之和, S_I 为所有交互作用的效应平方和之和. S_E 的自由度为

$$f_E = f_T - f_F - f_I \tag{32}$$

式中 f_F 为所有因子平方和的自由度之和, f_I 为所有交互作用效应平方和的自由度之和. 可以证明

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(f_E) \tag{33}$$

2.3 均值检验

当对所有影响因子以及它们两两之间的交互作用, 式(12)和(13)都不成立时, 还需要 $E(\bar{Y})=0$, 仿真结果 μ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 才可能满足式(10). 若

$$t = \frac{|\bar{Y}|}{\sigma \sqrt{n}} \geq t_{\alpha/2}(f_E) \tag{34}$$

则在显著性水平 α 下, 可以断定仿真结果 μ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 不正确. 此时, 所有仿真结果 μ_i 都比其真值 μ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 增大了 $E(\bar{Y})$ (工程中可用 $\bar{Y}$ 近似). 式中 σ 由式(35)计算.

2.4 方差估计

方差 σ^2 的无偏估计量 σ^2 由下式给出

$$\sigma^2 = \frac{S_E}{f_E} \tag{35}$$

2.5 因子分析算例

设某产品性能 μ_j 受到因子 A (如温度) 和因子 B (如载荷) 的影响, 且 μ_j 与因子水平 A_i 和 B_j 之间存在如下关系

$$\begin{aligned} \mu_j &= a_0 + a_1 A_i + a_2 B_j \\ i &= 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{36}$$

式中 $a_0=100, a_1=2, a_2=5$. 现对产品性能 μ_j 进行仿真, 得到仿真结果为

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{ij} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 A_i + \hat{a}_2 B_j \\ i &= 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3\end{aligned}\tag{37}$$

式中 $\hat{a}_0=100, \hat{a}_1=2, \hat{a}_2=5$. 由于在工程实际中式(36)是未知的, 所以不能通过式(36)与式(37)之间的比较来确定仿真结果正确与否. 下面采用本文多因子分析方法对仿真结果式(37)进行检验. 考虑到本例中因子 A 和 B 各有三个水平, 见表 5, 为合理安排试验, 可采用正交表 $L_9(3^4)^{[6]}$ 进行正交试验设计, 将 A, B 这两个因子安排在表的前两列上, 按照 $L_9(3^4)$ 的试验号进行试验. 为了便于比较, 采用 Monte Carlo 模拟方法, 在水平组合 (A_i, B_j) 下以真值 μ_j 为均值, 并取标准差 $\sigma=15$, 得到模拟试验数据 X_{ij} 列于表 6, $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$. 由式(36)和式(37)给出的真值 μ_j 和仿真结果 $\hat{\mu}_{ij}$ 也一并列于表 6.

表 5 因子水平
Table 5 Factor levels

i	A_i	j	B_j
1	30	1	10
2	50	2	20
3	70	3	30

现采用本文方法对表 6 第 5 列和第 6 列数据进行分析处理, 结果列于表 7. 从中可以看到, 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 经本文方法因子分析可以得出式(37)已正确考虑因子 A 和 B 的影响, 并且表 6 第 5 列仿真结果是正确的结论. 通过式

(36) 与式(37)直接对比, 可知本文方法的分析结论是正确的.

表 6 确定性仿真结果和模拟试验数据
Table 6 Determinate simulation results and Monte Carlo experiment data

试验号	$\begin{matrix} A & B \\ i & j \end{matrix}$		真值 μ_{ij}	仿真结果 $\hat{\mu}_{ij}$	模拟试验数据 X_{ij}
1	1	1	210	210	205.7
2	1	2	260	260	235.1
3	1	3	310	310	311.0
4	2	1	250	250	276.3
5	2	2	300	300	299.1
6	2	3	350	350	357.6
7	3	1	290	290	283.2
8	3	2	340	340	319.8
9	3	3	390	390	391.6

若式(37)中仿真结果 $\hat{a}_0=100, \hat{a}_1=2, \hat{a}_2=5.5$, 则仿真结果 $\hat{\mu}_{ij}$ 由表 8 给出, 显然, 此时式(37)未正确考虑因子 B 的影响, 仿真结果 $\hat{\mu}_{ij}$ 是不正确的. 现采用本文方法对表 6 第 6 列模拟试验数据和表 8 仿真结果进行分析处理, 结果列于表 9. 从中可以看到, 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 经本文方法因子分析, 可知式(37)对因子 A 的仿真正确, 但对因子 B 的仿真不正确, 从而导致表 8 仿真结果也不正确.

表 7 确定性仿真结果多因子分析表 ($\alpha=0.05$)
Table 7 Multiple factors analysis of determinate simulation results ($\alpha=0.05$)

平方和 S		F 值	F_α 值	分析结果
因子分析	$S_A=795.98$	$F_A=\frac{S_A \sqrt{(r-1)}}{S_E \sqrt{[(r-1)(s-1)]}}=6.82$	$F_\alpha(r-1, (r-1)(s-1))=6.94$	$F_A < F_\alpha$ 不拒绝因子 A 仿真结果
	$S_B=769.88$	$F_B=\frac{S_B \sqrt{(s-1)}}{S_E \sqrt{[(r-1)(s-1)]}}=6.59$	$F_\alpha(s-1, (r-1)(s-1))=6.94$	$F_B < F_\alpha$ 不拒绝因子 B 仿真结果
	$S_E=233.59$			
均值 $\bar{Y}$		t 值	$t_{\alpha/2}$ 值	检验结果
均值检验	$\bar{Y}=-2.29$	$t=\frac{ \bar{Y} }{\sigma \sqrt{\frac{1}{rs}}}=0.90$	$t_{\alpha/2}((r-1)(s-1))=2.78$	$t < t_{\alpha/2}$ $E(\bar{Y})=0$
结 论		不拒绝式(37)给出的仿真结果		

表 8 各水平组合下的确定性仿真结果

Table 8 Determinate simulation results under level combinations

试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
仿真结果 $\hat{\mu}_{ij}$	215	270	325	255	310	365	295	350	405

表 9 确定性仿真结果多因子分析表 ($\alpha = 0.05$)

Table 9 Multiple factors analysis of determinate simulation results ($\alpha = 0.05$)

平方和 S	F 值	F_{α} 值	分析结果
$S_A = 795.98$	$F_A = \frac{S_A \backslash (r-1)}{S_E \backslash [(r-1)(s-1)]} = 6.82$	$F_{\alpha}(r-1, (r-1)(s-1)) = 6.94$	$F_A < F_{\alpha}$ 不拒绝因子 A 仿真结果
因子分析 $S_B = 969.88$	$F_B = \frac{S_B \backslash (s-1)}{S_E \backslash [(r-1)(s-1)]} = 8.30$	$F_{\alpha}(s-1, (r-1)(s-1)) = 6.94$	$F_B > F_{\alpha}$ 拒绝因子 B 仿真结果
$S_E = 233.59$			
均值 $\bar{Y}$	t 值	$t_{\alpha/2}$ 值	检验结果
均值检验 —	—	—	—
结 论	因子 B 仿真结果不正确, 拒绝式(37)给出的仿真结果		

3 结 论

(1)多状态仿真结果检验方法能够对确定性仿真结果与试验结果之间的误差进行分析, 确定该误差是由于仿真不正确引起的系统误差, 还是由于试验结果的分散性引起的偶然误差. 如果只有偶然误差, 则可以断定仿真结果正确.

(2)当仿真结果不正确时, 可以采用多因子分析方法对确定性仿真结果的各个影响因素进行分析, 以确定哪些因素已被正确仿真, 哪些因素尚未被正确模拟, 从而指导仿真软件的编制.

(3)由于确定性仿真不考虑随机因素的影响, 比随机仿真要简单得多, 所以在工程中应用广泛. 本文方法也因此不需要对方差(分散性)仿真结果进行检验, 实际应用时具有简便易行的特点.

参考文献:

[1] 傅惠民. 异方差分析方法[J]. 机械强度, 2005, 27(2): 196-201.

FU Huimin. Method for heteroscedastic analysis[J]. Journal

of Mechanical Strength, 2005, 27(2): 196-201.

[2] 傅惠民. 极小子样可靠性评定方法[J]. 机械强度, 2005, 27(3): 335-338.

FU Huimin. Method for reliability assessment with very small sample[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(3): 335-338.

[3] 傅惠民, 邬文娟. 多因子异方差分析[J]. 航空动力学报, 2005, 20(3): 345-350.

FU Huimin, WU Wenjuan. Multiway heteroscedastic analysis[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(3): 345-350.

[4] 傅惠民, 林逢春. 截尾数据整体估计方法[J]. 航空动力学报, 2005, 20(4): 529-533.

FU Huimin, LIN Fengchun. Integral estimate method for censored data[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(4): 529-533.

[5] 傅惠民. 仿真结果统计检验方法[J]. 机械强度, 2005, 27(5): 598-603.

FU Huimin. Statistical test method for simulation results[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(5): 598-603.

[6] 袁志发, 周静芊. 试验设计与分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

YUAN Zhifa, ZHOU Jingyu. Experimental design and analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.