

文章编号: 1000-8055(2006)06-0957-05

ϵN 曲线和 $P-\epsilon N$ 曲线整体推断方法

傅惠民, 刘成瑞

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100083)

摘 要: 由于应变疲劳试验数据在 $\lg \Delta \epsilon_e - \lg N$ (或 $\lg \Delta \epsilon_p - \lg N$) 坐标系中呈现散点形式, 并且疲劳寿命标准差随弹性分量和塑性分量减小而增大, 所以无法通过成组试验法和同方差回归分析测定 ϵN 曲线和 $P-\epsilon N$ 曲线, 目前采用的平均值法和 Wissching 方法均属于近似方法, 存在较大误差。为此, 本文采用异方差回归分析理论, 建立了一种测定 ϵN 曲线和 $P-\epsilon N$ 曲线的整体推断方法, 该方法能够将不同应变水平下的试验数据作为一个整体进行统计分析, 可以很好地处理散点数据和异方差数据。在 ϵN 曲线和 $P-\epsilon N$ 曲线测试中, 与传统方法相比, 既可节省大量试件, 又能有效地提高精度。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 小子样测试; 整体估计; 应变疲劳; 应变寿命曲线; 寿命估算

中图分类号: TB301; O211 文献标识码: A

Integral inference method for ϵN and $P-\epsilon N$ curves

FU Huimin, LIU Chengrui

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: As the strain fatigue data scatter in $\lg \Delta \epsilon_e - \lg N$ or $\lg \Delta \epsilon_p - \lg N$ coordinates, and their standard deviation increases with reducing of elasticity and plasticity components, ϵN and $P-\epsilon N$ curves cannot be obtained by group experiment method and homoscedasticity regression analysis method. The mean value method and Wissching method are commonly used in engineering. But they are both approximation methods with significant error. Therefore, an integral inference method for ϵN and $P-\epsilon N$ curves is presented based on the heteroscedasticity regression analysis theory. It can analyze scattered and heteroscedastic data through treating all the experiment data in different strain levels as an integration. Compared with traditional methods, the presented method can not only save specimens, but also increase precision in ϵN and $P-\epsilon N$ curve tests effectively.

Key words: aerospace propulsion system; small sample testing; integral estimate; strain fatigue; strain life curve; life estimation

ϵN 曲线和 $P-\epsilon N$ 曲线是飞机和航空发动机设计选材、服役寿命评估的基础, 也是材料研制的重要依据^[1-3]。但是, 在 ϵN 曲线和 $P-\epsilon N$ 曲线

测试中, 由于在某一恒定的总应变水平 $\Delta \epsilon$ 下测定一组试件的疲劳寿命时, 总应变 $\Delta \epsilon$ 虽然不变, 但是其弹性应变分量 $\Delta \epsilon_e$ 和塑性应变分量 $\Delta \epsilon_p$ 都

收稿日期: 2006-05-08; 修订日期: 2006-10-08

作者简介: 傅惠民(1956-), 男, 浙江遂昌人, 北京航空航天大学“长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究。

不能保持恒定,实际上它们均为随机变量,所以试验数据点在 $\lg \Delta \varepsilon - \lg N$ (或 $\lg \Delta \varepsilon_p - \lg N$) 坐标系中呈现散点形式,从而无法通过成组试验法测定 $\varepsilon - N$ 曲线和 $P - \varepsilon - N$ 曲线。目前采用的平均值法、同方差回归分析和 Wissching 方法均属于近似方法,存在较大误差,这直接影响到飞机和发动机的设计及寿命评估。因此,迫切需要解决材料 $\varepsilon - N$ 曲线和 $P - \varepsilon - N$ 曲线的高精度测试问题。

本文建立一种材料 $\varepsilon - N$ 曲线和 $P - \varepsilon - N$ 曲线整体推断方法,该方法可以把各种不同应变水平下的寿命试验数据作为一个整体进行统计分析,实现 $\varepsilon - N$ 曲线和 $P - \varepsilon - N$ 曲线的散点测试和小子样测试。整体推断方法在试件数一定的情况下,可以有效地提高测试精度;而在精度相同的条件下,则可以比传统方法节省大量的试件,具有显著的技术经济效益。

1 对数寿命均值和标准差变化规律

1.1 对数寿命均值线性表达式

根据 Manson Coffin 公式, $\varepsilon - N$ 曲线可表示为^[13]:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\alpha'}{E} (2N_f)^{b_1} + \varepsilon' (2N_f)^{b_2} \quad (1)$$

式(1)可以分解为下面两个公式:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\alpha'}{E} (2N_f)^{b_1} \quad (2)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon' (2N_f)^{b_2} \quad (3)$$

式中 $\Delta \varepsilon$ 、 $\Delta \varepsilon_e$ 和 $\Delta \varepsilon_p$ 分别为总应变范围、弹性应变范围和塑性应变范围,且:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p \quad (4)$$

$2N_f$ 为到破坏的反复数,即破坏寿命 N_f 的两倍; E 为弹性模量; α' 为疲劳强度系数, ε' 为疲劳延性系数, b_1 为疲劳强度指数, b_2 为疲劳延性指数, α' 、 ε' 、 b_1 、 b_2 均为待定参数。

对式(2)和式(3)取对数得:

$$\lg \left\{ \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} \right\} = \lg \left\{ \frac{\alpha'}{E} \right\} + b_1 \lg(2N_f) \quad (5)$$

$$\lg \left\{ \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \right\} = \lg(\varepsilon') + b_2 \lg(2N_f) \quad (6)$$

令:

$$\begin{aligned} y_e &= \lg(2N_f); & x_e &= \lg \left\{ \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} \right\}; \\ a_e &= -\frac{1}{b_1} \lg \left\{ \frac{\alpha'}{E} \right\}; & b_e &= \frac{1}{b_1} \\ y_p &= \lg(2N_f); & x_p &= \lg \left\{ \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \right\}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$a_p = -\frac{1}{b_2} \lg(\varepsilon'); \quad b_p = \frac{1}{b_2} \quad (8)$$

得:

$$y_e = a_e + b_e x_e \quad (9)$$

$$y_p = a_p + b_p x_p \quad (10)$$

由此可知,式(2)和式(3)在对数坐标系中均为直线,分别称为弹性线和塑性线。

1.2 对数寿命标准差的线性表达式

大量试验研究发现,随着弹性(或塑性)应变水平 $\Delta \varepsilon_e$ (或 $\Delta \varepsilon_p$) 的降低,材料对数疲劳寿命 $\lg(2N_f)$ 的分散性增大。从理论上也可以证明,当 $\varepsilon - N$ 曲线和 $P - \varepsilon - N$ 曲线均为直线时,对数疲劳寿命的标准差将随对数弹性应变水平的降低而线性增大。所以其标准差可表示为:

$$\sigma_e(x_e) = \sigma_{e0} [1 + \theta_e(x_e - x_{e0})] \quad (11)$$

式中 σ_{e0} 、 θ_e 均为待定参数, σ_{e0} 表示对数寿命 y_e 在对数应变 x_{e0} 处的标准差, θ_e 表示标准差变化的斜率。同样,对于 $\varepsilon_p - N$ 曲线和 $P - \varepsilon_p - N$ 曲线,有:

$$\sigma_p(x_p) = \sigma_{p0} [1 + \theta_p(x_p - x_{p0})] \quad (12)$$

式中 $\sigma_p(x_p)$ 为对数寿命 y_p 在对数应变 x_p 处的标准差。 σ_{p0} 、 θ_p 均为待定参数。

2 $\varepsilon - N$ 曲线异方差回归分析方法

2.1 通用方法

由于弹性线和塑性线具有相同的均值和标准差表达式,所以下面将统一讨论确定弹性线和塑性线的方法。

大量试验数据已证实,对数疲劳寿命遵循正态分布。因此,根据式(9)~式(12)可知,对数寿命 $y = \lg(2N_f)$ 和对数应变水平 $x = \lg(\Delta \varepsilon/2)$ (其中 $\Delta \varepsilon$ 可以是 $\Delta \varepsilon_e$ 或 $\Delta \varepsilon_p$) 之间存在如下关系:

$$y = a + bx + u \quad (13)$$

式中:

$$u \sim N \left[0, \sigma^2(x) \right] \quad (14)$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 [1 + \theta(x - x_0)] \quad (15)$$

其中 a 、 b 、 σ_0 和 θ 均为待定参数。由式(15)可知,对数寿命 y 的标准差 $\sigma(x)$ 随对数应变水平线性变化,已不是常数,所以不能采用传统的同方差回归分析,必须采用文献[4]给出的异方差回归分析。

对于一组相互独立的试验数据 $(\Delta \varepsilon, N_{fi})$, $i = 1, 2, \dots, n$, 首先可以通过式(7)或式(8)将其变换为 $\lg \Delta \varepsilon - \lg N$ 坐标系中的一组数据 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ 。然后再根据文献[4]中的异方差回归

分析方法求得参数 a , b , σ_0 和 θ 的估计量为:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \quad (16)$$

$$\hat{b} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \quad (17)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2}{I^2(x_i)}} \quad (18)$$

$$E(\theta) = 2 \frac{l_{xy}}{l_{xx}} l_{xy\theta} - \frac{l_{xx}^2}{l_{xx}} l_{xx\theta} - l_{yy\theta} - \frac{\nu^9}{(\nu+1)^{50}} \left[\frac{l_{xy}^2}{l_{xx}} - l_{yy} \right] I_0 = 0 \quad (19)$$

式中当 $\theta = 0$ 时, $\forall n-2$; 当 $\theta \neq 0$ 时, $\forall n-3$ 。并且:

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (20)$$

$$I(x) = 1 + \theta(x - x_0) \quad (21)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{I^2(x_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{I^2(x_i)}} \quad (22)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{I^2(x_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{I^2(x_i)}} \quad (23)$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{I^2(x_i)} \quad (24)$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \bar{y})^2}{I^2(x_i)} \quad (25)$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{I^2(x_i)} \quad (26)$$

$$l_{xx\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2 (x_i - x_0)}{I^3(x_i)} \quad (27)$$

$$l_{yy\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \bar{y})^2 (x_i - x_0)}{I^3(x_i)} \quad (28)$$

$$l_{xy\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})(x_i - x_0)}{I^3(x_i)} \quad (29)$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_0}{I(x_i)} \quad (30)$$

首先由式(19)求得 θ , 然后再由式(16)~式(18)得到 $\hat{a}$, $\hat{b}$ 和 σ_0 。式(19)需迭代求解, 由于 $E(\theta)$ 具有如下性质, 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的预估值, 则当 $\hat{\theta} < \theta$ 时, $E(\hat{\theta}) < 0$; 当 $\hat{\theta} > \theta$ 时, $E(\hat{\theta}) > 0$ 。又由于 θ 满足:

$$-1 \setminus (x_{\max} - x_0) < \theta \leq 0 \quad (31)$$

所以可以方便地用二分法求得 θ , 其中 $x_{\max}$ 是 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 中的最大者。

因此, ε -N 曲线方程由下式给出:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \quad (32)$$

标准差 $\sigma(x)$ 估计量为:

$$\sigma(x) = \sigma_0 [1 + \theta(x - x_0)] \quad (33)$$

线性相关系数为:

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}} \quad (34)$$

2.2 ε -N 曲线确定

对于弹性线, 有:

$$\hat{a}_e = \hat{a} \quad (35)$$

$$\hat{b}_e = \hat{b} \quad (36)$$

根据式(7)求得 α' , b_1 的估计值 α'_e , b_{1e} 为:

$$\alpha'_e = 10^{-\hat{a}_e \setminus \hat{b}_e} E \quad (37)$$

$$b_{1e} = 1 \setminus \hat{b}_e \quad (38)$$

即 ε -N 曲线公式为:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = 10^{-\hat{a}_e \setminus \hat{b}_e} (2N_f)^{1 \setminus \hat{b}_e} \quad (39)$$

2.3 ε_p -N 曲线确定

对于塑性线, 有:

$$\hat{a}_p = \hat{a} \quad (40)$$

$$\hat{b}_p = \hat{b} \quad (41)$$

根据式(8)求得 ε' , b_2 的估计值 ε'_p , b_{2p} 为:

$$\varepsilon'_p = 10^{-\hat{a}_p \setminus \hat{b}_p} \quad (42)$$

$$b_{2p} = 1 \setminus \hat{b}_p \quad (43)$$

即 ε_p -N 曲线公式为:

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = 10^{-\hat{a}_p \setminus \hat{b}_p} (2N_f)^{1 \setminus \hat{b}_p} \quad (44)$$

3 P - ε -N 曲线异方差回归分析

3.1 通用方法

下面进一步给出确定 P - ε -N 曲线和 P - ε_p -N 曲线的通用方法。根据文献[4]可知, 置信水平为 γ 、存活率(可靠度)为 R 的 P - ε -N 曲线由下式给出:

$$y_R = \hat{a} - c_0 \sigma_0 (1 - \theta x_0) u_R + (\hat{b} - c_0 \sigma_0 \theta u_R) x - \frac{u_R c_0 \sigma_0}{\sqrt{c_1 x^2 + c_2 x + c_3}} \quad (45)$$

式中 $y_R = \lg(2N_R)$, 其中 N_R 是存活率为 R 的疲劳寿命。

由于式(45)中的非线性项与线性项相比, 通常是一个小量, 因此可以通过泰勒展开得到 P - ε -N 曲线的线性公式:

$$y_R = a_R + b_R x \quad (46)$$

式中:

$$a_R = \hat{a} - c_0 \sigma_0 (1 - \theta x_0) u_R - \frac{u_R c_0 \sigma_0 (c_2 \bar{x} + 2c_3)}{2 \sqrt{c_1 \bar{x}^2 + c_2 \bar{x} + c_3}} \quad (47)$$

$$b_R = \bar{b} - c_0 \bar{\sigma}_0 u_R - \frac{u_Y c^0 \bar{\sigma}_0 (2c_1 \bar{x} + c_2)}{2 \sqrt{c_1 \bar{x}^2 + c_2 \bar{x} + c_3}} \quad (48)$$

$$c^0 = \frac{\sqrt{2V-1}}{\sqrt{2V-2}} \left[1 - \frac{u_Y^2}{w} \right]^{-1} \quad (49)$$

$$c_1 = \frac{\theta^2 u_R^2}{w} + \frac{1}{l_{x\,x}} \left[1 - \frac{u_Y^2}{w} \right] \quad (50)$$

$$c_2 = \frac{2\theta(1-\theta x_0)u_R^2}{w} - \frac{2\bar{x}}{l_{x\,x}} \left[1 - \frac{u_Y^2}{w} \right] \quad (51)$$

$$c_3 = \frac{(1-\theta x_0)^2 u_R^2}{w} +$$

$$\left\{ 1 \left[\sum_{i=1}^n I^{-2}(x_i) \right] + \frac{\bar{x}^2}{l_{x\,x}} \right\} \left[1 - \frac{u_Y^2}{w} \right] \quad (52)$$

$$w = 2 \left[v + u_Y - 0.64 - \frac{1}{\sqrt{v + u_Y - 0.64}} \right] \quad (53)$$

3.2 $P\text{-}\varepsilon_e\text{-}N$ 曲线确定

对于弹性线, 有:

$$a_{R\,e} = a_R \quad (54)$$

$$b_{R\,e} = b_R \quad (55)$$

由式(7)可知, $P\text{-}\varepsilon_e\text{-}N$ 曲线公式为:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = 10^{-\hat{a}_{R\,e}} \backslash b_{R\,e} (2N_f)^{1 \backslash b_{R\,e}} \quad (56)$$

3.3 $P\text{-}\varepsilon_p\text{-}N$ 曲线确定

对于塑性线, 有:

$$a_{R\,p} = a_R \quad (57)$$

$$b_{R\,p} = b_R \quad (58)$$

由式(8)可知, $P\text{-}\varepsilon_p\text{-}N$ 曲线公式为:

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = 10^{-\hat{a}_{R\,p}} \backslash b_{R\,p} (2N_f)^{1 \backslash b_{R\,p}} \quad (59)$$

4 当量试件数

由于本文方法是将一条 εN 曲线上的所有试验数据作为一个整体进行统计分析, 所以对某个应变水平下的中值寿命和安全寿命进行估计时, 不仅利用了该应变水平下的试验数据, 而且还利用了其他应变水平下试验数据提供的“横向信息”。若能进行成组试验, 则要得到同样的结果所需的试件数(当量试件数)由下式计算:

$$n_e(x_i) = \frac{\text{Var}(y)}{\text{Var}(\hat{y})} = \frac{I^2(x_i)}{1 \left[\sum_{j=1}^n I^{-2}(x_j) \right] + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{l_{x\,x}}} \quad (60)$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

5 应用举例

文献[5]对 42CrMoA 钢的疲劳性能进行研

究, 给出了 42CrMoA 钢的低周循环试验结果如表 1 所示。

表 1 42CrMoA 钢低循环疲劳试验数据

Table 1 Low cycle fatigue data of 42CrMoA steel				
序号 i	$\Delta \varepsilon_i/2$	$\Delta \varepsilon_e/2$	$\Delta \varepsilon_p/2$	$2N_f$
1	0.007 33	0.003 64	0.003 69	5 220
2	0.005 65	0.003 35	0.002 30	10 600
3	0.003 97	0.003 10	0.000 87	46 902
4	0.008 96	0.003 72	0.005 24	2 682
5	0.009 63	0.003 71	0.005 92	2 282
6	0.003 36	0.002 88	0.000 48	101 610
7	0.004 93	0.003 12	0.001 81	16 280
8	0.013 78	0.004 09	0.009 69	906
9	0.003 01	0.002 73	0.000 28	82 720
10	0.007 26	0.003 45	0.003 81	4 272
11	0.011 89	0.003 92	0.007 97	1 412

根据本文方法, 对表 1 中数据进行处理, 可得弹性线回归方程和塑性线回归方程:

$$y_e = -26.196 2 - 12.199 1 x_e \quad (61)$$

$$y_p = -0.103 4 - 1.542 4 x_p \quad (62)$$

弹性线和塑性线的标准差估计量分别为:

$$\sigma_e = 0.157 1 / [1 - 7.246 5 (x_e + 2.468 2)] \quad (63)$$

$$\sigma_p = 0.106 1 / [1 - 1.029 6 (x_p + 2.616 8)] \quad (64)$$

从而得到 $\varepsilon\text{-}N$ 曲线和 $\varepsilon_p\text{-}N$ 曲线公式:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = 0.007 122 (2N_f)^{-0.081 97} \quad (65)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = 0.857 0 (2N_f)^{-0.648 3} \quad (66)$$

根据 Manson Coffin 公式可知 εN 曲线公式为:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = 0.007 122 (2N_f)^{-0.081 97} + 0.857 0 (2N_f)^{-0.648 3} \quad (67)$$

进一步根据本文方法求得置信度 $\gamma = 95\%$ 、存活率 $R = 99.9\%$ 的安全寿命与弹性应变、塑性应变的关系分别为:

$$y_{R\,e} = -11.496 9 - 5.900 0 x_e \quad (68)$$

$$y_{R\,p} = 0.907 2 - 0.936 9 x_p \quad (69)$$

从而得到 $P\text{-}\varepsilon_e\text{-}N$ 曲线和 $P\text{-}\varepsilon_p\text{-}N$ 曲线公式:

$$\frac{\Delta \epsilon_f}{2} = 0.011\,26(2N_f)^{-0.169\,5} \tag{70}$$

$$\frac{\Delta \epsilon_p}{2} = 9.296\,1(2N_f)^{-1.067\,4} \tag{71}$$

6 结 论

(1) 本文方法能够将不同应变水平下的试验数据作为一个整体进行统计分析, 可以很好地处理应变疲劳试验的散点数据和异方差数据。

(2) 在 $\epsilon-N$ 曲线和 $P-\epsilon-N$ 曲线测试中, 与传统方法相比, 整体推断方法既可节省大量试件, 又能有效地提高分析精度。

(3) 对过去做的大量的 $\epsilon-N$ 曲线试验数据^[1-3], 如果按传统方法进行分析, 不再补充试验, 将得不到 $P-\epsilon-N$ 曲线, 而采用本文方法对这些数据进行处理, 则可以得到 $P-\epsilon-N$ 曲线, 从而能够为结构可靠性设计和寿命评估提供科学依据。

(4) 在 $\lg \Delta \epsilon - \lg N$ (或 $\lg \Delta \epsilon_p - \lg N$) 坐标系中, 若遇到成组试验数据, 则其线性相关系数需按文献[6]中式(30)计算。

参考文献:

[1] 谢济洲主编. 低循环疲劳手册[M]. 北京: 北京航空材料研究所, 1991.

[2] 北京航空材料研究所主编. 航空发动机设计用材料数据手册[M]. 北京: 中国航空发动机总公司, 1989.

[3] 北京航空材料研究所主编. 材料数据手册[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.

[4] 傅惠民. 线性异方差回归分析[J]. 航空学报, 1994, 15(3): 295-302.
Fu Huimin. Linear variance regression analysis[J]. ACTA Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(3): 295-302.

[5] 谭兵, 蔡力勋, 罗海丰. 两种质量状态下 42CrMoA 材料疲劳特性研究[J]. 四川建筑科学研究, 1993, 19(3): 56-60.
Tan Bing, Cai Lixun, Luo Haifeng. Effect of punctate conglomeration on uniaxial fatigue behavior of 42CrMoA [J]. Building Science Research of Sichuan, 1993, 19(3): 56-60.

[6] 傅惠民, 刘成瑞. $S-N$ 曲线和 $P-S-N$ 曲线小子样测试方法[J]. 机械强度, 2006, 28(4): 295-302.
Fu Huimin, Liu Chengrui. Small sample testing method for $S-N$ and $P-S-N$ Curves[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(4): 295-302.