

文章编号: 1000-8055(2007)05-0755-06

一种考虑平均应力松弛的多级硬化本构模型

石多奇, 杨晓光, 王延荣

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘 要: 在无屈服条件的粘塑性本构理论框架内, 提出了关于内变量和内应力以及材料具有不同硬化趋势的假设, 并在 Bodner-Partom 模型的基础上, 发展了新的内变量演化模型, 即双级硬化模型 (Two Stages Hardening, TSH 模型) 和多级硬化模型 (Multi-Stages Hardening, MSH 模型), 提高了 Bodner-Partom 模型对同时模拟应变率相关单调拉伸和循环特性的精度, 特别是增强了对 Ratcheting 的模拟能力, 使得无屈服条件的本构方程以较高精度模拟 Ratcheting 成为可能. 并将 TSH 模型和 MSH 模型用于 Udimet720Li 材料高温非弹性变形特征的描述, TSH 模型改善了 B-P 模型在模拟单调拉伸和循环硬化方面的精度, 但 MSH 模型在描述非对称循环载荷下平均应力松弛和 Ratcheting 应变方面具有更强的能力.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 本构方程; 粘塑性; 内变量; 硬化; 循环棘轮

中图分类号: TB125; V231. 95

文献标识码: A

A multi-stage hardening constitutive model considering mean stress relaxation

SHI Duo-qi, YANG Xiao-guang, WANG Yan-rong

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: In the framework of visco-plastic constitutive theory without yield condition, some assumptions dealing with internal variables, internal stress and different potential hardening of material were used to develop new evolutionary equation of internal variables. Based on the Bodner-Partom model, a two-stage hardening (TSH) model and a multi-stage hardening (MSH) model were established to improve the accuracy of modeling strain rate-dependent tension and cyclic visco-plasticity, especially for ratcheting. The TSH model improves the precision of modeling monotonic tension and cyclic hardening, while the MSH model has more capability of modeling cyclic mean stress relaxation and ratcheting under asymmetric loading condition.

Key words: aerospace propulsion system; constitutive theory; visco-plasticity; internal variable; hardening; ratcheting

航空发动机的热端部件在工作时经历着非常复杂温度和机械载荷联合作用, 对其材料在复杂

载荷下力学行为的准确建模, 对于此类结构的强度和寿命设计及分析是非常重要的. 目前在材料

收稿日期: 2006-04-11; 修订日期: 2006-06-19

基金项目: 国家自然科学基金(50571004); “凡舟”青年科研基金(20060404); 中国博士后科学基金(2005037300)

作者简介: 石多奇(1975-), 男, 内蒙古临河人, 讲师, 博士, 主要从事高温结构强度, 材料本构关系, 疲劳与断裂方面的研究.

的高温力学行为模拟研究中,一些基于微观过程的、唯象的内变量粘塑性本构理论^[1-3]得到了广泛应用.虽然内变量在真实实验中不可测量,但由于采用内变量法建立粘塑性本构模型所具有的优势(可给出微观物理解释、便于有限元计算等),这一类本构模型得到了很大发展.主要可以分为两种:一种是带屈服条件的本构模型,以 Chaboche 模型^[4-6]为代表(Walker 模型是其特例^[6]);另一种是没有屈服条件和屈服函数的模型,以 Bodner-Partom(B-P)模型^[7-10]和 Miller 模型^[11]为代表.在上世纪最后的30年间,关于材料循环粘塑性本构模拟虽然获得了很大进展,但是循环棘轮(Ratcheting)现象的本构模型仍未完全解决.国内外的学者在这方面作出了大量的研究,理论方面主要是在 Chaboche 模型的基础上针对硬化内变量的演化形式进行,在无屈服条件的粘塑性理论框架内的研究却很少.但屈服条件的存在可能不好协调对单轴和多轴 Ratcheting 模拟精度之间存在的矛盾^[12].要准确评估结构的变形,仍需要发展更好的本构方程.

研究发现^[10,13-15],Bodner-Partom 统一粘塑性理论仅用于模拟单调拉伸加载时能够给出非常满意的结果,但是如果还要描述循环硬化或循环软化时,面临的主要问题是:1)对应力应变曲线的描述有“过方”的特征^[15-17];2)循环硬化的初始几个循环计算得到偏高的应力范围,而在随后的循环过程中,很快就达到硬化饱和,这并不完全符合实验事实(文献[15]中图2).所以,改善本构模型对1)和2)的模拟精度,并使之能够描述 Ratcheting 现象,对于高温结构疲劳寿命分析具有重要的现实意义.

因此,需要发展具有复杂结构、而又便于计算机实现的粘塑性本构方程.本文在这方面进行了探索.在 Bodner-Partom 粘塑性统一本构理论的基础上,提出了材料具有不同硬化趋势的假设,并考虑硬化与动态恢复的非线性特征,发展了新的与屈服条件无关的硬化准则.通过对 Udimet 720Li 材料循环粘塑性的模拟,对所建立的硬化准则进行了验证.计算表明,多级硬化模型具有更加强大的描述材料变形的能力,特别是加强了在非对称循环加载下平均应力松弛和循环棘轮现象的本构描述.

1 材料不同硬化趋势的假设

对于一维的 B-P 模型来说,内变量 Z 可以表

示成应力的函数^[8-9]

$$Z = \sigma \cdot f = \sigma \cdot (S)^{1/2n} \quad (1)$$

其中 $S = 2\ln\left[\frac{2D_0}{\sqrt{3}\dot{\epsilon}^n}\right]$ 是非弹性应变的函数.反之,

也可以将应力表示成内变量 Z 的函数

$$\sigma = Z(S)^{-1/2n} \quad (2)$$

将方程(2)推广到三维应力状态,用一个具有更广泛意义的函数 G

$$\sigma_{ij} = G[Z(W^p), \epsilon_{ij}^n] \quad (3)$$

来表示应力是内变量和非弹性应变的函数,这一点与本构一般性原理中的决定论原理相一致,即一点的应力状态仅取决于其变形历史.在 Bodner-Partom 粘塑性理论中,只用一个各向同性硬化标量 Z^I 和一个运动硬化标量 Z^D 来表达材料加载过程中发生的非弹性功硬化,其中运动硬化标量实际是各向异性张量 β_{ij} 的度量.本文仍然假设 Z 是由两个表示不同硬化特征的标量组成,即 $Z = Z^I + Z^D$.

关于材料物理和原子位错机理的研究表明:当金属中产生非弹性变形时,就会诱发不同的内应力作用在位错上^[18-20].这就要求粘塑性本构模型中必须包含能够表示这种作用机制的内变量.方程(3)的意义在于,可以将 Bodner-Partom 模型中的内变量 Z 看作与这种内应力相伴的内变量(具有应力的量纲).因此提出:

假设(1):金属材料在加载过程中,其内部存在短程、中程和长程三种不同的硬化趋势,而不管其是否与应力(或其偏量)张量的方向有关,即这些硬化趋势同时存在于各向同性硬化和运动硬化中.

假设(2):方程(3)中与硬化相关的内变量 Z (即 $Z^I + Z^D$) 是由不同部分所组成的,分别为长程内变量、中程内变量和短程内变量,它们分别对应材料硬化过程中的长程内应力、中程内应力和短程内应力.

上述假设的一个重要推论就是,可以将应力张量依照方程(3)而划分为各向同性应力张量和各向异性应力张量两部分,每部分对应着各自的内变量.本文研究不同内变量进行组合的可能性,并通过对 Udimet 720Li 合金高温变形特性本构建模的研究,来验证其合理性.

2 双级硬化模型及其模拟结果

可以认为表示各向同性硬化的内变量 Z^I 是由遵循方程(3)的长程内应力和短程内应力两部

分组成的,而运动硬化内变量 Z^D 仍然只与一种内应力相伴,即

$$Z^I = Z_L^I + Z_S^I \tag{4}$$

其中长程内变量 Z_L^I 描述加载过程中,材料所具有的缓慢变化的硬化特性,而短程内变量 Z_S^I 描述加载过程中迅速变化的硬化特性,图 1 很好地说明了这种物理含义.在单调拉伸加载时,短程

$$\begin{cases} \dot{Z}_L^I = m_{1L} [Z_{1L} - Z_L^I(t)] \dot{W}^P(t) - A Z_{1L} \left| \frac{Z_L^I(t) - Z_{2L}}{Z_{1L}} \right|^r \\ \dot{Z}_S^I = m_{1S} [Z_{1S} - Z_S^I(t)] \dot{W}^P(t) - A Z_{1S} \left| \frac{Z_S^I(t) - Z_{2S}}{Z_{1S}} \right|^r \end{cases} \tag{5}$$

初始条件为: $Z_L^I(0) = Z_{0L}$ 和 $Z_S^I(0) = Z_{0S}$.

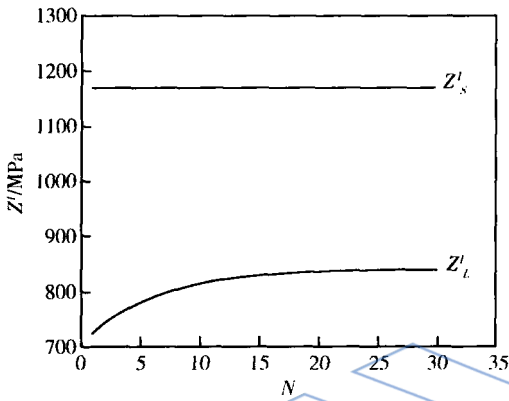


图 1 循环加载过程中各向同性硬化内变量的演化
Fig. 1 Evolution of isotropic internal state variable during cyclic loading

在 TSH 模型(双级硬化)中共有 15 个材料参数,它们是 $D_0, E, n, Z_{0L}, Z_{0S}, Z_{1L}, Z_{1S}, m_{1L}, m_{1S}, Z_3, m_2, Z_{2L}, Z_{2S}, A, r$. 采用文献[13]的参数识别方法,可得 Udimet 720Li 的材料 TSH 本构参数.对 650 °C 单调拉伸和循环硬化的模拟结果如图 2 和图 3 所示.

从模拟结果可以看出,采用双级硬化模型改善了 B-P 模型的模拟能力,克服了 B-P 模型在弹塑性屈服区域加载时产生尖锐变化的缺点,并能够更好的描述循环硬化的变化情况,这主要是由于 TSH 模型考虑了两种各向同性硬化趋势.

3 多级硬化模型

3.1 内变量演化方程

根据假设 1 和假设 2,可以认为与长程内应力、中程内应力和短程内应力相伴的内变量,不仅影响各向同性硬化,也影响运动硬化,即

$$Z^I = \sum_k^3 Z_k^I; Z^D = \sum_k^3 \beta_{ij}^{(k)} u_{ij} \tag{6}$$

的各向同性硬化内变量迅速达到了饱和,而长程内变量在随后的循环加载中是缓慢演化的.这描述了材料在加载时所发生的两种不同趋势的各向同性硬化,这就是双级硬化(Two-Stages Hardening, TSH)的含义.

比例加载时, Z_L^I 和 Z_S^I 都服从相同形式的演化法则

其中运动硬化内变量 Z^D (标量)表示了方向性硬化的变量 $\beta^{(k)}$ (张量)对硬化产生的综合贡献.称 (6) 为多级硬化模型 (Multi-Stages Hardening model, MSH).

双级硬化模型仍然遵循了运动硬化的硬化项与动态恢复之间同时保持线性变化的关系.无论是采用累积塑性应变还是非弹性功作为硬化的度

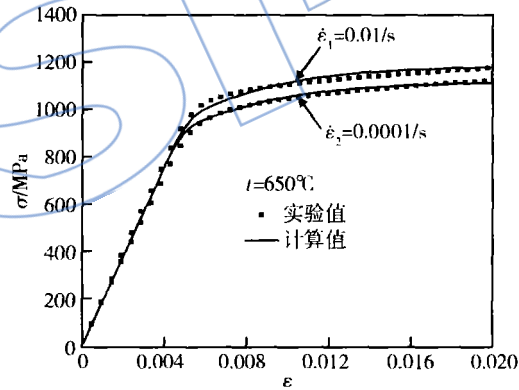


图 2 TSH 模型对单调拉伸应力应变曲线的模拟
Fig. 2 Simulation for monotonic tensile stress-strain by TSH model

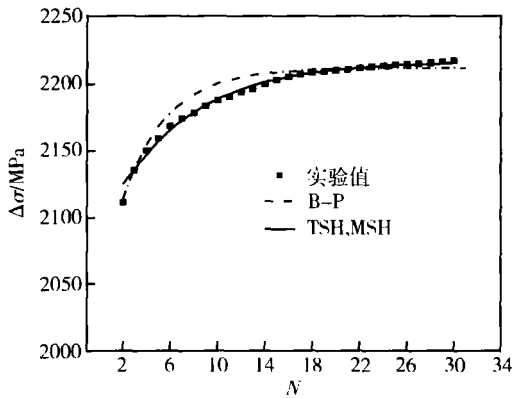


图 3 循环硬化 $\Delta\sigma-N$ 曲线的模拟
Fig. 3 Simulation of cyclic hardening $\Delta\sigma-N$

量,这样的硬化法则都不能模拟迟滞环演化过程中所发生的非线性特征,如平均应力的循环松弛和 Ratcheting 应变这样的现象.已有的研究表明:非对称循环下,平均应力的循环松弛和平均应变循环蠕变(Ratcheting)现象,即使在循环硬化已经稳定的金属材料中,当继续循环加载时仍旧会出现.这说明它们是由材料中运动硬化所具有的非线性引起的,与描述各向同性硬化的内变量没有关系^[12].因此,粘塑性本构模型的改进主要针对与运动硬化有关的内变量演化法则进行,需要在演化方程的硬化项与动态恢复项之间引入非线性因素.一般的做法是在动态恢复项中增加某种表示硬化程度(由内变量的渐进值描述)非线性的表达式.由于平均应力的循环松弛和平均应变循环蠕变(Ratcheting)都是非弹性变形的循环累积造成的,它们有相同的物理本质,所以针对其中任何一种现象所进行的本构改进,都是可以的.

在此基础上,可以认为,硬化的恢复效应与硬化效应之间是不成比例变化的,动态恢复与硬化的关系是非线性的.

由于运动硬化 Z^D (标量)是方向性硬化张量 $\beta_{ij}^{(k)}$ 与表示应力方向的张量 u_{ij} 之内积,所以运动硬化所具有的非线性是由张量 $\beta_{ij}^{(k)}$ 中动态恢复的非线性来体现的.所以,本文在方向性硬化张量 $\beta_{ij}^{(k)}$ 的演化方程中引入其各分量几何平方根与渐进值之间的幂指数关系,将 B-P 模型中张量 $\beta_{ij}^{(k)}$ 的演化方程改写成:

$$\dot{\beta}_{ij}^{(k)} = m_k \left[D_k u_{ij} - \left| \frac{J(\beta^{(k)})}{D_k} \right|^{f_k} \beta_{ij}^{(k)} \right] \dot{W}^P - AD_k \left| \frac{J(\beta^{(k)})}{D_k} \right|^r v_{ij}^{(k)}, k = 1, 2, 3 \quad (7)$$

其中 $J(\beta^{(k)}) = (\beta_{lm}^{(k)} \beta_{lm}^{(k)})^{1/2}$; $u_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{kl} \sigma_{kl})^{1/2}}$ 和 $v_{ij}^{(k)} = \frac{\beta_{ij}^{(k)}}{J(\beta^{(k)})}$ 为方向张量.初始时刻 $\beta_{ij}^{(k)}(0) = 0$. 参数 f_k 是对动态恢复非线性变化敏感性的度量.

各向同性硬化的内变量基本保持原来的演化形式:

$$\dot{Z}_k^I = l_k [H_k - Z_k^I(t)] \dot{W}^P - AH_k \left| \frac{Z_k^I(t) - C_k}{H_k} \right|^r, k = 1, 2 \quad (8)$$

而仅在第3个各向同性内变量的动态恢复项中引入非线性就可以表示各向同性硬化演化的非线性特征:

$$\dot{Z}_3^I = l_3 \left[H_3 - \left| \frac{Z_3^I}{H_3} \right|^{f_4} Z_3^I \right] \dot{W}^P - A \cdot H_3 \left| \frac{Z_3^I}{H_3} \right|^r \quad (9)$$

初始时刻 $Z_k^I(0) = H_{0k}$, H_{0k} ($k = 1, 2, 3$) 是与温度有关的材料参数.

方程(6)~(9)构成了 MSH(多级硬化)模型,其中包含27个与温度有关的材料参数:

$$E, n, D_0, \{H_k, l_k, C_k, H_{0k}, m_k, D_k, f_k, (k = 1, 2, 3)\} f_4, A, r.$$

其中, $H_k, l_k, C_k, H_{0k}, D_k, m_k$ 具有与 B-P 模型中的参数 $Z_1, m_1, Z_2, Z_0, Z_3, m_2$ 相似的物理含义.为简单起见,可以令 $C_k = H_{0k}$.这些参数可以通过材料的单轴拉伸试验、控制应变的对称循环试验、蠕变试验和控制应变的非对称循环试验,结合一定的优化算法(如 Levenberg-Marquadt 方法、遗传算法和模拟退火算法等)得到.

需要说明的是,方程(7)这样的运动硬化法则,与应力或应变空间中的屈服曲面、加载/卸载准则并无关联.类似的演化形式在 OHNO/WANG 修正的 Chaboche 模型中成立的假设前提是:背应力空间中存在与动态恢复的临界态有关的临界曲面,当背应力演化到接近该曲面时,其动态恢复项在某种程度上具有非线性变化的特征^[21].但是,一般来说,背应力的概念并不能脱离屈服面而单独存在.因此,对于没有屈服条件的本构理论来说,这种硬化法则只能通过其对复杂变形特征的数值模拟能力来验证.

3.2 结果与分析

多级硬化模型合理性的验证,是通过对镍基高温合金 Udimet 720Li 高温非弹性变形特征的本构模拟来完成的.在无屈服条件下构建的 MSH 模型,能够在准确模拟率相关的单调拉伸、对称循环下的循环硬化和蠕变的前提下,具有预测平均应力松弛和 Ratcheting 现象的能力.

MSH 模型对循环硬化的描述能力与 TSH 模拟相当(图3),因为对于具有拉-压对称性的材料,在对称循环中主要是发生各向同性硬化,所以对控制应变的对称循环加载中应力范围演化的模拟,MSH 和 TSH 模型的差别并不明显.但是对应变率相关的单调拉伸应力应变关系的描述,相较 TSH 模型有了进一步的改善,由于考虑了材料可能的不同硬化趋势,对于发生在较大非弹性变形时的硬化的描述更加准确,所以图4和图2相比,对应力应变曲线的后半段的模拟更接近试验曲线.

图5示出了在控制应变的非对称循环载荷条件下,由 B-P 模型、TSH 模型和 MSH 模型给出的前两个加载-卸载过程中内变量 Z 随时间的变

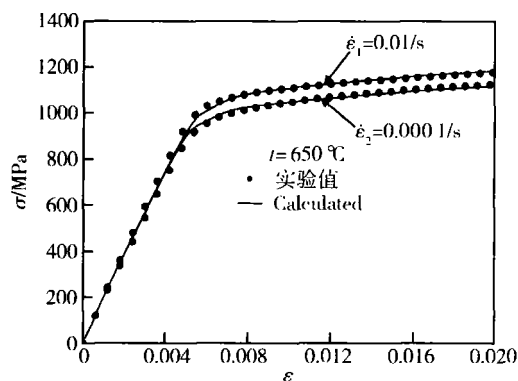


图 4 MSH 模型对率相关单调拉伸曲线的模拟

Fig. 4 Simulation of rate-dependent monotonic tension by MSH model

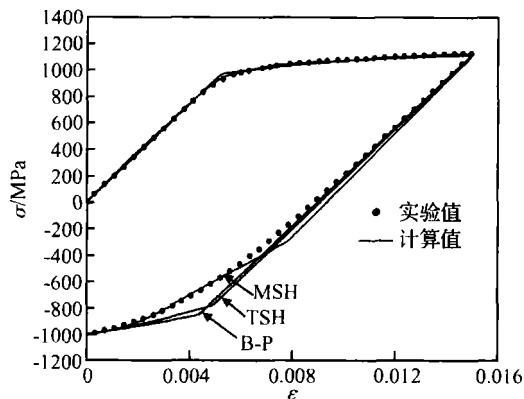


图 6 第一次加载-卸载应力应变曲线模拟结果

Fig. 6 Simulation of stress-strain curve during first loading-unloading

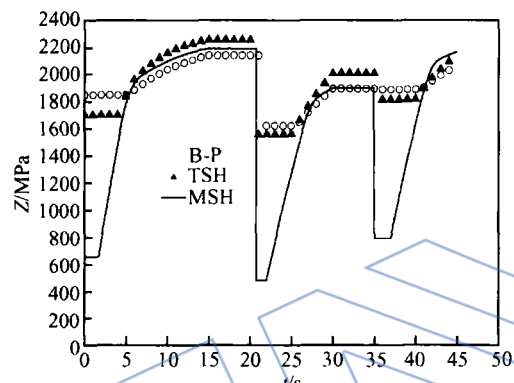


图 5 前两个循环加载-卸载过程中 Z 的演化

Fig. 5 Evolution of Z during first two cyclic loading-unloading

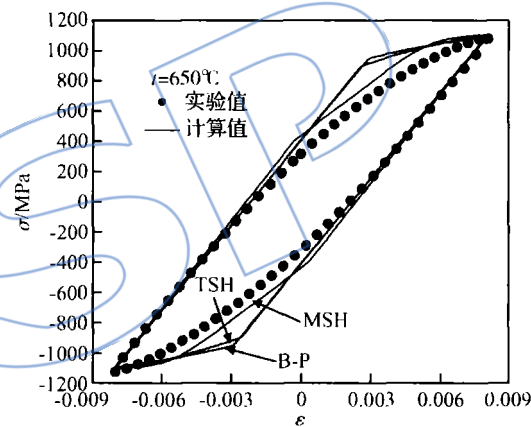


图 7 循环硬化稳定时迟滞环的预测结果

Fig. 7 Predicted hysteresis loop of stable cyclic hardening

化,MSH 模型和前二者的结果有很大不同,这种差别主要是由内变量 z^D 的分解(方程 6)和张量 β 演化方程的变化引起. MSH 模型对 Bauschinger 效应的模拟,与 B-P 模型和 TSH 模型相比得到了较大改善,如图 6 ($650\text{ }^{\circ}\text{C}$, $R_{\varepsilon} = 0$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}/\text{s}$, $\varepsilon_{\max} = 1.5\%$)和图 7 ($650\text{ }^{\circ}\text{C}$, $R_{\varepsilon} = -1$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}/\text{s}$, $\varepsilon_{\max} = 0.8\%$)所示. 同时,由于运动硬化内变量在循环过程中具有松弛的特点,使得 MSH 模型能够模拟平均应力的循环松弛,如图 8 所示,这说明 MSH 具有模拟 Ratcheting 的能力.

以上的研究表明,MSH 模型在 B-P 模型和 TSH 模型的基础上,改善了对于不同应变率的单调拉伸、迟滞应力应变迴线和循环硬化曲线的模拟效果,并且能够很好地描述平均应力松弛现象和控制应力时应变的循环累积. 对材料单轴循环非弹性变形等特征的模拟结果验证了本文关于内变量和内应力的假设.

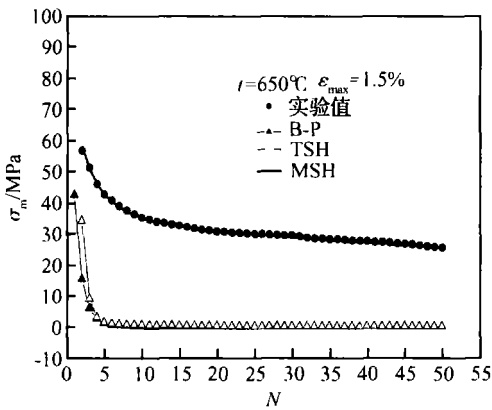


图 8 平均应力循环松弛曲线模拟结果

Fig. 8 Simulation of mean stress cyclic relaxation

4 结 论

针对 Bodner-Partom 本构理论(B-P 模型)在

模拟应变率相关的单调拉伸和循环迟滞环时,存在精度不够且不能描述平均应力循环松弛(或循环棘轮)的缺陷,提出了关于内变量和内应力以及材料具有不同硬化趋势的假设,建立了材料双级硬化和多级硬化法则(TSH模型和MSH模型).通过对Udimet720Li材料高温非弹性变形特征的本构描述,发现TSH模型改善了B-P模型在模拟单调拉伸和循环硬化方面的精度,而MSH模型具有更强的描述高温非对称循环载荷下平均应力松弛和循环棘轮行为的能力.

参考文献:

- [1] 张克实, Wolfgang B. Chaboche 热粘塑性损伤模型的应用研究[J]. 航空动力学报, 2002, 17(5): 615-622.
ZHANG Keshi, Wolfgang B. Application of Chaboche thermal viscoplastic model [J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(5): 615-622.
- [2] 施惠基, 刘国, 王凡, 等. 应变控制的热机械疲劳行为的数值模拟[J]. 固体力学学报, 2003, 24(3): 258-266.
SHI Huiji, LIU Guo, WANG Fan, et al. Numerical simulation of thermomechanical fatigue behavior under strain controlled condition [J]. ACTA Mechanica Solida Sinica, 2003, 24(3): 258-266.
- [3] 石多奇, 杨晓光, 王延荣. Udimet720Li 高温变形特性的 Chaboche 型本构建模研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(8): 727-731.
SHI Duoqi, YANG Xiaoguang, WANG Yanrong. Viscoplastic constitutive modeling of inelastic deformation of Udimet 720Li at high temperature [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(8): 727-731.
- [4] Chaboche J L. Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behavior of metals[J]. Bull. De L'Acad. Polonaise des Sci., 1977, 25: 33-42.
- [5] Chaboche J L, Dang-Van K, Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel [A]. Proceedings of the 5th International Conference on SmiRT[C]. Div. L, Berlin, Germany, 1979.
- [6] Chaboche J L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity [J]. Int. J. Plasticity, 1989, 5: 247-302.
- [7] Bodner S R, Partom Y. A large deformation elastic-viscoplastic analysis of a thick-walled spherical shell [J]. ASME J. Appl. Mech, 1972, 39: 751-757.
- [8] Bodner S R, Partom Y. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain hardening materials [J]. ASME J. Appl. Mech, 1975, 42(1): 385-389.
- [9] Stouffer D C, Bodner S R. A constitutive model for the deformation induced anisotropic plastic flow of metals [J]. Int. J. Engng. Sci., 1979, 17: 757-764.
- [10] Rowley M A, Thornton E A. Constitutive modeling of the visco-plastic response of Hastelloy-X and aluminum alloy 8009 [J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1996, 118: 19-27.
- [11] Miller A. An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation: part I and II [J]. ASME J. Eng. Mater. and Tech., 1978, 98: 97-105 (I), 106-113 (II).
- [12] Bari S, Hassan T. Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation [J]. Int. J. Plasticity, 2000, 16: 381-409.
- [13] 石多奇, 杨晓光, 王延荣, 等. Udimet 720Li 材料 B-P 型粘塑性本构建模研究 [J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(7): 627-630.
SHI Duoqi, YANG Xiaoguang, WANG Yanrong, et al. B-P viscoplastic constitutive modeling of Udimet 720Li [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(7): 627-630.
- [14] SHI Duoqi, YANG Xiaoguang, WANG Yanrong. Constitutive modeling of hardening and creep response of a nickel-based super-alloy Udimet 720Li [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2003, 16(3): 187-192.
- [15] SHI Duoqi, YANG Xiaoguang, WANG Yanrong. Improvement on the modeling of rate-dependent plasticity and cyclic hardening by Bodner-Partom model [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2005, 18(1): 83-89.
- [16] Eftis J. Comparisons between the modified chaboche and bodner-partom viscoplastic constitutive theories at high temperature [J]. International Journal of Plasticity, 1989, 5: 1-27.
- [17] 宋迎东, 高德平. 评述 B-P 统一弹-粘塑性本构模型 [J]. 南京航空航天大学学报, 1997, 29(5): 593-599.
SONG Yingdong, GAO Deping. A review of B-P unified elastic viscoplastic constitutive model [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 1997, 29(5): 593-599.
- [18] Mendelson A. Plasticity: theory and application [M]. Florida, Malabar: Robert E. Krieger Publishing Company, 1983.
- [19] FRANCOS D, PINEAU A, ZAOU I. Mechanical behaviour of materials, volume I: Elasticity and plasticity [M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [20] FUNG Y C, TONG P. Classical and computational solid mechanics [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2001.
- [21] OHNO N, WANG J D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I: formulation and basic features for ratcheting behavior [J]. Int. J. Plasticity, 1993, 9: 375-390.