

文章编号: 1000-8055(2007)04-0614-05

非线性颤振极限环稳定性判别的复数正规形法

陈衍茂, 刘济科

(中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要: 研究了一类含立方非线性二元机翼颤振系统的分岔现象. 应用 Hopf 分岔定理验证了系统在颤振临界点必发生 Hopf 分岔. 利用中心流形定理将系统降维, 然后应用 Hopf 分岔的复数正规形法判定了极限环的稳定性, 所得结果与数值解吻合.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 非线性颤振; Hopf 分岔; 中心流形; 复数正规形

中图分类号: V211. 1

文献标识码: A

Application of complex normal form method for stability judgement of limit cycle of nonlinear flutter

CHEN Yan-mao, LIU Ji-ke

(Department of Applied Mechanics and Engineering,
Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The bifurcations of the flutter system of a 2D airfoil with cubic nonlinearity were investigated in this paper. Hopf bifurcation theory was applied to verify Hopf bifurcation at the critical point of flutter. The high-dimensional system was transformed into a lower-dimensional one by center manifold theorem. And, the complex normal form method of Hopf bifurcation was used to analyze the stability of the limit cycle, with the results consistent with numerical solutions.

Key words: aerospace propulsion system; nonlinear flutter; Hopf bifurcation; center manifold; complex normal form

颤振是一种典型的自激振动, 随着风速的变化非线性颤振系统可能发生复杂的分叉现象, 其中最为常见的是 Hopf 分叉^[1]. Liu, Zhao, Yang 研究了二元机翼非线性颤振的 Hopf 分叉、极限环和混沌运动现象^[2,3]. Shahrzad 和 Mahzoon 应用等效线性化法分别研究了二元机翼定常线性流、定常非线性流和非定常流等三种非线性颤振系统, 并应用中心流形定理和正规型方法分析了系统的分岔^[4]. Price 等研究了含双线性和立方非线性二元机翼的颤振模型^[5]. Liu 和 Dowell 应用

高阶谐波平衡法分析了二元机翼颤振的重 Hopf 分岔^[6]. 蔡铭等利用增量谐波平衡法分别研究了含单个非线性和多个非线性的二元机翼颤振^[7,8]. Liu 等分别利用后继函数法和形式级数法来判别二元机翼颤振分叉点的类型和稳定性^[9]. 丁千, 王冬立利用规范形直接法研究了立方非线性机翼颤振的分叉^[10].

本文给出了非线性颤振的分叉点与其对应线性系统的临界颤振点的关系, 通过分析分叉点附近的线性化矩阵特征值来讨论发生 Hopf 分叉的

收稿日期: 2006-03-16; 修订日期: 2007-01-19

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金(20050558032)、高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划(2001)、广东省自然科学基金(05003295)资助项目

作者简介: 陈衍茂(1982-), 男, 江西赣州兴国人, 中山大学应用力学与工程系博士生, 研究方向: 机翼强非线性颤振.

可能性.应用中心流形定理将颤振系统降为二维系统,根据 Hopf 分叉的复数正规形法^[11]将该二维系统化为极坐标形式的正规形,可以很直观地判别极限环的稳定性.

1 颤振临界点的分叉

二元机翼的线性颤振方程可写成^[1]

$$\begin{cases} \ddot{\mu}h + \mu_{\alpha}\ddot{\alpha} + \mu(\frac{\omega}{\omega_h})^2 h = -2Q\alpha \\ \mu_{\alpha}h + \mu_{\alpha}\ddot{\alpha} + \mu_{\alpha}\ddot{\alpha} = (1+2\alpha)Q\alpha \end{cases} \quad (1)$$

其中 Q 是广义风速,上标“ $\cdot$ ”表示对时间的导数,下同.其它参数的物理意义见文献[2,3].在方程(1)中加入阻尼项和非线性项,为方便表述,将式(1)该写为

$$\begin{cases} \ddot{h} + k_{11}\dot{h} + k_{12}(Q)\alpha + \mu_{\alpha}\dot{h} + \mu_{\alpha}\ddot{\alpha} + f_1(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}) = 0 \\ \ddot{\alpha} + k_{21}h + k_{22}(Q)\alpha + \mu_{\alpha}\dot{h} + \mu_{\alpha}\ddot{\alpha} + f_2(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中各参数均采用文献[9]中的数据,即:

$$\begin{aligned} f_1 &= -80/7\alpha^2, f_2 = 320/7\alpha^2, k_{11} = 1.6/7, \\ k_{12}(Q) &= (-4k + 0.96Q)/7, k_{21} = -0.8/7, \\ k_{22}(Q) &= (16k - 1.04Q)/7, \mu_{\alpha} = 1.6/7, \\ \mu_{\alpha} &= -0.8/7, \mu_{\alpha} = -1.6/7, \mu_{\alpha} = 1.6/7, \\ k &= 0.5 \text{ 或 } 0.0816. \end{aligned}$$

通过方程(2)的线性化矩阵来判别系统在颤振临界点处是否发生分岔.方程(2)的退化方程(即不考虑非线性项)为:

$$\begin{cases} \ddot{h} + k_{11}\dot{h} + k_{12}(Q)\alpha + \mu_{\alpha}\dot{h} + \mu_{\alpha}\ddot{\alpha} = 0 \\ \ddot{\alpha} + k_{21}h + k_{22}(Q)\alpha + \mu_{\alpha}\dot{h} + \mu_{\alpha}\ddot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

对于颤振临界情况,机翼作简谐振动,即:

$$h = He^{i\omega t}, \alpha = Ae^{i\omega t} \quad (4)$$

其中 H, A 分别是平移和俯仰自由度极限环颤振振幅, ω 是颤振频率.将式(4)代入式(3),可得颤振临界点(记为 Q_0)满足的方程为:

$$\Gamma_1(Q_0) + \Gamma_0(Q_0)\Gamma_3(Q_0) = \Gamma_1(Q_0)\Gamma_2(Q_0)\Gamma_3(Q_0) \quad (5)$$

其中, $\Gamma_0 = k_{11}k_{22}(Q) - k_{12}(Q)k_{21}$, $\Gamma_1 = \mu_{\alpha}k_{22}(Q) + \mu_{\alpha}k_{11} - \mu_{\alpha}k_{21} - \mu_{\alpha}k_{12}(Q)$, $\Gamma_2 = k_{11} + k_{22}(Q) + \mu_{\alpha}\mu_{\alpha} - \mu_{\alpha}\mu_{\alpha}$, $\Gamma_3 = \mu_{\alpha} + \mu_{\alpha}$.且:

$$\omega^2 = \Gamma_1(Q_0)/\Gamma_3(Q_0) \quad (6)$$

方程(5)关于 Q_0 大于 0 的实根就是线性系统(3)的颤振临界点.

令 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \Rightarrow (h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha})^T$, 将方

程(2)化为一阶微分方程:

$$\dot{x} = K(Q)x + F(x) \quad (7)$$

其中

$$K(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{11} & -\mu_{\alpha} & -k_{12}(Q) & -\mu_{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{21} & -\mu_{\alpha} & -k_{22}(Q) & -\mu_{\alpha} \end{bmatrix},$$

$$F(x) = -\{0, f_1, 0, f_2\}^T$$

系统(7)的平衡点是 $x = 0$, 对应的线性化矩阵 $K(Q)$ 的特征方程为:

$$|K(Q) - \lambda E| = \lambda^4 + \Gamma_3\lambda^3 + \Gamma_2\lambda^2 + \Gamma_1\lambda + \Gamma_0 \quad (8)$$

根据多项式定理,方程(8)可以写成 $(\lambda^2 + p\lambda + q)(\lambda^2 + a\lambda + b)$, 其中 p, q, a, b 是分叉参数 Q 的连续函数.那么,方程(8)的四个根可表示为 $\lambda_{1,2} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2$ 和 $\lambda_{3,4} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2$.

将 $(\lambda^2 + p\lambda + q)(\lambda^2 + a\lambda + b)$ 展开,令 λ 的系数与(8)中对应的系数相等,可得

$$\begin{cases} a + p = \Gamma_3 \\ b + q + ap = \Gamma_2 \\ aq + bp = \Gamma_1 \\ bq = \Gamma_0 \end{cases} \quad (9)$$

为考察颤振临界点线性化矩阵的特征值,只需将 $Q = Q_0$ 代入方程(9),再将(9)代入(5),可得:

$$a_0 p_0 [(b_0 - q_0)^2 + \Gamma_{10}\Gamma_{30}] = 0 \quad (10)$$

其中,下标 0 表示相应系数对应于 Q_0 的值,下同.

下面根据方程(10)讨论特征值的取值.因为只有 ω 为实数时,方程(4)才表示简谐振动,由(6)可知, $\Gamma_{10}/\Gamma_{30} > 0$, 因此 $\Gamma_{10}\Gamma_{30} > 0$, 那么方程(10)就意味着 $a_0 p_0 = 0$, 即 a_0, p_0 至少有一个为 0.不妨设 $p_0 = 0$, 则 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-4q_0}/2$. 方程(9)的第三个方程除以第一个方程,可得 $q_0 = \Gamma_{10}/\Gamma_{30} > 0$, 可知 $\lambda_{1,2}$ 是一对共轭的纯虚根.对于 a_0 的情况,同理可以验证 $\lambda_{3,4}$ 是一对共轭的纯虚根.

所以当 $Q = Q_0$ 时,平衡点是非双曲平衡点,根据安德罗诺夫-庞特里雅金定理,系统在 Q_0 点必出现与平衡点有关的分叉.这类分叉可能是鞍结分叉, Hopf 分叉或庞加莱分叉^[11].

2 Hopf 分叉

下面运用 Hopf 分叉定理来说明在颤振临界点系统发生 Hopf 分叉.将所有参数代入方程

(7),可得:

$$K(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.6/7 & -0.8/7 & 4(k-0.24Q)/7 & 0.4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.8/7 & 0.4/7 & 4(-4k+0.26Q)/7 & -1.6/7 \end{pmatrix},$$

$$F(x) = 20(0.4/7, 0, -16/7)^T x_3^3.$$

当 $k = 0.5$ 时, $Q_0 = 4.080\ 151\ 2$ 或 $15.404\ 223\ 8$. 因为机翼的静发散速度是 $Q_d = 12.5$, 当 $Q > Q_d$ 时, 机翼发散, 这在飞机工程中是绝不允许的, 所以本文只考虑 $Q_0 = 4.080\ 151\ 2$. 当 $k = 0.081\ 6$ 时, $Q_0 = 1.556\ 862\ 9$ 或 $1.910\ 637\ 1$, 都小于发散速度 $Q_d = 2.04$.

当 $Q_0 = 4.080\ 151\ 2$ 时, 方程(8)有一对互为共轭的纯虚根和一对有负实部的共轭复根:

$$\lambda_{4,2} = \pm 0.598\ 216\ 2i,$$

$$\lambda_{6,4} = -0.171\ 428\ 6 \pm 0.633\ 120\ 4i$$

要证明系统(2)满足 Hopf 分叉定理, 还要证明当 Q 通过 Q_0 时, $\lambda_{4,2}$ 横穿虚轴. 为此, 记

$$\lambda_{4,2} = \alpha(Q) \pm i\beta(Q) \quad (11)$$

其中 $\alpha(Q_0) = 0$ 对应于纯虚根情况. Q 通过 Q_0 时, $\lambda_{4,2}$ 横穿虚轴就是指 $\alpha'(Q_0) \neq 0$ ^[11]. 下面应用摄动法来验证之.

引入参数 $\mu = Q - Q_0$. 因为特征值关于 μ 是连续的, 所以当 $|\mu|$ 足够小时, $\lambda_{4,2}$ 仍然有负实部. 考察方程(8)右端项的因式 $\lambda + p(\mu)\lambda + q(\mu)$, 可知 $\lim_{\mu \rightarrow 0} p(\mu) = p_0 = 0$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} q(\mu) = q_0 = 0.598\ 216\ 2^2$. 对于特征值 $\lambda_{4,2} = (-p(\mu) \pm \sqrt{p^2(\mu) - 4q(\mu)})/2$, 当 μ 充分小时, $p^2(\mu) - 4q(\mu)$ 保持为负. 将 Γ_i , $a, b, p, q (i = 0, 1, 2, 3)$ 展开为 μ 的幂级数, 即:

$$a = a_0 + \mu a_1 + \cdots, b = b_0 + \mu b_1 + \cdots,$$

$$p = p_0 + \mu p_1 + \cdots, q = q_0 + \mu q_1 + \cdots,$$

$$\Gamma_i = \Gamma_{i0} + \mu \Gamma_{i1}.$$

将它们代入方程(9), 令 μ 的各次幂系数为 0, 可得:

$$\mu^0 \begin{cases} a_0 + p_0 = \Gamma_{30} \\ b_0 + q_0 + a_0 p_0 = \Gamma_{20} \\ a_0 q_0 + b_0 p_0 = \Gamma_{10} \\ b_0 q_0 = \Gamma_{00} \end{cases},$$

$$\mu^1 \begin{cases} a_1 + p_1 = \Gamma_{31} \\ p_0 a_1 + b_1 + q_1 + a_0 p_1 = \Gamma_{21} \\ q_0 a_1 + p_0 b_1 + b_0 p_1 + a_0 q_1 = \Gamma_{11} \\ q_0 b_1 + b_0 q_1 = \Gamma_{01} \end{cases}.$$

其中 0 次方程自动满足. 解 1 次方程, 可得:

$$a_1 = 0.041\ 896, b_1 = -0.377\ 313\ 2,$$

$$p_1 = -0.041\ 895\ 7, q_1 = 0.234\ 484\ 3$$

$$\text{由 } \alpha(Q) = -\frac{1}{2} p(\mu), \text{ 可知 } \alpha'(Q_0) = -\frac{1}{2} p'(0) = -\frac{1}{2} p_1 \neq 0.$$

当 $Q_0 = 1.556\ 862\ 9$ 和 $1.910\ 637\ 1$ 时, 用以上方法可得 p_1 分别为 $-1.900\ 646$ 和 $-1.511\ 049$. 根据 Hopf 分叉定理, 可知系统(2)在这 3 个临界颤振点上都发生 Hopf 分叉.

3 极限环稳定性判别的复数正规形法

中心流形上的方程可统一写成^[9]:

$$\dot{y}_1 = -\omega y_2 + 20e_1 y_1^3, \quad \dot{y}_2 = \omega y_1 + e_2 y_1^3 \quad (12)$$

其中当 $k = 0.5$ 时, 颤振临界 $Q_1 = 4.080\ 151\ 2$ 对应的参数值为: $\omega = 0.598\ 216\ 2$, $e_1 = -2.964\ 942$, $e_2 = 0.068\ 298\ 9$; 当 $k = 0.081\ 6$ 时, 临界点 $Q_2 = 1.556\ 862\ 3$:

$$\omega = 0.382\ 383\ 3,$$

$$e_1 = 2.515\ 74, e_2 = 0.097\ 094\ 88;$$

临界点 $Q_3 = 1.910\ 637\ 8$:

$$\omega = 0.369\ 841\ 9,$$

$$e_1 = 2.531\ 677, e_2 = -0.583\ 081\ 5.$$

复数正规形法首先假设^[11]:

$$z = y_1 + iy_2 \quad (13)$$

将方程(13)代入(12), 则(12)可以写成一个复数方程:

$$\dot{z} = i\omega z + \frac{5}{2}(e_1 + ie_2)(z^3 + 3z^2 \bar{z}^2 + 3z \bar{z} + \bar{z}^3) \quad (14)$$

引入近恒等的非线性变换, $z = \xi + \frac{5(e_1 + ie_2)i}{8\omega}$ $(-2\xi^2 + 2\xi\bar{\xi} + \bar{\xi}^2)$, 将之代入(14)可得复数正规形为:

$$\dot{\xi} = i\omega \xi + \frac{15}{2}(e_1 + ie_2)\xi\bar{\xi} \quad (15)$$

将方程(15)化为极坐标形式, $\xi = re^{i\theta}$, 可得:

$$\dot{r} = \frac{15}{2}e_1 r^3 \quad (16)$$

由方程(16)可知, 分岔点的稳定性就取决于 e_1 的

符号,结果与文献[9,10]完全一致.因为 Hopf 分岔长出的极限环和该分岔点具有相同的稳定性,可知在点 Q_1 , $e_1 < 0$,该点长出的极限环是稳定的;在 Q_2 , Q_3 点, $e_1 > 0$,对应的极限环是不稳定的.

4 结论验证

采用 Runge-Kutta 法对方程(7)直接积分,以验证以上结论.图 1 是系统(7)在分岔点 Q_1 两边的俯仰振动相图.由图可知,分岔点左侧的平衡点

是稳定的焦点,而在分岔点右侧,系统长出了极限环.用 Runge-Kutta 直接积分法能得到的极限环是稳定的^[6].由此可知,此时极限环是稳定的.

不稳定周期解一般不能通过直接积分法获得.但是,极限环的稳定性可以通过分岔点的稳定性来判别.图 2 是系统(7)在分岔点 Q_2 和 Q_3 的俯仰振动相图.由图可知, Q_2 和 Q_3 都是不稳定的焦点,可知,它们长出的极限环也是不稳定的.综上所述,用复数正规形方法可以正确地判别颤振极限环的稳定性.

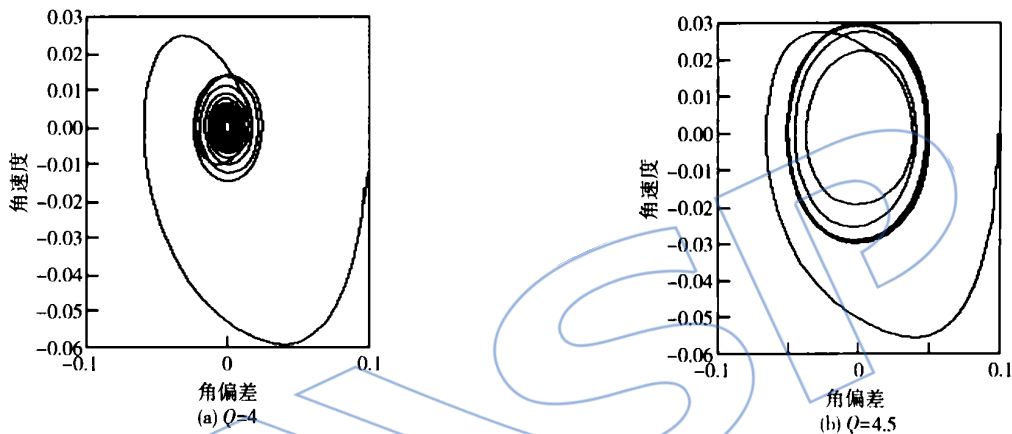


图 1 方程(7)在分岔点 Q_1 周围的相图
Fig. 1 Phase plane of equation(7) beside Q_1

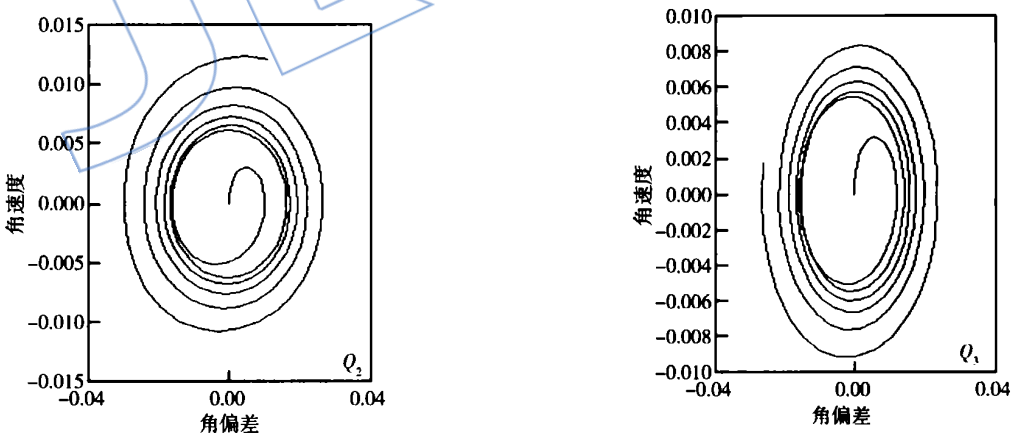


图 2 方程(7)在分岔点 Q_2 和 Q_3 处的相图
Fig. 2 Phase plane of equation(7) at Q_2 and Q_3

参考文献:

[1] Lee B H K, Price S J, Wong Y S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos[J]. Progress Aerospace Science, 1999, 35: 205-344.
[2] LIU Jike, ZHAO Lingcheng. Bifurcation analysis of airfoil in incompressible flow[J]. Journal of Sound and Vibration,

1992, 154(1): 117-124.
[3] ZHAO Lingcheng, YANG Z C. Chaotic motion of an airfoil with nonlinear stiffness in incompressible flow[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 138(2): 245-254.
[4] Shahrzad P, Mahzoon M. Limit cycle flutter of airfoils in steady and unsteady flows[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 256(2): 213-225.

[5] Price S F,Alighanbari H,Lee B H K. The aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with bilinear and cubic structural nonlinearities[J]. Journal of Fluids and Structure ,1995,9 :175-193.

[6] LIU L P,Dowell E H. The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion: effect of high harmonics [J]. Nonlinear Dynamics ,2004 ,37 :31-49.

[7] 蔡铭,刘济科,杨怡. 强非线性颤振分析的增量谐波平衡法 [J]. 机械科学与技术 ,2004 ,23(6) :742-744.
CAI Ming ,LIU Jike ,YANG Yi. Incremental harmonic balance method for strongly nonlinear airfoil flutter[J]. Mechanical Science and Technology ,2004 ,23(6) :742-744.

[8] CAI Ming ,LIU Jike ,LI Jun. Incremental harmonic balance method for airfoil flutter with multiple strong nonlinearities[J]. Applied Mathematics and Mechanics ,2006 ,27(7) : 953-958.

[9] LIU Jike ,ZHAO Lingcheng ,Fang T. Bifurcation point analysis of airfoil flutter with structural nonlinearity[M]. Advances in Nonlinear Dynamics in China-Theory and Practice ,Chapter 3. Netherland :Swets & Zeitlinger Publishers ,Lisse ,2002.

[10] 丁千,王冬立. 用规范形直接法研究立方非线性机翼颤振 [J]. 飞行力学 ,2005 ,23(3) :85-88.
DING Qian ,WANG Dongli. Study on flutter of an airfoil with cubic non-Lineariry using normal form direct method [J]. Flight Dynamics ,2005 ,23(3) :85-88.

[11] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京 :高等教育出版社 ,2002.

