

文章编号: 1000-8055(2006)06-1043-05

高精度两步 TVD 格式的构造及 数值检验

汪银乐, 鞠 银
(南京工业大学 理学院, 南京 210009)

摘 要: 基于通量分裂的思想, 利用 Taylor 级数理论和第二步限制器函数的控制, 构造了在光滑区域空间为三阶、时间为一阶精度的高分辨率全变差递减(TVD)格式。该格式在激波过渡点降为一阶迎风格式。并从单个线形方程推广到非线性方程及方程组情形。通过几个典型算例的计算, 并与二阶 TVD 格式作了比较, 表明该方法对流场中的激波有较高的分辨率, 且是无波动的。

关 键 词: 航空、航天推进系统; TVD 格式; Taylor 级数; 二步格式; 高精度

中图分类号: O241

文献标识码: A

Structure and numerical simulation of high order two steps scheme

WANG Yir Yue, JU Yin

(College of Sciences, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: Basing on the flux-vector splitting, a space 3-order accuracy total variation diminishing(TVD) scheme by applying the Taylorseries theory and the control of the limiter was constructed. The scheme was 1-order in time. In the region of the shock wave the scheme changed into 1-order upwind scheme, Then the simple linear differential equation was spread nonlinear equation. It was applied in solving typical numerical experiments. The present results were compared with those results computed by the 2nd order TVD scheme. It testifies that the scheme has high order accuracy and high resolution for shocks waves, therefore they are non-oscillatory

Key words: aerospace propulsion system; total variation diminishing (TVD); Taylor-series; two step scheme; high order accuracy

构造好的、高精度高分辨率格式一直是计算流体力学工作者长期追求的目标, 传统的差分格式有一阶迎风格式; Lax-Friedrichs 一阶格式; Lax-Wendroff 二阶精度格式; MacCormack 预估校正两步格式等^[1]。这些格式具有算法简单, 消耗机时较少等优点, 但也有令人不满意的地方。

一阶格式有抹平间断的趋势, 而不能与真实的物理解相符。二阶格式需添加人工粘性项来抑制由三阶频散余项引起的数值振荡。为了克服上述格式的缺点, 人们从多种途径来构造逼近精确解的高分辨率格式。自 1983 年 Harten 提出了一个

收稿日期: 2006-04-05; 修订日期: 2006-07-24

作者简介: 汪银乐(1968), 女, 陕西西安人, 南京工业大学讲师, 硕士, 研究方向为偏微分方程数值解法。

高分辨率的 TVD 格式^[2]之后, 高分辨率差分格式的构造进入了一个新的发展阶段。TVD 概念被广泛地用于设计一维守恒律高分辨率差分格式, 出现了许多新的格式, 如 STVD^[3]、CTVD^[4]、CWENO^[5]等格式, 且都得到了广泛的应用^[6]。本文利用 Taylor 级数理论, 消去低阶项, 在第二步通过限制器的控制, 构造了求解双曲型方程的具有高分辨率的三阶全变差递减(TVD)格式, 在光滑区域空间为三阶精度, 时间为一阶精度, 在激波过渡点为一阶迎风格式。通过定常激波问题、正弦波的初值问题、一维 Riemann 问题、激波反射问题等几个算例表明, 该方法对激波有较高的分辨率, 且是无波动的。

1 Taylor 级数理论的应用

令 $\Delta_{j+\frac{1}{2}} = u_{j+1}^n - u_j^n$ 利用 Taylor 展开式, 则有:

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}} = u_{j+1} - u_j = hu'_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{2}u''_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h^3}{6}u'''_{j+\frac{1}{2}} + o(h^4)$$

$$\Delta_{j-\frac{1}{2}} = u_j - u_{j-1} = hu'_{j-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{2}u''_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h^3}{6}u'''_{j-\frac{1}{2}} + o(h^4)$$

$$\Delta_{j-\frac{3}{2}} = u_{j-1} - u_{j-2} = hu'_{j-\frac{3}{2}} - \frac{3h^2}{2}u''_{j-\frac{3}{2}} + \frac{7h^3}{6}u'''_{j-\frac{3}{2}} + o(h^4)$$

通过计算有:

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}} - \Delta_{j-\frac{1}{2}} = h^2u''_{j+\frac{1}{2}} + o(h^4) \quad (1)$$

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}} - 2\Delta_{j-\frac{1}{2}} + \Delta_{j-\frac{3}{2}} = h^3u'''_{j+\frac{1}{2}} + o(h^4) \quad (2)$$

2 格式的构造

2.1 首先讨论线性方程的情形

$$2.1.1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad a > 0$$

一步格式为:

$$\overline{u_j^{n+1}} = \lambda [\Delta_{j+\frac{1}{2}} - \Delta_{j-\frac{1}{2}}] \quad \lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3a)$$

有:

$$\overline{u_{j-1}^{n+1}} = \lambda [\Delta_{j-\frac{1}{2}} - \Delta_{j-\frac{3}{2}}]$$

$$\overline{u_j^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}} = \lambda [\Delta_{j-\frac{1}{2}} - 2\Delta_{j-\frac{1}{2}} + \Delta_{j-\frac{3}{2}}]$$

二步格式为:

$$\overline{u_j^{n+1}} =$$

$$u_j^n - \lambda \Delta_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \phi_1 \overline{u_j^{n+1}} + \frac{1}{6} \phi_2 (\overline{u_j^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \quad (3b)$$

其中 $\phi^* = \phi(r_i)$ 。

$$r_i = \Delta_{j-\frac{1}{2}} / \Delta_{j+\frac{1}{2}}$$

把(3a)代入(3b)有:

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - C_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}}$$

其中:

$$C_{j+\frac{1}{2}} =$$

$$\lambda [1 + \frac{1}{2} \phi_1 (\frac{1}{r_i} - 1) - \frac{1}{6} \phi_2 (\frac{1}{r_i} - 2 + r_{i-1})]$$

(3)式中取 $r \leq 2/3$

$$\phi_1(r) = \begin{cases} 0 & r \leq 0 \\ r/2 & 0 < r < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq r \leq 5 \end{cases}$$

$$\phi_2(r) = \begin{cases} 0 & r \leq 0 \\ \gamma & 0 < r < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq r \leq 5 \end{cases} \quad (3c)$$

时, 把式(1)、(2)代入式(3), 易知(3)式在光滑区域空间可以达到三阶精度, 时间方向为一阶。根据文献[1]知, 格式(3)是 TVD 格式, 记为 LTVD。

$$2.1.2 \quad \text{对于} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad a < 0$$

一步格式为:

$$\overline{u_j^{n+1}} = \lambda [\Delta_{j+\frac{1}{2}} - \Delta_{j-\frac{1}{2}}]$$

二步格式为:

$$\overline{u_j^{n+1}} =$$

$$u_j^n - \lambda \Delta_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \phi_1 \overline{u_j^{n+1}} + \frac{1}{6} \phi_2 (\overline{u_{j+1}^{n+1}} - \overline{u_j^{n+1}})$$

式中 ϕ 取值同式(3), 且 $|\lambda| \leq 2/3$ 。

2.2 下面讨论非线性单个方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}(f(u)) = 0$$

$$\text{令 } f(u) = f^+(u) + f^-(u)$$

其中:

$$\frac{\partial f^+(u)}{\partial u} \geq 0, \quad \frac{\partial f^-(u)}{\partial u} \leq 0$$

首先令:

$$\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{\pm} = f_{j+\frac{1}{2}}^{\pm} - f_j^{\pm}, \quad f_j^{\pm} = f^{\pm}(u_j^n)$$

一步格式为:

$$\overline{u_j^{n+1}} = \lambda [\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+ - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+] + \lambda [\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^- - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^-]$$

二步格式为:

$$\overline{u_j^{n+1}} =$$

$$u_j^n - \lambda \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+ - \lambda \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{2} \phi_1 f_{j+\frac{1}{2}}^+ + \frac{1}{2} \phi_1 f_{j-\frac{1}{2}}^- +$$

$$\frac{1}{6}\Phi_2(f_j^+ - f_{j-1}^+) + \frac{1}{6}\Phi_2(f_{j+1}^- - f_j^-)$$

其中 $f_j^\pm = f_j^\pm(\overline{u_j^{m+1}})$, $\Phi_j^\pm = \Phi(r_{j+\frac{1}{2}}^\pm)$ 取值同(3)式

$$r_{j+\frac{1}{2}}^\pm = \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^\pm / \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^\pm$$

上式中要求 CFL 数 $|r| \leq 2/3$ 。

2.3 方程组情形

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (F(U))}{\partial x} = 0$$

采用 Van Leer 分裂^[7]:

令: $F(U) = F^+(U) + F^-(U)$

一步格式为:

$$\bar{U}_j^{n+1} = \lambda \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^+ - \Delta F_{j-\frac{1}{2}}^+ + \lambda \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^- - \Delta F_{j-\frac{1}{2}}^-$$

二步格式为:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \Delta F_{j-\frac{1}{2}}^+ - \lambda \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{2} \Phi_1 F_j^+ + \frac{1}{2} \Phi_1 F_j^- + \frac{1}{6} \Phi_2 (F_j^+ - F_{j-1}^+) + \frac{1}{6} \Phi_2 (F_{j+1}^- - F_j^-)$$

其中:

$$F_j^\pm = F_j^\pm(\overline{u_j^{m+1}}), \quad \Phi_j^\pm = \text{diag}(\phi_j^{\pm(1)}, \Lambda, \phi_j^{\pm(m)})$$

$\phi_j^{\pm(k)} = \phi(r_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)})$, $r_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)} = \Delta F_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(k)} / \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$

m 为方程组的阶数, 上标 k 表示向量的第 k 个分量。

3 数值实验

算例 1 定常激波问题

设来流马赫数为 $M_\infty = 3$, 无量纲化后的入口条件是:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \end{bmatrix} \quad \text{当 } x = -3 \text{ 时}$$

在出口处的物理量由精确解给出。图 1 用本文格式得到的密度和速度在空间的分布。由图可见, 激波附近没有非物理振荡。

算例 2 正弦波的初值问题

给定正弦波的初始条件:

$$u_0(x) = \begin{cases} 30 \sin[\pi(x - 20)/20] & 20 < x < 60 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

应用 TVD 格式及本文得到的新格式 LTVD 分别对上述初值问题进行求解。取时间步长 $\Delta x = 1.0$

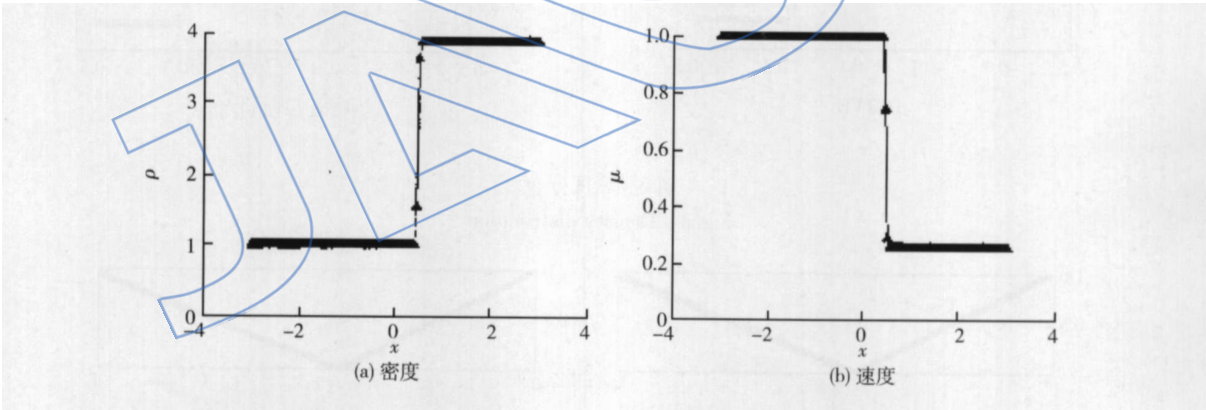


图 1 定常激波的计算

Fig. 1 Computing results of 1-D steady shock

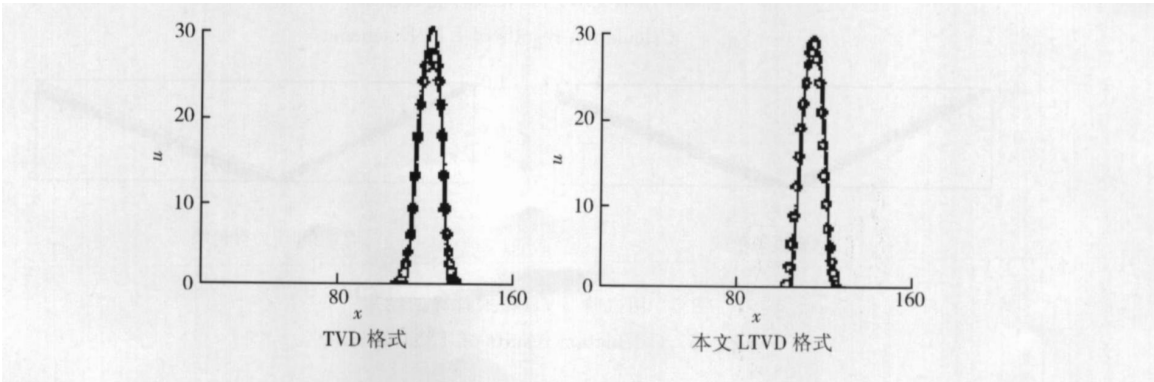


图 2 正弦波的计算结果

Fig. 2 Computing results of sine waves

m, CFL= 0.4, 波速 $\alpha= 1.0\text{ m/s}$, 当时间 $t= 80\text{ s}$, 计算结果如图 2 所示。表 1 给出三个时刻两种格式正弦波峰值结果。

表 1 两种格式不同时刻正弦波峰值结果的比较
Table 1 Comparison of peak values for sine waves of two schemes on different times

Time	TVD SCHEME	LTVD
20s	28.779	29.914
50s	27.382	29.269
80s	26.720	29.256

从计算结果可见三阶 LTVD 格式优于二阶 TVD 格式, 其峰值的衰减比二阶 TVD 格式更慢, 间断更陡, 与精确解吻合更好。

算例 3 一维 Riemann 问题

该问题常常用来检验格式对激波、膨胀波及接触间断分辨能力。计算中取空间步长 $\Delta x= 0.01$, CFL= 0.66, 101 个网格点分布在 $[- 0.5, 0.5]$ 的区域内, 图 3 为 $t= 0.14$ 的计算结果。从图中可以清楚看到 LTVD 格式对激波、接触间断的分辨率都高于 TVD 格式, 并且随着格式精度的提高, 格式对接触间断的分辨率也逐步提高。

算例 4 激波反射问题

来流马赫数 $M_{\infty}= 2.9$, 激波入射角度为 29° , 计算中的网格点为 81×41 , CFL= 0.66。从图 4 (文中所给 LTVD 格式) 和图 5 (二阶 TVD 格式) 可以看出两种格式都能有效抑制在激波附近的非物理波动, 但新格式对流场中出现的激波分辨率更高, 捕捉到的激波在两个网格点左右。

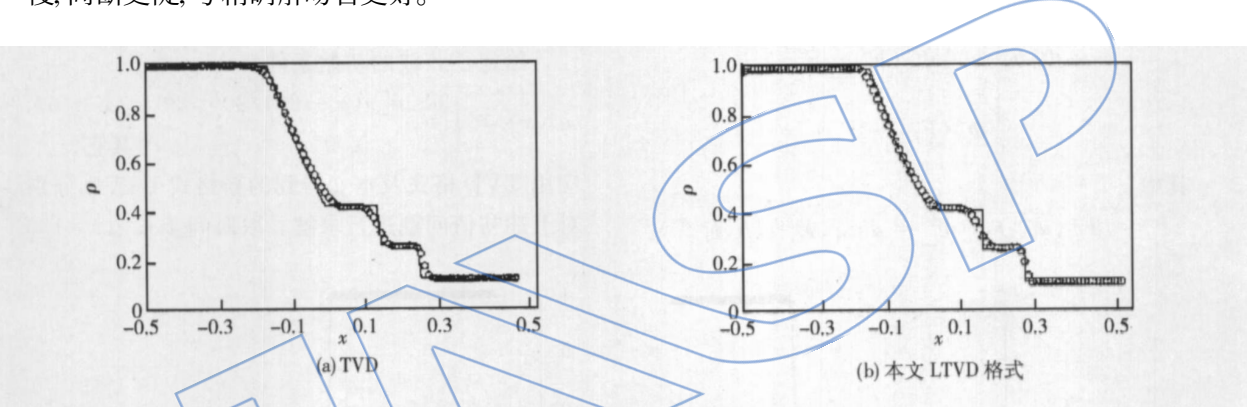


图 3 密度分布
Fig.3 Density distribution

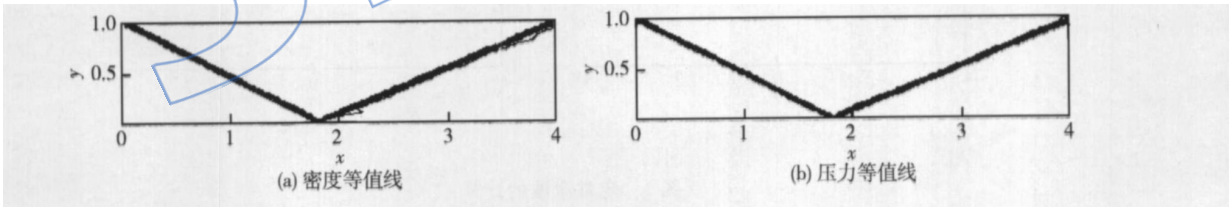


图 4 用本文 LTVD 格式计算的结果
Fig.4 Calculation results of LTVD scheme

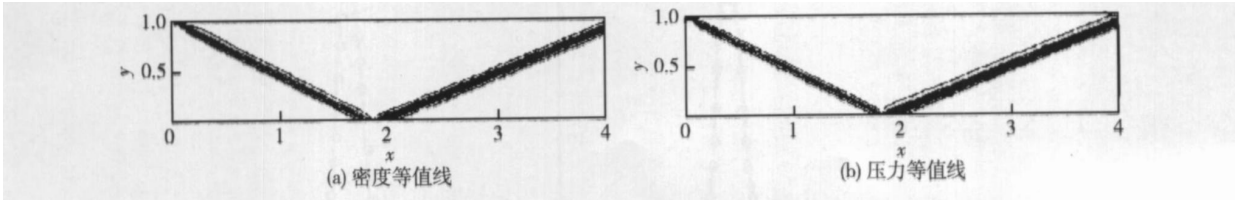


图 5 用二阶 TVD 格式计算的结果
Fig.5 Calculation results of TVD scheme

4 结 论

本文研究了高精度差分格式的构造, 通过不同计算方法的计算结果比较, 得到以下结论:

- (1) 通过级数展开, 消去低阶项, 得到高阶格式。这样得到的时间精度一阶、空间三阶精度的格式是条件稳定的, 该方法可以推广到更高阶。
- (2) 利用本文构造的高精度差分格式对流场间断的计算是十分成功的。这种格式能有效地抑制流场间断附近的数值振荡, 并与精确解的结果十分吻合, 明显优于二阶 TVD 格式。

参考文献:

[1] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[2] Harten A. High resolution for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 1983, 49(3): 357-393.

[3] Yee H C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD scheme and their applications [J]. Journal of Computational Physic, 1987, 68(1): 151-179.

[4] Yu Heng, Liu Yur Ping. A second order accurate component wise TVD scheme for nonlinear hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2001, 173(1): 1-6.

[5] Levy D, Pupo G, Russo G. A fourth order central WENO schemes for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws [J]. SIAM J Sci Comput., 2002, 24(2): 480-506.

[6] 楼建锋, 于恒. CTVD 格式数值计算非均质炸药爆轰问题 [J]. 计算物理, 2005, 22(4): 358-364.

Lou Jianfeng, Yu Heng. Numerical simulations of detonation in heterogeneous explosives in a CTVD scheme [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2005, 22(4): 358-364.

[7] Anderson Kyle W, James L T. Comparison of finite volume flux vector splitting for the euler equations [J]. AIAA Journal, 1986, 24(9): 1453-1460.