

文章编号: 1000-8055(2007)06-1013-05

区间数据回归分析方法

敖 亮, 傅惠民

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100083)

摘 要: 提出区间数据回归分析方法, 建立区间数据回归方程, 给出回归系数的最佳无偏整体估计及其协方差矩阵. 详细讨论了工程中常见的极值分布、Weibull 分布和正态分布的等尺度和非等尺度(或异方差)线性回归分析. 该方法可以将各个不同状态下的区间数据作为一个整体进行统计分析, 具有信息量大、精度高的特点.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 区间数据; 回归分析; 极值分布; Weibull 分布; 正态分布

中图分类号: TB301; O211

文献标识码: A

Regression analysis method for interval censored data

AO Liang, FU Hui-min

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A new method of regression analysis for interval censored data is presented, the regression equation for interval censored data is established, and the best unbiased integral estimators of the regression coefficients and their covariance matrix are given. The regression analysis methods for interval censored data from extreme distribution, Weibull distribution and normal distribution are discussed in detail. As the cross information among test data in different states is fully exploited, this method can reach higher precision than traditional method.

Key words: aerospace propulsion system; interval censored data; regression analysis; extreme distribution; Weibull distribution; normal distribution

传统的回归分析只适用于来自正态分布的完全数据, 而由于产品失效形式的多样性和各种因素的复杂性, 在工程实际中常常会遇到各种各样的数据类型和分布规律. 为此, 文献[1]提出截尾数据线性回归分析, 文献[2]建立了不完全数据回归分析方法, 文献[3]讨论了区间统计量及其分布理论, 文献[4]提出区间数据整体估计方法. 在上述工作基础上, 本文进一步给出工程中常见的极值分布、Weibull 分布、正态分布区间数据回归分析方法.

1 极值分布区间数据回归分析

1.1 多状态下极值分布的区间统计量

极值分布在航空航天等工程实际中都有着广泛应用, 其分布函数可表示为

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\frac{t - \mu(x)}{\sigma(x)} \right] \right\} \quad -\infty < t < +\infty \quad (1)$$

式中 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 分别为状态 x 下的位置参数和尺度参数. 令 $t^p = [t - \mu(x)] / \sigma(x)$, 则 t^p 遵循标

收稿日期: 2007-01-04; 修订日期: 2007-05-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(10472006); 北京市教育委员会共建项目(XK100060418)

作者简介: 敖亮(1982-), 男, 湖北石首人, 博士生, 从事小样本信息技术、区间数据分析及可靠性研究.

准极值分布.

设在状态 x_j 下 $(t_{j1}, n'_{j1}), (t_{j2}, n'_{j2}), \dots, (t_{jm_j}, n'_{jm_j})$ 是来自极值分布的一组区间数据, 即位于区间 $(t_{j(k-1)}, t_{jk})$ 内有 n'_{jk} 个数据, 其中 $t_{j0} = -\infty, t_{j1} < t_{j2} < \dots < t_{jm_j}, k = 1, 2, \dots, m_j$, 其数据总量为 $n_j = \sum_{k=1}^{m_j} n'_{jk}$. 令

$$n_{jk} = \sum_{l=1}^k n'_{jl} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

则由文献[3]知, 可将 t_{jk} 看作大小为 n_j 的样本的第 n_{jk} 个区间统计量 $T_{n_{jk}}^*$ 的一个实现值. 通过 $T_{n_{jk}}^0 = [T_{n_{jk}}^* - \mu(x_j)] / \sigma(x_j)$ 可以将 $T_{n_{jk}}^*$ 变换为来自标准极值分布的区间统计量.

1.2 等尺度极值分布区间数据回归分析

1.2.1 整体分布参数估计

在工程实际中, 经常遇到极值分布的尺度参数 $\sigma(x)$ 不变, 而位置参数 $\mu(x)$ 随状态变量 x 呈线性变化的情况, 即

$$\mu(x) = a + bx \quad (3)$$

$$\sigma(x) = \sigma \quad (4)$$

则服从极值分布的随机变量 t 可表示为

$$t = a + bx + \varepsilon \quad \varepsilon \sim EV(0, \sigma) \quad (5)$$

式中 a, b 和 σ 为待定参数.

设在状态 x_j 下对 n_j 个试样进行试验, 得到一组极值分布区间数据 $(t_{j1}, n'_{j1}), (t_{j2}, n'_{j2}), \dots, (t_{jm_j}, n'_{jm_j}), j = 1, 2, \dots, m$. 根据文献[4]可知 a, b, σ 的最佳线性无偏估计 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}$ 由下面各式给出

$$\hat{a} = \bar{t} - \hat{b}\bar{x} - \hat{\sigma}\bar{u} \quad (6)$$

$$\hat{b} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2} \quad (7)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{L_{21}L_{11} - L_{11}L_{12}}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2} \quad (8)$$

式中

$$\bar{t} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} t_{jk} \quad (9)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} x_j \quad (10)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} u_{jk} \quad (11)$$

$$n^* = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} \quad (12)$$

$$L_{11} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} (x_j - \bar{x})^2 \quad (13)$$

$$L_{12} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} (x_j - \bar{x})(u_{jk} - \bar{u}) \quad (14)$$

$$L_{22} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} (u_{jk} - \bar{u})(u_{jl} - \bar{u}) \quad (15)$$

$$L_{1t} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} (x_j - \bar{x})(t_{jk} - \bar{t}) \quad (16)$$

$$L_{2t} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} (u_{jl} - \bar{u})(t_{jk} - \bar{t}) \quad (17)$$

$$(v^{jkl})_{m_j \times m_j} = (v_{jkl})_{m_j \times m_j}^{-1} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

其中 $u_{jk} = E(T_{n_{jk}}^0), v_{jkk} = \text{Var}(T_{n_{jk}}^0), v_{jkl} = \text{Cov}(T_{n_{jk}}^0, T_{n_{jl}}^0) (k \neq l)$ 为在状态 $x_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 下标准极值分布区间统计量的均值、方差和协方差, 可由文献[3]中有关公式计算得到.

1.2.2 位置参数和尺度参数的置信限估计

由式(3)知, 位置参数 $\mu(x)$ 的最佳线性无偏估计由下式给出

$$\hat{\mu}(x) = \hat{a} + \hat{b}x \quad (19)$$

位置参数 $\mu(x)$ 和尺度参数 σ 置信度为 γ 的单侧置信下限和上限分别为

$$\hat{\mu}_L(x) = \hat{a} + \hat{b}x + \frac{\hat{\sigma}u_\gamma}{1 - u_\gamma^2 c_{33}} \left[u_\gamma (c_{13} + c_{23}x) - \sqrt{u_\gamma^2 (c_{13} + c_{23}x)^2 + (1 - u_\gamma^2 c_{33}) (c_{11} + 2c_{12}x + c_{22}x^2)} \right] \quad (20)$$

$$\hat{\mu}_U(x) = \hat{a} + \hat{b}x + \frac{\hat{\sigma}u_\gamma}{1 - u_\gamma^2 c_{33}} \left[u_\gamma (c_{13} + c_{23}x) + \sqrt{u_\gamma^2 (c_{13} + c_{23}x)^2 + (1 - u_\gamma^2 c_{33}) (c_{11} + 2c_{12}x + c_{22}x^2)} \right] \quad (21)$$

$$\hat{\sigma}_L = \frac{\hat{\sigma}}{1 + u_\gamma \sqrt{c_{33}}} \quad (22)$$

$$\hat{\sigma}_U = \frac{\hat{\sigma}}{1 - u_\gamma \sqrt{c_{33}}} \quad (23)$$

式中

$$(c_{i_1 i_2})_{3 \times 3} = (d_{i_1 i_2})_{3 \times 3}^{-1} \quad (24)$$

$$d_{i_1 i_2} = d_{i_2 i_1} =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} x_j^{i_1+i_2-2} & 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq 2 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} x_j^{i_1-1} u_{jk} & i_1 = 1, 2; \quad i_2 = 3 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} v^{jkl} u_{jk} u_{jl} & i_1 = i_2 = 3 \end{cases} \quad (25)$$

1.2.3 百分位值的置信限估计

随机变量 t 概率为 P 的百分位值 $t_P = \mu(x) + F^{-1}(P)\sigma$ 的无偏估计量由下式给出

$$\hat{\mu}_P = \hat{a} + bX + \sigma \ln \ln \frac{1}{1-P} \quad (26)$$

其置信度为 γ 的单侧置信下、上限分别为

$$t_{PL} = \hat{a} + bX + \frac{\sigma}{1 - u_Y^2 C_{33}} \times \left[\ln \ln \frac{1}{1-P} + u_Y^2 (C_{13} + C_{23} X) - k_P \right] \quad (27)$$

$$t_{PU} = \hat{a} + bX + \frac{\sigma}{1 - u_Y^2 C_{33}} \times \left[\ln \ln \frac{1}{1-P} + u_Y^2 (C_{13} + C_{23} X) + k_P \right] \quad (28)$$

式中

$$k_P = u_Y \left[u_Y^2 (C_{13} + C_{23} X)^2 + (1 - u_Y^2 C_{33}) \times (C_{11} + 2C_{12} X + C_{22} X^2) + C_{33} \left(\ln \ln \frac{1}{1-P} \right)^2 + 2(C_{13} + C_{23} X) \ln \ln \frac{1}{1-P} \right]^{1/2} \quad (29)$$

1.3 非等尺度极值分布区间数据回归分析

1.3.1 整体分布参数估计

在工程实际中还常遇到极值分布的位置参数 $\mu(x)$ 和尺度参数 $\sigma(x)$ 均随状态变量 x 呈线性变化的情况,即

$$\mu(x) = a + bx \quad (30)$$

$$\sigma(x) = c + dx \quad (31)$$

此时,服从极值分布的随机变量 t 可表示为:

$$t = a + bx + \varepsilon \quad \varepsilon \sim EV(0, c + dx) \quad (32)$$

式中 a, b 和 c, d 为待定参数。

同理,在相同的数据条件下,可以得到 a, b, c, d 的估计 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ 由下面各式给出

$$\hat{a} = \bar{t} - \hat{b}\bar{X} - \hat{c}\bar{u} - \hat{d}\bar{xu} \quad (33)$$

$$(\hat{b}, \hat{c}, \hat{d})^T = L_{xx}^{-1} L_{xt} \quad (34)$$

式中

$$\bar{t} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} t_{jk}}{\sigma^2(x_j)} \quad (35)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} X_j}{\sigma^2(x_j)} \quad (36)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} u_{jk}}{\sigma^2(x_j)} \quad (37)$$

$$\bar{xu} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} X_j u_{jk}}{\sigma^2(x_j)} \quad (38)$$

$$n^* = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl}}{\sigma^2(x_j)} \quad (39)$$

$$L_{xx} = (L_{i_1 i_2})_{3 \times 3} \quad (40)$$

$$L_{xt} = (L_{it})_{3 \times 1} \quad (41)$$

$$L_{11} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (X_j - \bar{X})^2}{\sigma^2(x_j)} \quad (42)$$

$$L_{12} = L_{21} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (X_j - \bar{X})(u_{jk} - \bar{u})}{\sigma^2(x_j)} \quad (43)$$

$$L_{13} = L_{31} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (X_j u_{jk} - \bar{X}\bar{u})(X_j - \bar{X})}{\sigma^2(x_j)} \quad (44)$$

$$L_{22} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (u_{jk} - \bar{u})(u_{jk} - \bar{u})}{\sigma^2(x_j)} \quad (45)$$

$$L_{23} = L_{32} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (X_j u_{jk} - \bar{X}\bar{u})(u_{jk} - \bar{u})}{\sigma^2(x_j)} \quad (46)$$

$$L_{33} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (X_j u_{jk} - \bar{X}\bar{u})(X_j u_{jl} - \bar{X}\bar{u})}{\sigma^2(x_j)} \quad (47)$$

$$L_{1t} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (X_j - \bar{X})(t_{jk} - \bar{t})}{\sigma^2(x_j)} \quad (48)$$

$$L_{2t} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (u_{jk} - \bar{u})(t_{jk} - \bar{t})}{\sigma^2(x_j)} \quad (49)$$

$$L_{3t} = \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} (X_j u_{jk} - \bar{X}\bar{u})(t_{jk} - \bar{t})}{\sigma^2(x_j)} \quad (50)$$

$$\sigma(x_j) = c + dx_j \quad (51)$$

其中 v^{jkl} 由式(18)给出, u_{jk} , v_{jkk} 和 v_{jkl} ($k \neq l$) 分别为在状态 x_j ($j=1, 2, \dots, m$) 下标准极值分布区间统计量的均值、方差和协方差,由文献[3]中有关公式计算得到。

可以证明,当 $\sigma(x_j)$ 已知时, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ 为 a, b, c, d 的最佳线性无偏估计;当 $\sigma(x_j)$ 未知时,需迭代求解^[2]。

1.3.2 位置参数和尺度参数的置信限估计

由式(30)和式(31)知,位置参数 $\mu(x)$ 和尺度参数 $\sigma(x)$ 的点估计由下面两式给出

$$\hat{\mu}(x) = \hat{a} + bX \quad (52)$$

$$\hat{\sigma}(x) = \hat{c} + dX \quad (53)$$

位置参数 $\mu(x)$ 和尺度参数 $\sigma(x)$ 置信度为 γ 的单侧置信下限和上限分别为

$$\hat{\mu}_L(x) = \hat{a} + bX + \frac{\sigma(x) u_Y}{\sigma^2(x) - u_Y^2 S_{22}} \left[u_Y S_{12} - \sqrt{u_Y^2 (S_{12}^2 - S_{11} S_{22}) + \sigma^2(x) S_{11}} \right] \quad (54)$$

$$\hat{\mu}_U(x) = \hat{a} + bX + \frac{\sigma(x) u_Y}{\sigma^2(x) - u_Y^2 S_{22}} \left[u_Y S_{12} + \sqrt{u_Y^2 (S_{12}^2 - S_{11} S_{22}) + \sigma^2(x) S_{11}} \right] \quad (55)$$

$$\hat{\sigma}_L(x) = \frac{\sigma^2(x)}{\sigma(x) + u_Y \sqrt{S_{22}}} \quad (56)$$

$$\sigma_U(x) = \frac{\sigma^2(x)}{\sigma(x) - u_Y \sqrt{S_{22}}} \tag{57}$$

式中

$$S_{11} = c_{11} + 2c_{12}x + c_{22}x^2 \tag{58}$$

$$S_{12} = c_{13} + (c_{14} + c_{23})x + c_{24}x^2 \tag{59}$$

$$S_{22} = c_{33} + 2c_{34}x + c_{44}x^2 \tag{60}$$

其中

$$(c_{i_1 i_2})_{4 \times 4} = (d_{i_1 i_2})_{4 \times 4}^{-1} \tag{61}$$

$$d_{i_1 i_2} = d_{i_2 i_1} =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} x_j^{i_1+i_2-2}}{\sigma^2(x_j)} & 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq 2 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} x_j^{i_1+i_2-4} u_{jk}}{\sigma^2(x_j)} & i_1 = 1, 2; \quad i_2 = 3, 4 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} \frac{v^{jkl} x_j^{i_1+i_2-6} u_{jk} u_{jl}}{\sigma^2(x_j)} & 3 \leq i_1 \leq i_2 \leq 4 \end{cases} \tag{62}$$

1.3.3 百分位值的置信限估计

随机变量 t 概率为 P 的百分位值 $t_P = \mu(x) + F^{-1}(P)\sigma(x)$ 的估计量由下式给出

$$\hat{t}_P = \hat{a} + b\hat{x} + \hat{\sigma}(x) \ln \ln \frac{1}{1-P} \tag{63}$$

其置信度为 γ 的单侧置信下、上限分别为

$$t_{PL} = \hat{a} + b\hat{x} + \frac{\hat{\sigma}(x)}{\hat{\sigma}^2(x) - u_Y^2 S_{22}} \times \left[\hat{\sigma}^2(x) \ln \ln \frac{1}{1-P} + u_Y^2 S_{12} - k_P \right] \tag{64}$$

$$t_{PU} = \hat{a} + b\hat{x} + \frac{\hat{\sigma}(x)}{\hat{\sigma}^2(x) - u_Y^2 S_{22}} \times \left[\hat{\sigma}^2(x) \ln \ln \frac{1}{1-P} + u_Y^2 S_{12} + k_P \right] \tag{65}$$

式中

$$k_P = u_Y \left\{ u_Y^2 (S_{12}^2 - S_{11} S_{22}) + \hat{\sigma}^2(x) \left[S_{11} + \left(\ln \ln \frac{1}{1-P} \right)^2 S_{22} + 2S_{12} \ln \ln \frac{1}{1-P} \right] \right\}^{1/2} \tag{66}$$

2 Weibull 分布区间数据回归分析

两参数 Weibull 分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t}{\beta(x)} \right]^{\alpha(x)} \right\} \quad t > 0 \tag{67}$$

式中 $\alpha(x), \beta(x)$ 分别为状态 x 下的形状参数和尺度参数. 若令 $y = \ln t, \mu(x) = \ln \beta(x), \sigma(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$, 则可以将上式变换成极值分布

$$G(y) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\frac{y - \mu(x)}{\sigma(x)} \right] \right\} \tag{68}$$

式中 $\mu(x), \sigma(x)$ 分别为状态 x 下的极值分布位置参数和尺度参数. 此时, Weibull 分布区间数据回归分析可转化为极值分布区间数据回归分析问题进行处理.

3 正态分布区间数据回归分析

对于正态分布

$$F(t) = \Phi \left[\frac{t - \mu(x)}{\sigma(x)} \right] \tag{69}$$

式中 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 分别为状态 x 下的正态分布均值和标准差, $\Phi(t)$ 为标准正态分布函数.

这时用正态分布区间统计量的均值、方差和协方差代替极值分布区间统计量的均值、方差和协方差, 则 1.2.1, 1.2.2 和 1.3.1, 1.3.2 节中的公式同样适用于正态分布的回归分析; 将 1.2.3 和 1.3.3 节公式中的 $\ln \ln \frac{1}{1-P}$ 用 $\Phi^{-1}(P)$ 代替, 则可在多状态区间数据情况下得到正态分布百分位值的区间估计.

4 实 例

文献[5]给出了 3 个电压下某机械滤波器加速寿命试验定期检测结果, 每个电压下的样本容量分别为 $n_1 = 19, n_2 = 35, n_3 = 12$, 得到三组区间数据. 各个电压下产品寿命 t 均服从 Weibull 分布, 且形状参数 a 保持不变, 即有

$$F(t_i) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t_i}{\beta(V_i)} \right]^a \right\} \quad i = 1, 2, 3$$

加速寿命方程符合逆幂律模型, 即各个电压下特征寿命 $\beta(V_i) (i = 1, 2, 3)$ 满足

$$\ln \beta(V_i) = a + b \ln V_i \quad i = 1, 2, 3$$

表 1 某机械滤波器加速寿命试验定期检测结果
Table 1 Periodic detection results of mechanical filter accelerated life test

组号	组限/h	失效数		
		电压	电压	电压
		$V_1 = 0.64V \quad V_2 = 2.724V \quad V_3 = 9.52V$		
1	0~	0	3	1
2	5~	1	1	1
3	10~	0	3	1
4	25~	0	1	0
5	50~	1	3	3
6	100~	0	3	0
7	250~	0	1	0
8	500~	0	1	1
9	1 000~	2	1	0
10	1 500~	1	2	1

采用本文方法对表 1 中区间数据进行统计分析,得到参数 a, b 和 $\sigma = 1/\alpha$ 的估计量为

$\hat{a} = 9.925\ 0, \hat{b} = -1.303\ 1, \hat{\sigma} = 2.964\ 5$
该产品特征寿命与电压之间的数学关系式由下式给出

$$\ln \beta(V_i) = \hat{a} + b \ln V_i = 9.925\ 0 - 1.303\ 1 \ln V_i$$

5 结 论

- (1) 提出了区间数据回归分析方法,将只适用于完全数据的回归分析推广到工程中常见的区间数据的情况.
- (2) 详细讨论了工程中常见的极值分布区间数据的一元线性回归分析,给出位置参数和尺度参数的最佳无偏整体估计及其协方差矩阵.建立百分位值的置信区间估计.
- (3) 建立适用于两参数 Weibull 分布、正态分布的一元线性回归分析方法.

参考文献:

[1] 黄伟,傅惠民.截尾数据线性回归分析方法[J].航空动力

学报,2003,18(4):465-469.
HUANG Wei, FU Huimin. Linear regression analysis method for censored data[J]. Journal of Aerospace Power, 2003,18(4):465-469.
[2] 王华胜,傅惠民.不完全数据回归分析方法[J].航空动力学报,2005,20(3):351-354.
WANG Huasheng, FU Huimin. Regression analysis method for incomplete data[J]. Journal of Aerospace Power, 2005,20(3):351-354.
[3] 傅惠民.区间统计量及其分布[J].机械强度,2005,27(6):752-757.
FU Huimin. Interval statistic and its distribution[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005,27(6):752-757.
[4] 傅惠民,敖亮.区间数据整体估计方法[J].航空动力学报,2007,22(2):175-179.
FU Huimin, AO Liang. Integral estimate method for interval censored data[J]. Journal of Aerospace Power, 2007,22(2):175-179.
[5] 茆诗松.威布尔分布下恒加试验的图分析法[J].质量与可靠性,2003,(5):14-18.
Mao Shisong. Graphic analysis for constrained stress accelerated test of Weibull distribution[J]. Quality and Reliability, 2003,(5):14-18.