

文章编号: 1000-8055(2008)02-0281-05

转子进动分析的 4 个定理

廖明夫¹, 汪 玉², 谭大力²

(1. 西北工业大学 旋转机械与风能装置测控研究所, 西安 710072;

2. 海军装备研究院 舰船论证研究所, 北京 100073)

摘 要: 建立 4 个关于转子进动的定理. 定理 1 为转子进动圆的面积定理; 定理 2 为转子进动圆的周长定理; 定理 3 和 4 则描述了转子上的作用力及其所作的功与转子进动的关系. 应用上述定理, 对不平衡力、阻尼力和反对称交叉刚度产生的弹性力所做的功进行了分析. 所得结论与经典理论一致. 但发现, 当 $\omega_3 < \Omega < \omega_1$ 时, 由于 $|r_-| > |r_+|$, 反对称交叉刚度产生的弹性力做负功, $W < 0$. 这种情况下, 反对称交叉刚度为镇定因素, 有利于抑制反进动失稳.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 转子; 正进动; 反进动; 定理

中图分类号: V231.96

文献标识码: A

4 theorems on whirl transform of rotor vibration

LIAO Ming-fu¹, WANG Yu², TAN Da-li²

(1. Institute of Monitoring and Control for Rotating Machinery and Wind Turbines,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Institute of Naval Vessels, Naval Academy of Armament, Beijing 100073, China)

Abstract: The motion of a rotor can be decomposed into forward whirals and backward whirals. This approach is referred to as whirl analysis or whirl transform. It reveals the relationship between motion of a rotor and forces applied more evidently, therefore this method is widely applied to diagnosing problems in rotating machinery.

4 theorems about rotation vibration were established. Theorem 1 states that, an elliptical orbit of a rotor can always be decomposed into a forward whirl and a backward whirl. The area of the elliptical orbit is equal to the absolute value of the difference between the area of the forward whirl and that of backward whirl. Theorem 2 is associated with the circumference of an elliptical orbit and its forward whirl and backward whirl. Theorem 3 states that, the forces applied to a rotor can also be decomposed into forward whirl force and backward whirl force. The forward whirl force can only perform work on the forward whirl but not on backward whirl; vice versa, the backward whirl force can only perform work on the backward whirl but does not on the forward whirl. Theorem 4 states that the work performed by forward whirl force is equal to the dot product of forward whirl force and the displacement of rotor in the forward whirl, similarly the work performed by backward whirl force is equal to the dot product of backward whirl force and the displacement of rotor in backward whirl. The theorems are applied to determine the work performed by unbalance, viscous damping and restoring forces due to skew symmetric stiffness. The results are identical with those ob-

收稿日期: 2007-02-15; 修订日期: 2007-09-20

作者简介: 廖明夫(1969), 男, 陕西富县人, 教授、博导. 主要从事发动机结构动力学、旋转机械故障诊断和风力发电技术研究.

tained from traditional dynamics. However it is found that, when $\omega_3 < \Omega < \omega_4$, as $|r_-| > |r_+|$, the skew symmetric stiffness will act as a stabilizing force suppressing backward whirl of a rotor.

Key words: aerospace propulsion system; rotor; forward whirl; backward whirl; theorem

进动分析是剖析转子运动的重要方法. 特别是对诊断转子不平衡、不对中、裂纹、碰摩等故障能够提供更明确的征兆信息^[1-12]. 目前, 该方法已获得较广泛的应用^[1-12].

本文建立了 4 个关于转子进动的定理. 定理 1 为转子进动圆的面积定理, 即转子任何一阶进动轨迹的面积等于该阶正进动圆面积与反进动圆面积之差的绝对值. 定理 2 为转子进动圆的周长定理, 即椭圆轨迹的周长小于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹周长之和; 而大于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹中半径较大一个进动圆轨迹的周长. 定理 3 和 4 则描述了转子上的作用力及其所作的功与转子进动的关系. 定理 3 为, 转子上的作用力也可分解为正进动作用力和反进动作用力. 正进动作用力只在正进动轨迹上做工, 而不会在反进动轨迹上做工; 同理, 反进动作用力只在反进动轨迹上做工, 而不会在正进动轨迹上做工. 定理 4: 正进动作用力在正进动轨迹上所做的功等于正进动作用力幅值矢量与正进动位移幅值矢量的内积; 反进动作用力在反进动轨迹上所做的功等于反进动作用力幅值矢量与反进动位移幅值矢量的内积. 转子上作用力所做的总功等于正进动作用力所做的功与反进动作用力所做的功之代数和. 应用上述定理, 对不平衡力、阻尼力和反对称

交叉刚度产生的弹性力所做的功进行了分析. 所得结论与经典理论一致^[12]. 但发现, 当 $\omega_3 < \Omega < \omega_4$ 时, 由于 $|r_-| > |r_+|$, 反对称交叉刚度产生的弹性力做负功, $W < 0$. 这种情况下, 反对称交叉刚度为镇定因素, 有利于抑制反进动失稳.

上述的理论有助于更清晰地描述转子的涡动, 更深入地理解进动分析方法.

1 转子进动正进动和反进动

由于支承刚度的各向异性、传动系统的方向性等原因, 转子振动的轨迹一般为椭圆. 转子的椭圆运动轨迹总可以分解为正进动圆轨迹和反进动圆轨迹两个轨迹分量^[12].

$$\begin{aligned} r = r_+ e^{j\Omega} + r_- e^{-j\Omega} = & \frac{1}{2}[X(\Omega) + Y(\Omega)]e^{j\Omega} + \\ & \frac{1}{2}[X(\Omega) - Y(\Omega)]e^{-j\Omega} \end{aligned} \tag{1}$$

如图 1 所示.

其中正进动圆轨迹半径为

$$r_+ = \frac{1}{2}[X + Y] \tag{2}$$

反进动圆轨迹半径为

$$r_- = \frac{1}{2}[X - Y] \tag{3}$$

X 和 Y 分别为椭圆轨迹的 2 个半轴.

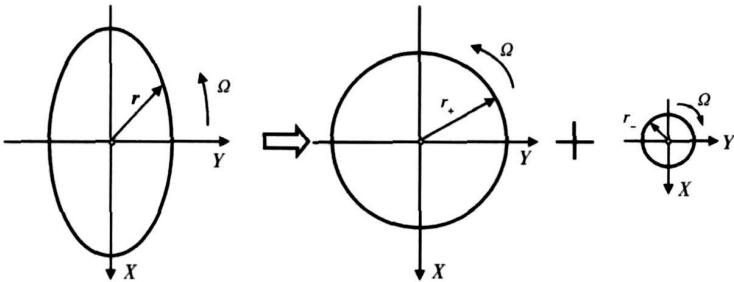


图 1 转子的椭圆轨迹分解为正进动圆轨迹和反进动圆轨迹

Fig. 1 An elliptic orbit is decomposed into forward whirl and backward whirl component

2 进动圆面积定理

如上节所述, 任何一个椭圆轨迹总可以分解成正进动圆轨迹和反进动圆轨迹两个轨迹分量.

转子的轨迹面积与转子上的作用力做功成正比. 做功的大小和正负决定了转子的稳定性.

定理 1: 椭圆轨迹的面积等于正进动圆面积和反进动圆面积之差的绝对值.

证明: 转子椭圆轨迹的方程为

$$x = X(\Omega) \cos \Omega t \tag{4}$$

$$y = Y(\Omega) \sin \Omega t \tag{5}$$

其面积为

$$A = \pi X(\Omega) Y(\Omega) \tag{6}$$

根据式(2)和式(3), 正进动圆的面积为

$$A_+ = \frac{1}{4} [X(\Omega) + Y(\Omega)]^2 \pi \tag{7}$$

反进动圆的面积为

$$A_- = \frac{1}{4} [X(\Omega) - Y(\Omega)]^2 \pi \tag{8}$$

正进动圆面积和反进动圆面积之差为

$$A_+ - A_- = \frac{1}{4} \pi 4 X(\Omega) Y(\Omega) = \pi X(\Omega) Y(\Omega) = A \tag{9}$$

在转子运动过程中有可能出现反进动圆面积大于正进动圆面积的情况. 这时取正进动圆面积和反进动圆面积之差的绝对值为椭圆轨迹的面积. 定理 1 仍然成立.

3 进动圆的周长定理

定理 2: 椭圆轨迹的周长与所分解的正进动圆轨迹和反进动圆轨迹的周长满足如下的关系:

椭圆轨迹的周长小于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹周长之和; 而大于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹中半径较大一个进动圆轨迹的周长. 可用如下的数学不等式来表达

$$\max(L_+, L_-) \leq L \leq L_+ + L_- \tag{10}$$

其中 L 为椭圆轨迹的周长, L_+ 为正进动圆轨迹的周长, L_- 反进动圆轨迹的周长. 式中的等号当仅当转子的轨迹为正进动圆轨迹或者反进动圆轨迹时成立.

证明: 椭圆的周长近似公式为

$$L \approx 2\pi Y + 4(X - Y) \tag{11}$$

正进动圆轨迹的周长为

$$L_+ = \pi(X + Y) \tag{12}$$

反进动圆轨迹的周长

$$L_- = \pi(X - Y) \tag{13}$$

$$L_+ + L_- = 2\pi X \tag{14}$$

$$\begin{aligned} L_+ + L_- - L &= 2\pi X - 2\pi Y - 4(X - Y) = \\ &= (2\pi - 4)(X - Y) > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

不等式的右端得证.

$$\begin{aligned} L \approx 2\pi Y + 4(X - Y) &> 2\pi Y + \pi(X - Y) = \\ &= \pi(X + Y) = L_+ \end{aligned} \tag{16}$$

不等式左边也得证.

当转子转一周时, 不论是椭圆轨迹矢量还是

两个进动圆轨迹矢量都同时旋转一周. 定理 2 说明, 椭圆轨迹矢量旋转的角速度不等于进动圆轨迹矢量的旋转角速度.

由图 2 可见, 转子涡动角为

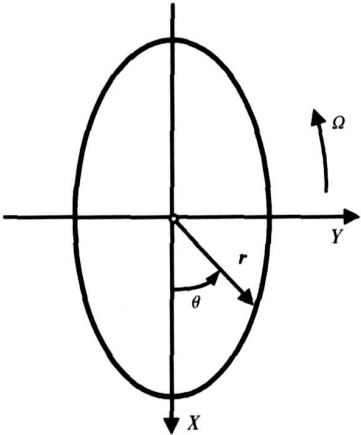


图 2 转子椭圆轨迹涡动角
Fig. 2 Whirl angle of a rotor

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{Y}{X} \tan \Omega t \tag{17}$$

涡动角速度为^[13]

$$\theta = \frac{XY}{X^2 \cos^2 \Omega t + Y^2 \sin^2 \Omega t} \Omega \tag{18}$$

说明只有当 $X = Y$ 时, 即转子发生圆轨迹涡动时, 涡动角速度与转子自转角速度相等. 图 3 表示转子自转一周涡动角速度的变化. 可见, 当转子以椭圆轨迹涡动时, 涡动角速度并非常数, 而是变化的, 变化频率是转子自转角速度 Ω 的 2 倍.

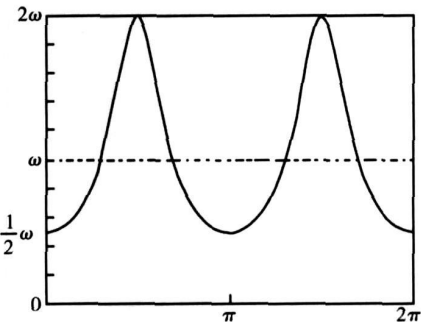


图 3 转子自转一周涡动角速度的变化

Fig. 3 Angular whirl speed of a rotor in one revolution

4 转子上的作用力所做的功

转子上会作用有不平衡力、气动力、电磁力等多种形式的力. 出现故障之后还会产生附加的作用力. 有些力会激起转子的受迫振动, 但并不向转子运动输入能量, 例如不平衡力. 但有些力, 例如

滑动轴承中的油膜力、气流间隙激振力(Alford)等在一定情况下会向转子不断输入运动能量,使转子失稳^[12].

以下分析转子上的作用力和转子进动的关系.

定理 3: 转子上的作用力也可分解为正进动作用力和反进动作用力. 正进动作用力只在正进动轨迹上做工, 而不会在反进动轨迹上做工; 同理, 反进动作用力只在反进动轨迹上做工, 而不会在正进动轨迹上做工.

定理 4: 正进动作用力在正进动轨迹上所做的功等于正进动作用力幅值矢量与正进动位移幅值矢量的内积; 反进动作用力在反进动轨迹上所做的功等于反进动作用力幅值矢量与反进动位移幅值矢量的内积. 转子上作用力所做的总功等于正进动作用力所做的功与反进动作用力所做的功之代数之和.

4.1 转子不平衡力所作的功

转子不平衡力为

$$F_{x\varepsilon} = m\varepsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \quad (19)$$

$$F_{y\varepsilon} = m\varepsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \quad (20)$$

写成复向量形式

$$\mathbf{F}_\varepsilon = F_{x\varepsilon} + jF_{y\varepsilon} = m\varepsilon\Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta)} \quad (21)$$

可见, 转子不平衡力为正进动作用力.

根据定理 3 和定理 4, 不平衡力在一个周期内所做的功为

$$W_\varepsilon = \int_0^{2\pi} |\mathbf{F}_\varepsilon| \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} |\mathbf{F}_\varepsilon| \cdot |j\mathbf{r}_+| d\theta \quad (22)$$

由于 $\mathbf{F}_\varepsilon \perp j\mathbf{r}_+$, 因此, $W_\varepsilon = 0$. 说明当转子稳定运行时, 不平衡力不做功.

4.2 阻尼力所做的功

阻尼力为

$$\mathbf{F}_d = -d_0 \dot{\mathbf{r}} = -j\Omega d_0 [r_+ e^{j\Omega t} - r_- e^{-j\Omega t}] = F_{d+} e^{j\Omega t} + F_{d-} e^{-j\Omega t} \quad (23)$$

其中

$$F_{d+} = -j\Omega d_0 r_+; F_{d-} = j\Omega d_0 r_-; d_0 \text{ 为阻尼系数.}$$

阻尼力在一个周期内所做的功

$$W_d = \int_0^{2\pi} |\mathbf{F}_d| \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} |F_{d+}| \cdot |j\mathbf{r}_+| d\theta - \int_0^{2\pi} |F_{d-}| \cdot |j\mathbf{r}_-| d\theta = -2\pi d_0 \Omega [r_+^2 - r_-^2] \quad (24)$$

可见阻尼力始终做负功, 耗散转子运动能量.

4.3 弹性力所做的功

当转子系统存在反对称交叉刚度时, 弹性力为

$$F_x = -s_0 x - s_{12} y \quad (25)$$

$$F_y = -s_0 y + s_{12} x \quad (26)$$

设转子的运动轨迹为椭圆轨迹, 轨迹矢量为

$$\mathbf{r} = r_+ e^{j\Omega t} + r_- e^{-j\Omega t} \quad (27)$$

把弹性力写成复向量形式, 并且带入轨迹矢量得

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x + jF_y = -s_0 [r_+ e^{j\Omega t} + r_- e^{-j\Omega t}] + s_{12} j [r_+ e^{j\Omega t} + r_- e^{-j\Omega t}] = \\ &= (js_{12} - s_0)r_+ e^{j\Omega t} + (js_{12} - s_0)r_- e^{-j\Omega t} = \\ &= F_+ e^{j\Omega t} + F_- e^{-j\Omega t} \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$F_+ = (js_{12} - s_0)r_+ \quad (29)$$

$$F_- = (js_{12} - s_0)r_- \quad (30)$$

弹性力在一个周期内所做的功

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} |\mathbf{F}| \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} |F_+| \cdot |j\mathbf{r}_+| d\theta - \\ &\quad \int_0^{2\pi} |F_-| \cdot |j\mathbf{r}_-| d\theta = 2\pi s_{12} [r_+^2 - r_-^2] \end{aligned} \quad (31)$$

根据定理 1, 得

$$W = 2\pi s_{12} [r_+^2 - r_-^2] = 2\pi s_{12} X Y \quad (32)$$

表明弹性力所作的功与转子涡动轨迹的面积成正比.

当转子以正进动为主时, 即 $|r_+| > |r_-|$, 反对称交叉刚度产生的弹性力做正功 $W > 0$, 使转子发生正进动失稳. 对于支承各向异性的转子, 当 $\omega_c < \Omega < \omega_k$ 时, $|r_-| > |r_+|$, 弹性力做负功, $W < 0$. 这种情况下, 反对称交叉刚度为镇定因素, 有利于抑制反进动失稳.

5 结 论

本文对转子进动分析理论进行了理论拓展, 提出了 4 个进动定理. 结论如下:

(1) 转子任何一阶进动轨迹的面积等于该阶正进动圆面积与反进动圆面积之差的绝对值;

(2) 椭圆轨迹的周长小于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹周长之和; 而大于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹中半径较大一个进动圆轨迹的周长;

(3) 转子上的作用力可分解为正进动作用力和反进动作用力. 正进动作用力只在正进动轨迹上做工, 而不会在反进动轨迹上做工; 同理, 反进动作用力只在反进动轨迹上做工, 而不会在正进动轨迹上做工;

(4) 正进动作用力在正进动轨迹上所做的功等于正进动作用力幅值矢量与正进动位移幅值矢量的内积; 反进动作用力在反进动轨迹上所做的功等于反进动作用力幅值矢量与反进动位移幅值矢量的内积. 转子上作用力所做的总功等于正进动作用力所做的功与反进动作用力所做的功之代数和;

(5) 当 $\omega < \Omega < \omega_*$ 时, 由于 $|r_-| > |r_+|$, 反对称交叉刚度产生的弹性力做负功, $W < 0$. 这种情况下, 反对称交叉刚度为镇定因素, 有利于抑制反进动失稳.

参考文献:

- [1] LIAO Mingfu, Gasch R. Crack detection in rotating shafts an experimental study[R]. IMechE 1992, Bath, England: C432/ 106.
- [2] 廖明夫. 裂纹转子动力学特性及其监测技术研究[D]. 西安: 西北工业大学博士论文, 1995.
- [3] Weigel M. Werkzeuge zur schwingungsdiagnose an turbo maschinen[C] // In: 3. symposium: methoden, nutzen und trends der schwingungsdiagnostischen Ueberwachung von Turbosätzen in Kraftwerken und Industrieanlagen. Willinger Sauerland: 1995.
- [4] LIAO MingFu, Andreas eichler and markus schatz: a new approach to detection of cracks in an anisotropic rotor[J]. Machine Vibration, 1995, 4: 147-151.
- [5] Gasch R, LIAO Mingfu. Process for early detection of a crack in a rotating shaft [M]. United States Patent, 5533400, 1996.
- [6] Rietz P, Segebart P, Liao M F. Diagnosehinweise aus der numerischen simulation von Anstreifvorgängen von rotierenden wellen[C] // VDF-Schwingungstagung (1999). VDI Duesseldorf, Berichtband.
- [7] Goldman P, Muszynska A. Application of full spectrum to rotating machinery diagnostics[J]. Orbit, 1999: 17-21.
- [8] 廖明夫, 邓小文. 诊断转子支座松动故障的一种新方法[J]. 振动、测试与诊断, 1999, 19(4): 359-363.
LIAO Mingfu, Deng Xiaowen, Yang Shengji. A new approach to diagnosing the loosening of support of a rotor [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1999, 19(4): 359-363.
- [9] 杨仲记, 廖明夫. 旋转机械状态监测与故障诊断系统[J]. 测控技术, 2000, 19(1): 56-58.
YANG Shengji, LIAO Mingfu, ZHAO Xumin. Computer aided monitoring and diagnosis system[J]. Measurement & Control Technology, 2000, 19(1): 56-68.
- [10] 邓小文, 廖明夫. 碰摩转子的弯曲和扭转振动分析[J]. 航空动力学报, 2002, 17(1): 97-104.
DENG Xiaowen, LIAO Mingfu. Robert liebich and robert gasch: coupled bending and torsional vibrations due to rotor to stator contacts [J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(1): 97-104.
- [11] 廖明夫. Andreas eichler and markus schatz: 一种识别支承各向异性的转子轴上裂纹的方法. 中国发明专利: ZL 95 115465. 6[P]. 2002-03-13.
- [12] Gasch R, Nordmann R, Pfützner H. Rotordynamik[M]. 2nd. Berlin: Springer, 2002, ISBN 3 540 41240 9.
- [13] Meirovitch L. Fundamentals of vibrations[M]. McGRAW-HILL International Edition, 2001, ISBN 0-07-041345-2.