

文章编号: 1000-8055(2007)10-1673-05

求解可压缩流动的同位网格 SIMPLE 方法研究

伏晓艳 高 歌

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院 北京 100083)

摘 要: 在 Rhie-Chou 动量插值的基础上, 推导了同位网格可压缩 SIMPLE 算法. 经过无粘流超音速凸包算例和激波/湍流边界层干扰算例计算发现, 如果对流项采用高阶有界 HLLP 格式, 密度插值采用一阶迎风中心和差分混合格式, 这种算法能够很好地模拟凸包超音速流的流动现象, 在采用了新型 GAO-YONG 湍流模型后也能够较好地模拟激波/湍流边界层干扰.

关 键 词: 航空、航天推进系统; SIMPLE 方法; 同位网格; GAO-YONG 湍流方程; 激波/湍流边界层干扰

中图分类号: O354; V231.3

文献标识码: A

Study of SIMPLE algorithm for compressible flows on non staggered grids

FU Xiaoyan, GAO Ge

(School of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Based on Rhie-Chou momentum interpolation, a SIMPLE algorithm for compressible flows of non staggered grids was deduced. With this method, the inviscid flow in a channel with a bump and shock/boundary-layer interactions were computed. If HLLP scheme is adopted for convection term, the hybrid scheme is applied to density interpolation. This method can simulate efficiently both compression waves and expansion waves in supersonic flows. With the help of GAO-YONG turbulence models, it's possible to simulate satisfactorily the shock/turbulent boundary layer interaction in a channel.

Key words: aerospace propulsion system; SIMPLE algorithm; non staggered grids; GAO-YONG turbulence model; shock/turbulent boundary-layer interaction

在计算流体力学中, 用原始变量来求解流场的方法通常可以分为以密度作为求解变量和以压力作为求解变量两大类. 以密度为基本变量求解时, 连续方程是密度的控制方程, 得到密度后再由状态方程来确定压力, 不需专门处理压力-速度的耦合关系. 这类方法在求解马赫数较高的流动问题方面已取得了很大的成功, 但对于马赫数很小的流动或不可压流动计算, 此法就受到诸多限

制. 所以在不可压流场的计算中, 广泛采用以压力为求解变量的求解方法, 这种方法对马赫数的大小没有限制, 对任何马赫数的流动均是适用的. 在这种方法中, 为了解决压力没有独立方程的困难, 先后发展了人工压缩性方法、抛射法以及压力修正法等一系列方法. 压力修正法源于 1972 年 Patankar 与 Spalding 提出的 SIMPLE 算法. 虽然 SIMPLE 算法最初是对不可压流场发展起来的,

收稿日期: 2006-10-17; 修订日期: 2007-02-20

作者简介: 伏晓艳(1980), 女, 四川广元市人, 硕士生, 主要从事计算流体相关研究.

但近年来已经成功推广到可压缩流场, 并且还在 SIMPLE 算法基础上提出了 SIMPLER 与 SIM- PLEC 等方法.

在 SIMPLE 算法中需要进行速度场与压力场的耦合, 经过众多学者的研究发展, 交错网格技术在这方面取得了巨大成功, 但对于复杂区域, 需要以速度的逆变或协变分量作为动量方程主变量进行求解, 推导繁琐, 且计算中还有大量插值运算, 三维运算时计算繁琐的缺点尤为突出. 因此, 同位网格技术在进行复杂流场计算, 比如可压缩流场计算方面已经越来越受到人们的青睐.

在可压缩流动中, 流体的可压缩性会带来诸如激波、激波/边界层干扰以及流动分离等复杂的流动现象, 这些现象的几何形态和流动机理都十分复杂, 所以对它们的数值模拟通常是十分困难的. 尤其是在可压缩湍流流动中, 现在通用的湍流的经验模式所固有的缺陷进一步增加了对这些复杂现象模拟的失真程度. 因此, 在可压缩湍流流动计算中, 除了正确选用计算方法外, 湍流模型的选择对数值计算结果好坏的影响是很关键的. GAO-YONG 可压湍流模型是基于侧偏平均方法获得的理性湍流方程, 其中不含任何经验系数, 也不使用壁面函数等经验处理. 通过对自由剪切流、边界层流动及分离流动三类流动现象的数值模拟计算^[1-3]已初步表明, 该方程组可获得高精度的统计平均结果, 也可在粗网格上获得形象逼真的大涡模拟结果, 对各种流动有广泛适应性.

综上, 本文旨在采用同位网格技术以及 SIM- PLE 算法, 同时结合 GAO-YONG 可压湍流模型来进行可压缩流动问题的计算.

1 控制方程及计算方法

1.1 控制方程

GAO-YONG 可压湍流方程组由平均流连续方程、动量方程、能量方程; 漂移流连续方程、动量方程; 状态方程以及机械能方程组成(平均量省去上标, 漂移量有波浪上标)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^T) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}((\rho E + p) u_j) = \\ \frac{\partial}{\partial x_j}((\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^T) u_i - q_j - q_j^T) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\rho} u_j) = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho} u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\rho} u_i u_j) = - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i \tilde{u}_j + \tilde{p} \delta_{ij}) + \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^T - \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^T) \end{aligned} \tag{5}$$

$$p = \rho R T \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left[l_i \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^n u_i \cdot \tilde{u}_i}{n!} = l_i (- \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i \tilde{u}_j + \tilde{p} \delta_{ij}) + \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^T - \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^T \right) - \frac{D u_i}{D t}) \end{aligned} \tag{7}$$

式中 ρ, u, p 分别为平均流的密度, 速度, 压力; $\tilde{u}, \tilde{p}$ 分别为漂移流的速度, 压力;

$\sigma_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}$ 分别为平均流的层流应力和漂移流的层流应力, $\sigma_{ij}^T, \tilde{\sigma}_{ij}^T$ 分别为平均流湍流应力和漂移流湍流应力(上标 T 表示湍流);

E 为总能量, q_j, q_j^T 分别为层流热通量和湍流热通量; l_j 为漂移位矢;

$(T, \mu, k, R, K, C_p, Pr) =$ (温度, 粘性系数, 热传导系数, 气体常数, 比例常数, 等压比热容, 普朗特常数).

具体推导以及公式说明可参见文献[1-3].

1.2 计算方法

目前非交错网格技术主要有两大类: 一类是压力梯度插值法. 它是利用一个和两个网格间距上离散的压力梯度的二阶导数的差值作为反馈项, 来弥补压力梯度计算中的误差, 从而达到解决压力波动问题的目的. 另一类是网格界面速度插值方法. Rhie 和 Chow^[4] 提出并随后发展的方法属于这一类. 该方法利用一个和两个网格间距上离散的压力梯度的差值作为反馈项, 来弥补采用中心差分时的误差. 本文采用的同位网格 SMPLE 法就是采用了 RHIE-CHOW 动量插值^[4-5]这种方法来导出压力校对方程, 从而来实现压力的求解和校正.

将连续形式的质量守恒方程对图 1 所示 P_0

单元积分, 可得其离散形式: $\sum_{j=1}^4 u_j \cdot A_j = 0$ (8)

u_j 为界面 j 上的平均流速, 需从 P_0 及 P_j 节点的值通过插值而得到. 为克服压力与速度之间的失耦, 我们需要从连续方程(1)导出联系相邻各节点上压力修正值的代数方程. 显然, 界面流速的线性插值无法达到这一目的. 为此, 我们采用 RHIE-CHOW 的动量插值思想, 则可得到动量方程在节点上的离散形式

$$u_{P_0} = h_{P_0} - \frac{V_{P_0}}{a_{P_0}} \Delta p_{P_0}, h_{P_0} = \frac{\sum_{j=1}^4 a_{P_j} u_{P_j} + S_u}{a_{P_0}} \quad (9)$$

其中, S_u 为不包括压力项的源项。

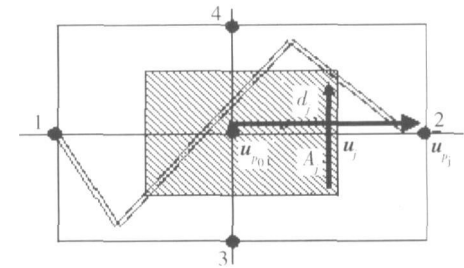


图 1 控制体
Fig. 1 Control volume

如果 P_0 和 P_j 之间的压力梯度呈线性关系, 则动量方程在界面上的离散方程可以写为

$$u_j = h_j - \left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j \frac{p_j}{\Delta},$$
$$h_j = \frac{1}{2}(u_{P_0} + u_{P_j}) + \left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j \frac{p_j}{\Delta} \quad (10)$$

其中:
 $\left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{P_0}}{a_{P_0}} + \frac{V_{P_j}}{a_{P_j}} \right), \frac{p_j}{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{P_0}}{\Delta} + \frac{p_{P_j}}{\Delta} \right)$
类似(9)、(10), 速度和压力的修正关系表达式可写为

$$u'_{P_0} = h'_{P_0} - \frac{V_{P_0}}{a_{P_0}} \frac{p'_{P_0}}{\Delta}, u'_{P_j} = h'_{P_j} - \left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j \frac{p'_{P_j}}{\Delta} \quad (11)$$

式(10)、(11)中的界面压力梯度 $\frac{p_j}{\Delta}$ 和 $\frac{p'_{P_j}}{\Delta}$, 均由界面梯度公式(12)计算得到

$$\phi_{\Delta} = \overline{\phi}_{\Delta} + \frac{A_j}{A_j \cdot d_j} [(\phi_j - \phi_0) - \overline{\phi}_{\Delta} \cdot d_j],$$

ϕ 为求解变量

(12)

将由式(12)计算的 $\frac{p'_{P_j}}{\Delta}$ 代入(11), 整理得到界面速度修正方程为

$$u'_j = h'_j - \left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j \frac{A_j}{A_j \cdot d_j} (p'_{P_j} - p'_{P_0}) - \left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j \left[\frac{p'_{P_j}}{\Delta} - \frac{A_j}{A_j \cdot d_j} \left(\frac{p'_{P_j}}{\Delta} \cdot d_j \right) \right] \quad (13)$$

由 h'_{P_0} (h'_{P_j}) 表示的速度修正在当前运算阶段是未知的, 因此在 SIMPLE 算法中这一项可被忽略掉。同时, 式(13)中下划线部分也可被忽略, 于是有:

$$u'_j = - \left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j \frac{A_j}{A_j \cdot d_j} (p'_{P_j} - p'_{P_0}) \quad (14)$$

以上便是采用 Rhie-Chou 动量插值方法得到的界面修正速度与节点修正压力的表达式。

与不可压缩 SIMPLE 算法仅需要进行速度、压力的耦合相比, 可压缩 SIMPLE 算法的主要区别就在于在压力修正方程中引入了由于密度修正值所导致的附加项, 而密度修正值是用压力修正值来表示, 通过求解压力校对方程就可得到能够反映压缩性影响的压力修正值, 进而实现压力的修正, 即可压缩 SIMPLE 算法需要进行速度、压力、密度三者之间的耦合。那么可压缩流连续方程中的质量流量修正就应表示为

$$\rho u_j \cdot A = (\rho^* + \rho') (u_j^* + u'_j) \cdot A =$$
$$\rho^* u_j^* \cdot A + \rho^* u'_j \cdot A + \rho' u_j^* \cdot A + \rho' u'_j \cdot A \quad (15)$$

忽略二阶项 $\rho' u'_j \cdot A$, 同时采用式(14)对 u'_j 的修正, 可得

$$\rho u_j \cdot A = \rho^* u_j^* \cdot A - \rho^* \left[\frac{V_P}{a_P} \right]_j \cdot$$
$$\frac{A_j}{A_j \cdot d_j} (p'_{P_j} - p'_{P_0}) \cdot A + \rho' u_j^* \cdot A \quad (16)$$

据理想气体状态方程, 可得 $\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} p' = K p'$, 系数 K 之值取决于气体的种类及所经历的过程。对理想气体的等熵流动, 有 $K = 1/\gamma RT$, 其中 $\gamma = C_p/C_v$ (比热容比), R 为气体常数。值得指出, 在计算中 K 值仅影响迭代过程的收敛特性, 但不会影响最终收敛的结果。

控制体界面上的密度值 ρ 及其修正值 ρ_j 采用一阶迎风格式与中心差分格式组合的混合格式^[6]插值求得, 这种格式具有比迎风格式更高的精度, 同时又具有比中心格式更好的对流稳定性:

$$\rho_e = \rho_e^{UD} + \alpha \rho (\rho_e^{CDS} - \rho_e^{UD}), 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (17)$$

其中 e 表示控制体界面, FUD 表示一阶迎风, CDS 表示中心差分, 则有

$$\rho_e^{FUD} = \rho_{P_0} \frac{\max[F_j^*, 0]}{F_j^*} - \rho_{P_j} \frac{\max[-F_j^*, 0]}{F_j^*},$$
$$\rho_e^{CDS} = \frac{\rho_0 + \rho_j}{2} \quad (18)$$

F_j^* 表示界面流量, 将 $\rho = K p'$ 及式(18)代入(17)整理得到

$$\rho' = (1 - \alpha) \left[K_{P_0} p'_{P_0} \frac{\max[F_j^*, 0]}{F_j^*} - K_{P_j} p'_{P_j} \cdot \frac{\max[-F_j^*, 0]}{F_j^*} \right] + \alpha \left[\frac{K_{P_0} p'_{P_0} + K_{P_j} p'_{P_j}}{2} \right] \quad (19)$$

那么将式(19) 带入可压缩流连续方程(16), 再经过整理得到压力修正方程

$$a_{p_0}^p p_{p_0}' = \sum_{j=1}^4 a_{p_j}^p p_{p_j}' + b = \sum_{j=1}^4 a_{p_j}^p p_{p_j}' + \sum_{j=1}^4 F_j^*,$$
$$b \text{ 为源项 } b = \sum_{j=1}^4 F_j^* \tag{20}$$

其中

$$a_{p_j}^p = \vartheta_j^* \left(\frac{V_p}{a^p} \right)_j \frac{|A_j|}{|d_j|} + (1 - \alpha_p) K_{p_j} \cdot$$
$$\frac{\max[-F_j^*, 0]}{F_j^*} \mathbf{u}_j^* \cdot \mathbf{A}_j - \frac{1}{2} \alpha K_{p_j} \mathbf{u}_j^* \cdot \mathbf{A}_j,$$
$$a_{p_0}^p = \sum_{j=1}^4 \vartheta_j^* \left(\frac{V_p}{a^p} \right)_j \frac{|A_j|}{|d_j|} +$$
$$(1 - \alpha_p) K_{p_0} \sum_{j=1}^4 \frac{\max[-F_j^*, 0]}{\vartheta_j^*} + \frac{1}{2} \alpha K_{p_0} \sum_{j=1}^4 \frac{F_j^*}{\vartheta_j^*}$$

求解压力修正方程获得 p' 后, 按以下方式修正节点的速度及压力^[7]

$$\mathbf{u}_{p_0} = \mathbf{u}_{p_0}^* - \frac{V_{p_0}}{a^p} p_{p_0}', \quad p_{p_0}' = \frac{\sum_{j=1}^4 p_{p_j}' A_j}{a^p},$$
$$p_{p_0} = p_{p_0} + \alpha p_{p_0}', \quad \alpha \text{ 为松弛因子} \tag{21}$$

其中, 界面 j 的压力修正值 p_{p_j}' , 由与界面相邻的两节点压力修正值线性插值得出.

动量方程中扩散项是二阶导数, 对它采用中心差分格式离散, 不会对计算造成什么困难, 所以本文中采用这种格式离散扩散项. 而对流项是一阶导数, 在其离散格式的选取上, 我们应尽量选取那些既可以克服或减轻假扩散又可以提高对流项稳定性的一些格式. 对于一般的流动与换热问题, 诸如 QUICK 这样的格式已经可以满足工程计算的需要. 但对于某些类型的问题, 如激波等有物理量的值在计算区域中某一位置或微小区间发生急剧变化时(因而该处局部梯度很大), 对流项的不同离散格式会显示另外一种重要的特性, 即“有界性”^[7]. 所以, 本文中对流项采用二阶精度的 HLPA 格式离散^[7]. 这是一种具备有界性的高阶组合格式, 较之其它不具有有界性的高阶格式(SUD, QUICK, TUD 等), 这种格式可以有效地克服振荡及越界现象, 使计算结果有较高的准确度.

2 计算实例

为了验证本文算法的正确性, 选取了以下 2 个较为典型的二维算例进行了计算.

2.1 无粘流场算例

文献[8]给出了一个二维圆弧凸包通道中的无粘超声流动算例. 此凸包通道其高度和凸包长度均为 1, 通道总长为 3, 凸包高度为凸包长度的 4%. 来流马赫数 $Ma = 1.4$, 进口变量给定, 出口变量均外推. 计算网格为 65×17 . 图 2 为此超声流动的等马赫数线分布图, 图 3 为上下壁面马赫数分布图. 对比表明, 本文计算结果与文献结果符合较好.

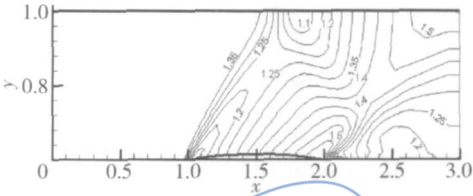


图 2 等马赫数分布

Fig. 2 Mach number contours distribution

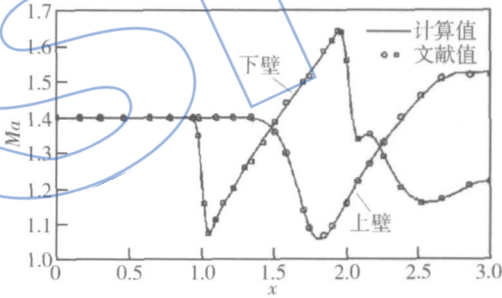


图 3 壁面马赫数分布

Fig. 3 Mach number distribution on walls

2.2 粘性流场算例

文献[9]给出了由 Liu 完成的二维圆弧凸包管道粘性流动的实验, 管道具体几何尺寸参见此文献. 此算例是同位网格 SIMPLE 算法结合 GAO-YONG 湍流模型计算的湍流流场算例. 管道自由来流马赫数 $Ma = 0.675$, 雷诺数 $Re = 1.67 \times 10^6$. 入口给定总温总压, 出口给定背压. 来流在通道中形成一道弧形激波, 并与壁面边界层相互作用, 在凸包后产生分离. 图 4 是激波附近的等密度线分布, 图 6 是激波后分离区速度矢量图, 它们清晰地显示了弧形激波的产生以及在给定条件下, 激波与壁面边界层干扰导致的边界层增厚和分离漩涡的产生. 图 5 是上、下壁面的压力分布图, 可见计算结果与实验值吻合较好.

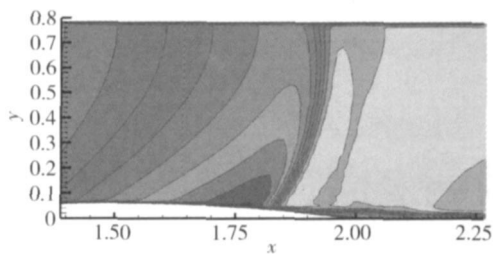


图 4 等密度线分布

Fig. 4 Density contours distribution

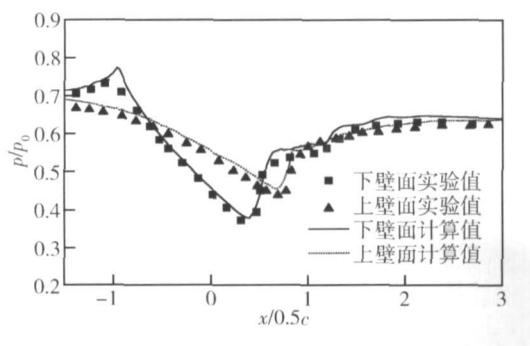


图 5 壁面压力分布

Fig. 5 Pressure distribution on walls

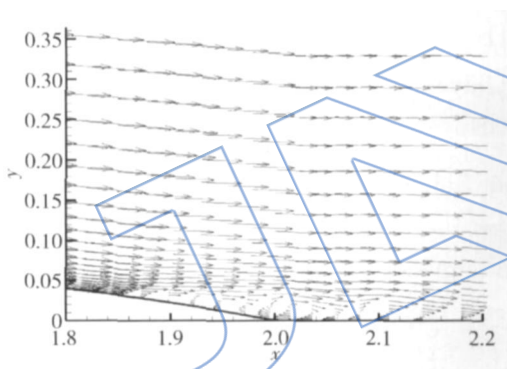


图 6 分离区速度矢分布

Fig. 6 Velocity vector distribution in separation region

3 结 论

本文运用在 Rhie-Chow 动量插值基础上推导的同位网格 SIMPLE 算法, 对二维圆弧凸包管道的无粘流动和粘性流动进行了数值模拟. 计算结果与文献数据以及实验结果吻合较好, 说明本文发展的可压缩 SIMPLE 算法:

(1) 能够胜任可压缩流场计算, 可以准确模拟

可压流动中的激波、膨胀波、压缩波等典型现象, 此外它不受求解对象的马赫数范围限制, 可以计算从亚声速到超声速的流动.

(2) 与新型 GAO-YONG 湍流模型结合, 成功模拟了激波/边界层干扰问题, 表明此算法是完全适合可压缩湍流问题的计算的, 同时也为 GAO-YONG 湍流模型的适用性与正确性提供了佐证.

参考文献:

- [1] 高歌, 熊焰. 不可压湍流平均流与拟序流的各项异性模式理论及其数值验证[J]. 航空动力学报, 2000, 15(1): 1-11. GAO Ge, YONG Yan. The united modeling theory for both of mean flow and coherent flow of incompressible turbulence[J]. Journal of Aerospace Power, 2000, 15(1): 1-11.
- [2] 高歌, 熊焰. 不可压湍流的控制方程[J]. 工程热物理学报, 2002, 23(2): 158-162. GAO Ge, YONG Yan. The control equations of incompressible turbulent flows [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 23(2): 158-162.
- [3] 高歌, 任鑫. 使用 GAO-YONG 方程组对可压湍流平板边界层的数值模拟[J]. 航空动力学报, 2004, 19(3): 289-293. GAO Ge, REN Xin. The calculation of wall boundary layer using GAO-YONG turbulence equations[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(3): 289-293.
- [4] Rhie C M, Chow W L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation [J]. AIAA J, 1983, 21(11): 1525-1532.
- [5] Przulj V, Basara B. A simple based control volume method for compressible flows on arbitrary grids [R]. AIAA 2002-3289, 2002.
- [6] Demirdzic I, Lilek I, Peric M. A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds[J]. Int J Numer Heat Fluids, 1993, 16: 1029-1050.
- [7] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京, 科学出版社, 2000. TAO Wenquan. The recent advance in numerical heat transfer[M]. Beijing: Science Publishing Company, 2000.
- [8] Rhie C M. A pressure based Navier-Stokes solver using the multigrid method[R]. AIAA 86-0207, 1986.
- [9] LIU X. Shock/boundary layer interaction on curved surfaces at transonic speeds[D]. Ph. D. Thesis, Cambridge: Engineering Department, 1985.