

文章编号: 1000-8055(2007) 11-1898-05

统一粘塑性本构方程一致切线刚度矩阵的研究

王庆五, 杨晓光, 石多奇

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘 要: 统一粘塑性本构方程是微分或增量形式的方程组, 内变量是隐式的, 一致切线刚度矩阵很难给出明确的表达式. 针对包含热恢复项的统一的粘塑性本构方程, 在向后欧拉积分的基础上, 为本构模型推导和确定了一个新的考虑率相关塑性的一致切线刚度矩阵(Consistent tangent modulus)的表达式, 并在通用的有限单元分析程序 MARC 中实现. 通过一些算例的有限元分析, 检验了一致切线刚度矩阵的可行性.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 粘塑性; 本构方程; 隐式积分; 一致切线刚度矩阵

中图分类号: V231. 91

文献标识码: A

Research on consistent tangent modulus for unified viscoplastic constitutive equations

WANG Qing-wu, YANG Xiao-guang, SHI Duo-qi

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Unified viscoplasticity constitutive equations are a system of integral or incremental equations with implied internal variables. So, it is difficult to provide a well-defined expression of the consistent tangent modulus. Based on the backward Euler's integral for unified viscoplasticity constitutive equations, a new expression of consistent tangent modulus was derived for rate-dependent plasticity. The constitutive equations and consistent tangent modulus expression were implemented in a commercial finite element code-MARC. The numerical examples of finite elements verify the feasibility of consistent tangent modulus.

Key words: aerospace propulsion system; viscoplasticity; constitutive equations; implicit integration; consistent tangent modulus

在研究材料本构方程应力积分方案的同时, 一般都会给出相应的一致切线刚度矩阵的表达形式, 文献[1]利用弹性预测/塑性矫正的方法来积分本构方程, 并给出一致切线刚度矩阵的运算方法. Peric 等人^[2-3]描述了一种一致切线刚度矩阵的近似方法. 但是由于本构方程的多样性和复杂性, 并不是所有的本构方程都已经确定了精确的一致切线刚度矩阵的表达形式, 对一致切线刚度矩阵的研究一直在进行. 统一粘塑性本构方程是微分形式的(或增量形式的)方程组, 内变量是隐

式的, 一致切线刚度矩阵很难给出明确的表达式, 一般都用弹性刚度矩阵来代替, 国内只有人在研究材料的棘轮行为时, 用径向回退法给出未考虑热恢复项的切线刚度矩阵的表达形式^[4]. 本文针对能够描述包括热恢复效应在内的多种力学现象的统一粘塑性本构方程, 给出一种一致切线刚度矩阵的计算方法.

在有限元中结构平衡方程的求解不断地进行 Newton-Raphson 迭代过程, 而为了保持 N-R 方法二阶收敛性, 一致切线刚度矩阵必须与积分本构方程

收稿日期: 2006-11-14; 修订日期: 2007-03-10

作者简介: 王庆五(1978-), 男, 湖北襄樊人, 博士生, 主要从事航空发动机强度和机械设计的研究.

的数值运算相一致^[1,5-8],本文的作者已经给出了这种统一粘塑性本构方程的数值积分运算^[9],在本篇文章中,将给出与之对应的一致切线刚度矩阵。

1 一致切线刚度矩阵

隐式积分方法被认为是保持应力结果准确性的最好运算方法^[1,10-14],在后退的欧拉积分方法基础上,对考虑热恢复效应统一的粘塑性本构方程,建立一致切线刚度矩阵的计算方法。

1.1 本构方程的离散化

在加载步 n 到加载步 $n+1$ 之间,通过后退欧拉积分方法将统一的粘塑性本构方程离散,本构方程采用 Armstrong 和 Frederick 非线性运动硬化模型^[15]加上描述时间硬化恢复效应项,离散后得到如下形式

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (3)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Delta p_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad (4)$$

$$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} - \mathbf{X}'_{n+1}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1})} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} - \mathbf{X}'_{n+1}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}\|} \quad (5)$$

$$\Delta p_{n+1} = \left(\frac{F_{n+1}}{K} \right)^n \Delta t_{n+1} \quad (6)$$

$$\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n \quad (7)$$

$$F_{n+1} = J_2(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}) - R_{n+1} \quad (8)$$

$$\Delta R_{n+1} = b(Q - R_{n+1}) \Delta p_{n+1} \quad (9)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{n+1}^{(k)} \quad (10)$$

$$\mathbf{X}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{X}_n^{(k)} + \frac{2}{3} c^{(k)} a^{(k)} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p -$$

$$c^{(k)} \Phi(p_{n+1}) \mathbf{X}_{n+1}^{(k)} \Delta p_{n+1} -$$

$$\beta^{(k)} |J_2(\mathbf{X}_{n+1}^{(k)})|^{r^{(k)}-1} \mathbf{X}_{n+1}^{(k)} \quad (11)$$

$$\Phi(p_{n+1}) = \Phi_s + (1 - \Phi_s) e^{-\omega p_{n+1}} \quad (12)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ 分别为 $n+1$ 步的总应变、非弹性应变和弹性应变增量; $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ 为非弹性应变增量张量; $\mathbf{D}$ 为刚度张量; $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ 和 $\mathbf{X}'_{n+1}$ 分别表示偏应力和偏背应力张量。 J_2 是第二不变量, $\langle * \rangle$ 为 Macauley 括号。

1.2 应力积分隐式算法

如果在 t_n 时刻(即载荷步 n) 的变量 $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$, $\boldsymbol{\sigma}'_n$ 和 $\mathbf{X}_n$ 等都已经求出,并且 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ 和 Δt_{n+1} 给定,则可利用弹性预估-塑性校正方法求出满足离

散本构模型的 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ^[9]。

引入弹性尝试应力

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_n + 2 \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}'_{n+1} \quad (13)$$

首先假设 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ 仅由弹性应变构成,取 $\Delta p_{n+1} = 0$,并且积分 $\mathbf{X}_{n+1}^{(k)}$ 和 R_{n+1} 的方程,判断屈服函数 F_{n+1} 的符号。

如果 $F_{n+1} \leq 0$,则表明该加载步没有发生屈服,可以认为 $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ 就是真正的 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ 。如果 $F_{n+1} > 0$,则表明在该加载步发生了屈服, $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ 就不是真正的 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ 。Hartmann 等^[15]研究表明,对于具有非线性随动硬化规律的塑性和粘塑性本构模型,都可以化简为一个非线性标量方程来求解塑性应变增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$,这里将其转化为求解标量 Δp_{n+1} ,求出 Δp_{n+1} 后,用 Δp_{n+1} 更新所有的变量,最后得到 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ 。具体过程见文献[9]。

1.3 一致切线刚度矩阵

有限元程序要求计算弹塑性本构模型的一致切线矩阵,在本构方程的积分过程中,需要得到基于离散本构模型的、有限元整体节点平衡迭代所需的一致切线刚度矩阵 $d\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}/d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$,该矩阵是用来导出在时间增量结束时联系到一个应变增量矢量的无穷小扰动对应应力分量的变化。

对公式(3)~(5)求微分可得

$$d\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} : (d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (14)$$

$$d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (d\Delta p_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} + \Delta p_{n+1} d\mathbf{n}_{n+1}) \quad (15)$$

$$d\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{J}_{n+1} : (d\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} - d\Delta \mathbf{X}'_{n+1}) \quad (16)$$

其中 $\mathbf{J}_{n+1} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}\|} (\mathbf{I}_4 - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1})$ 。式中符号 $\otimes$ 表示张量积, $:$ 表示张量缩并, $\mathbf{I}_4$ 表示四阶单位张量。

对公式(6)~(8)求微分可得

$$d\Delta p_{n+1} = \frac{n\Delta t}{K} \left(\frac{F_{n+1}}{K} \right)^{n-1} dF_{n+1} \quad (17)$$

$$dF_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \mathbf{n}_{n+1} : (d\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} - d\Delta \mathbf{X}'_{n+1}) - \frac{b(Q - R_{n+1})}{1 + b\Delta p_{n+1}} d\Delta p_{n+1} \quad (18)$$

$$d\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = 2 \mathbf{G} \mathbf{I}_d : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - 2 \mathbf{G} d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{I}_d = \left[\mathbf{I}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \right]$$

式中下标 d 表示对一张量进行取偏量操作, $\mathbf{I}_2$ 是二阶单位张量。

微分公式(10)~(12)并整理得

$$d\Delta X_{n+1} = X_{n+1}^0 d\Delta p_{n+1} + \sum_k^N H_{n+1}^{(k)} : d\Delta \varepsilon_{n+1}^p \quad (20)$$

其中

$$X_{n+1}^0 = M^{-1} : (-1) \sum_k^N \{ c^{(k)} [\Phi(p_{n+1}) + \Delta p_{n+1} (1 - \Phi_s) (-w) e^{-wp_{n+1}}] X_{n+1}^{(k)} \} H_{n+1}^{(k)} = M^{-1} : \frac{2}{3} a^{(k)} c^{(k)} I_4$$

$$M = [1 + c^{(k)} \Phi(p_{n+1}) \Delta p_{n+1} + \beta^{(k)} | J_2(X_{n+1}^{(k)}) |^{r^{(k)}-1} J I_4 + \frac{3}{2} \beta^{(k)} (r^{(k)} - 1) | J_2(X_{n+1}^{(k)}) |^{r^{(k)}-3} X_{n+1}^{(k)} \otimes X_{n+1}^{(k)}]$$

将公式(16)代入公式(15)得

$$d\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \frac{\sqrt{3}}{2} [\Delta p_{n+1} n_{n+1} + \Delta p_{n+1} J_{n+1} : (d\Delta \sigma_{n+1}' - d\Delta X_{n+1}')] \quad (21)$$

将公式(18)代入公式(17)得

$$d\Delta p_{n+1} = \frac{n\Delta t}{K} \left(\frac{E_{n+1}}{K} \right)^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2} n_{n+1} : (d\Delta \sigma_{n+1}' - d\Delta X_{n+1}') - \frac{n\Delta t}{K} \left(\frac{E_{n+1}}{K} \right)^{n-1} \frac{b(Q - R_{n+1})}{1 + b\Delta p_{n+1}} d\Delta p_{n+1} \quad (22)$$

将公式(19)与(20)的差代入公式(22),整理后得

$$d\Delta p_{n+1} = A \frac{\sqrt{3}}{2} n_{n+1} : (2GI_d : d\Delta \varepsilon_{n+1} - 2Gd\Delta \varepsilon_{n+1}^p - \sum_k^N H_{n+1}^{(k)} : d\Delta \varepsilon_{n+1}^p) \quad (23)$$

其中

$$A = \frac{\frac{n\Delta t}{K} \left(\frac{E_{n+1}}{K} \right)^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2} n_{n+1} : X_{n+1}^0 + \frac{n\Delta t}{K} \left(\frac{E_{n+1}}{K} \right)^{n-1} \frac{b(Q - R_{n+1})}{1 + b\Delta p_{n+1}}}{1 + \frac{n\Delta t}{K} \left(\frac{E_{n+1}}{K} \right)^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2} n_{n+1} : X_{n+1}^0 + \frac{n\Delta t}{K} \left(\frac{E_{n+1}}{K} \right)^{n-1} \frac{b(Q - R_{n+1})}{1 + b\Delta p_{n+1}}}$$

将公式(19)与(20)的差代入公式(21)得,整理后得

理后得

$$d\Delta \varepsilon_{n+1}^p = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta p_{n+1} J_{n+1} : (2GI_d : d\Delta \varepsilon_{n+1} - 2Gd\Delta \varepsilon_{n+1}^p - \sum_k^N H_{n+1}^{(k)} : d\Delta \varepsilon_{n+1}^p) + \frac{\sqrt{3}}{2} (n_{n+1} - \Delta p_{n+1} J_{n+1} : X_{n+1}^0) d\Delta p_{n+1} \quad (24)$$

将公式(23)代入公式(24),整理后得

$$d\Delta \varepsilon_{n+1}^p = J_{n+1}^0 : (2GI_d : d\Delta \varepsilon_{n+1} - 2Gd\Delta \varepsilon_{n+1}^p - \sum_k^N H_{n+1}^{(k)} : d\Delta \varepsilon_{n+1}^p) \quad (25)$$

其中

$$J_{n+1}^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta p_{n+1} J_{n+1} + \frac{3}{2} A (n_{n+1}^0 \otimes n_{n+1})$$

$$n_{n+1}^0 = (n_{n+1} - \Delta p_{n+1} J_{n+1} : X_{n+1}^0)$$

由公式(25)可以得到

$$\frac{d\Delta \varepsilon_{n+1}^p}{d\Delta \varepsilon_{n+1}} = L_{n+1}^{-1} : J_{n+1}^0 : 2GI_d \quad (26)$$

其中

$$L_{n+1} = I + J_{n+1}^0 : \left(2GI + \sum_k^N H_{n+1}^{(k)} \right)$$

公式(14)可以改写成

$$d\Delta \sigma_{n+1} = D : d\Delta \varepsilon_{n+1} - 2GI : d\Delta \varepsilon_{n+1}^p \quad (27)$$

结合公式(26)最终得到

2 算例和讨论

基于上节的结果,将统一粘塑性本构模型以材料子程序(HYPELA)的方式嵌入有限元分析程序MARC,进行应力-应变的计算.在数值计算中,使用隐式欧拉积分方法,使用材料Udimet720li,材料常数通过控制应变的单轴实验数据来获得,实验包括循环和蠕变,使用分组、分步和逐步逼近的策略得到优化结果.650 °C时材料常数如下: $E = 186\,095\text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $K = 526$, $k = 500\text{ MPa}$, $n = 30.5$; $a_1 = 123\text{ MPa}$, $a_2 = 181\text{ MPa}$, $a_3 = 264\text{ MPa}$, $Q = -276$, $c_1 = 1\,129$, $c_2 = 47$, $c_3 = 908$, $b = 894$; $\beta = 3.3 \times 10^{-4}\text{ MPa/s}$, $\beta = 6.8 \times 10^{-11}\text{ MPa/s}$, $\beta = 3.4 \times 10^{-7}\text{ MPa/s}$, $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.75$, $r_3 = 1.77$; $\Phi_s = 0.85$, $\omega = 15$, $m_1 = 0.0$, $m_2 = 1.55$, $m_3 = 30$; $b = 1\,417.2$, $p = 16.3$, $q = 14.5$.

2.1 材料单调拉伸行为的模拟

首先利用一个三维20节点六面体等参单元通过MARC来模拟材料在0.01/s应变率下的单调拉伸机械应力-应变曲线,并将计算结果与实验结果对比,如图1所示.

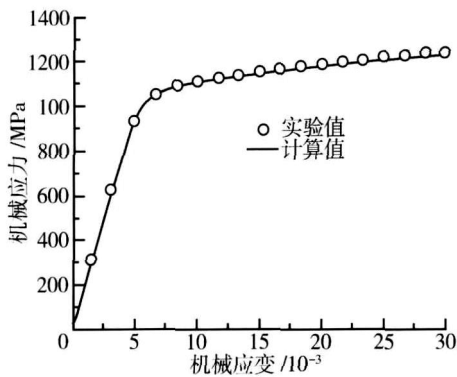


图 1 应变率为 0.01 计算结果与实验结果的对比

Fig.1 Compare of computed result with tested one while strain rate is 0.01

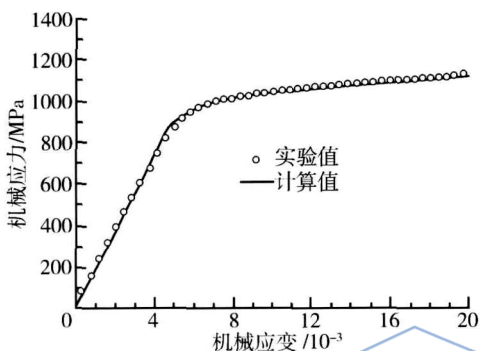


图 2 应变率为 0.0001 计算结果与实验结果的对比

Fig.2 Compare of computed result with tested one while strain rate is 0.0001

模拟材料在 0.0001/s 应变率下的单调拉伸机械应力-应变曲线,并将计算结果与实验结果对比,如图 2 所示。

2.2 控制载荷时的应变响应

单轴状态下,控制应力载荷,载荷为梯形波形 1-1-1-1,最大应力为 975 MPa,单调拉伸的机械应变响应模拟,并将模拟结果与实验结果对比,如图 3 所示。

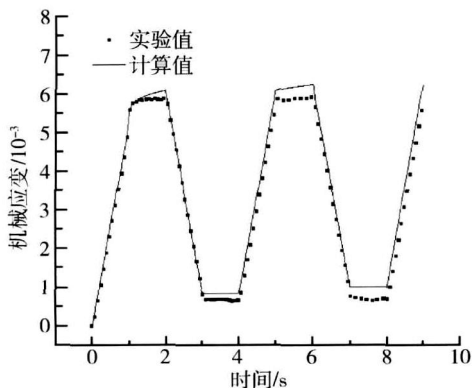


图 3 控制载荷时的机械应变响应

Fig.3 Simulated strain response under controlled stress

2.3 蠕变计算结果

控制应力载荷为 900 MPa,保载时间为 100 h,蠕变曲线模拟,并将模拟与实验结果对比,如图 4 所示。

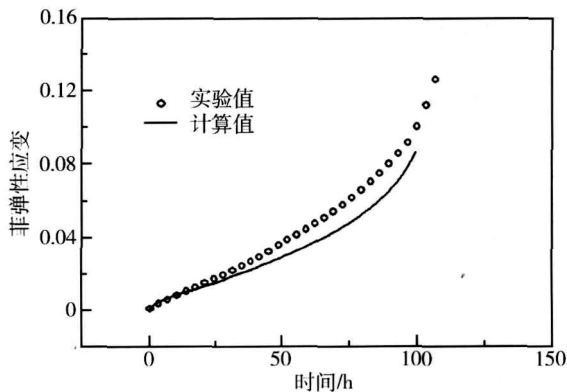


图 4 蠕变曲线模拟

Fig.4 Simulated creep data

3 结 论

针对考虑热恢复效应的统一粘塑性本构方程,在向后欧拉积分 (Backward Euler Integration) 的基础上,给出了一个新的考虑率相关塑性的一致切线刚度矩阵的表达式。

在单轴条件下,也可以不嵌入 MARC 程序来进行应力-应变的计算,而是直接使用一致切线刚度矩阵来计算,事实上这样还要简单,这样的计算结果也表明了一致切线刚度矩阵是有效的。

通过 MARC 的一些具体算例表明:在率相关塑性情况下,即使在较大的载荷下都能得到单拉行为的模拟结果;对复杂载荷历程和蠕变也能得到相当好的模拟结果,说明了一致切线刚度矩阵是可行的。

参考文献:

[1] Simo J C, Taylor R L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity [J]. Comput Methods Appl. Mech. Engrg, 1985, 48(3) : 101-118.

[2] Peric D. On consistent stress rates in solid mechanics: computational implications [J]. Methods Engrg, 1992, 33(4) : 799-817.

[3] Peric D, Owen D R J, Honnor M E. A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues [J]. Comput Methods Appl. Engrg, 1992, 94(2) : 35-61.

[4] 康国政. 循环稳定材料的棘轮行为: II 隐式应力积分算法和有限元实现 [J]. 工程力学, 2005, 22(3) : 204-209.

KANG Guozheng. Ratcheting of cyclically stable materi-

- als: **II** Implicit stress integration algorithm and finite element implementation[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(3): 204-209.
- [5] Simo J C, Taylor R L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity[J]. Methods Engrg, 1986, 22(4): 649-670.
- [6] Nagtegaal J C. On the implementation of inelastic constitutive with special reference to large deformation problems [J]. Comput Methods Appl. Mech. Engrg, 1982, 33(6): 469-484.
- [7] Arminjon M, Bacroix B. On plastic potentials for anisotropic metals and their derivation from the texture function[J]. Acta. Mech, 1990, 88(1): 219-243.
- [8] Ronda J, Murakawa H, Oliver G J, et al. Thermo-mechano-metallurgical model of welded steel, Part **II**: Finite element formulation and constitutive equations[J]. Transactions of Japanese Welding Research Institute, 1995, 24(3): 93-113.
- [9] 王庆五, 杨晓光, 石多奇. IN738LC 材料 Chaboche 热粘塑性本构模型的隐式 Euler 格式[J]. 航空动力学报, 2005, 20(6): 964-968.
- WANG Qingwu, YANG Xiaoguang, SHI Duoqi. Implicit Euler form of Chaboche thermal viscoplastic model of IN738LC material[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(6): 964-968.
- [10] Ortiz M, Popov E P. Accuracy and stability of integration algorithms of elastoplastic constitutive equations [J]. Meth. Engrg, 1985, 21(4): 1561-1576.
- [11] Dodds R H. Numerical techniques for plasticity computations in finite element analysis[J]. Comput Struct, 1987, 26(6): 767-779.
- [12] Geus A, Potts D M. Critical state models in computational geomechanics[J]. Engrg Comput, 1988, 5(6): 178-197.
- [13] Borja R I, Rhee S, Seed R B. Numerical simulation of excavation in elasto-plastic soils[J]. Anal. Meth. Geomech, 1989, 13(2): 231-249.
- [14] Crisfield M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures[M]. Essentials, Wiley, New York: 1991.
- [15] Armstrong P J, Frederick C O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect [R]. Technical Report RD/B/N731, General Electricity Generating Board, Berkeley Nuclear Laboratories, 1996.