

文章编号: 1000-8055(2008)07-1318-05

改进的三维高精度通用单胞模型

孙志刚, 高希光, 宋迎东, 胡绪腾
(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 基于复合材料细观力学周期性假设, 对高精度通用单胞模型进行了改进, 并推广到三维。模型中用界面的平均量代替细观位移函数中解系数, 并利用细观单元力学方程的分析与求解, 建立了细观平均量与复合材料宏观平均量间的联系。改进的高精度通用单胞模型的求解方程数目减少了大约 55%, 求解时间缩短, 并且消除了亚子胞的概念。算例分析表明该模型的计算结果与细观有限元结果具有较好的一致性。

关 键 词: 复合材料; 高精度通用单胞模型; 平均量; 细观力学

中图分类号: TB33

文献标识码: A

Efficient reformulation of 3-D high fidelity generalized method of cells

SUN Zhigang, GAO Xiguang, SONG Yingdong, HU Xuteng

(College of Energy and Power Engineer,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract: The efficient reformulation of 3-D high fidelity generalized method of cells had been put forward. The model was presented based on the hypothesis of periodicity in composite microstructure. In this approach, surface averaged quantities were the primary variables which replaced the coefficient of the displacement after the mechanical equations were analyzed and answered in microscopic elements. This reduced the number of equations involved and eliminate the concept of generic cells. Numerical results based on the model agrees well with available results from experiments and theoretical analysis.

Key words: composite; high fidelity generalized method of cells; surface averaged quantities; micromechanics

金属基和陶瓷基复合材料具有较高的比强度、比刚度以及良好的抗蠕变、耐高温等性能, 因此在航空航天领域具有十分广阔的应用前景。然而, 复合材料即表现出宏观特性, 又具有明显的细观结构特性, 复合材料力学是具有两层次的力学理论^[1]。在宏观尺度上, 可将复合材料当作连续体, 用连续介质力学的理论研究复合材料的力学行为, 但无法研究对宏观行为有重要影响的细观尺度上各组分相的变形及损伤失效行为。在细观尺度上, 复合材料具有包含多种组分相的非匀质

结构, 复合材料的细观力学在宏观有效性能以及细观应力、应变场的分析中取得了一定的进展。由 NASA 在上个世纪 90 年代提出的通用单胞模型 (Generalized method of cells 以下简称 GMC)^[2] 具有宏-细观统一的特点, 能够直接从细观几何结构导出复合材料有效性能, 并能够得到复合材料的细观应力和应变场。国内文献[3-6]较早在这方面开展了跟踪和进一步发展的研究工作。然而该模型由于采用了应力连续条件以及线性位移场模式, 导致了无正应力与剪应力间的耦合, 无法得

收稿日期: 2007-07-09; 修订日期: 2008-05-12

基金项目: 航空科学基金(01C52017, 05C52013); 国防 973 项目; 博士点基金(20070287039)

作者简介: 孙志刚(1976-), 男, 副教授, 辽宁绥中人, 主要研究方向航空发动机结构、强度与振动。E-mail: szg_mail@nuaa.edu.cn

到准确的细观应力和应变场. 最近 Aboudi 等人把高阶理论^[7]的思想引入到通用单胞模型中来, 发展了高精度通用单胞模型^[8] (High fidelity generalized method of cells, 简称 HFGMC), 该模型能够更好的预测材料的细观应力以及应变场, 但该模型的计算效率较低^[9]. 本文对高精度通用单胞模型进行了改进, 降低了求解方程的数目, 提高了计算效率.

1 GMC 模型的理论基础

假设多相复合材料在 x_2 - x_3 方向是周期排列的, 如图 1 所示. 其中代表性体积单元用高亮度的方框表示, 在均匀化理论中, 位移可以渐进的展开成下列形式:

$$u_i(x, y) = u_{0i}(x, y) + \delta u_{1i}(x, y) + \delta^2 u_{2i}(x, y) + \dots \tag{1}$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 是宏观坐标, $y = (y_1, y_2, y_3)$ 是与周期代表性体积单元有关的细观坐标.

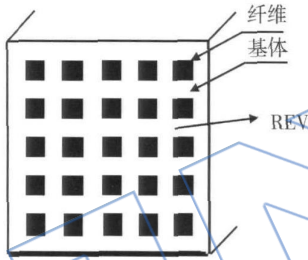


图 1 复合材料周期性细观结构

Fig. 1 Periodic structure of composite in micro composite level

材料的周期性暗示了在方程(1)中的不同阶项 u_{ai} ($a = 1, 2, \dots$) 间有下列的约束条件:

$$u_{ai}(x, y) = u_{ai}(x, y + d) \tag{2}$$

其中 d 表示材料细观尺度的特征长度. 位移 u_{0i} 是 u_i 的平均值, 因此, 它不是细观尺度 y_i 的函数, 只是宏观坐标 x_i 的函数, 只要通过胡克定律和平衡方程就可以求出来. 即

$$u_{0i} = u_{0i}(x) = \bar{u} \tag{3}$$

$$u_{1i} = u_i(x, y) \tag{4}$$

其中的一阶项是浮动位移, 其为未知的周期函数. 这主要是由于不同的介质间产生的位移.

在方程(1)的位移扩展方程的条件下, 应变分量可以写成下列形式:

$$\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij}(x) + \epsilon_{ij}(x, y) + O(\delta) \tag{5}$$

这表明应变分量能够表示成复合材料平均应变以及漂移应变的和. 即

$$\frac{1}{V_y} \int \epsilon_{ij} dV_y = \frac{1}{V_y} \int \bar{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{ij} dV_y = \bar{\epsilon}_{ij}$$

其中 V_y 表示代表性体积单元的体积. 接下来是求解漂移应变. 在代表性体积单元内, 平均的漂移应变为 0, 对均匀材料而言, 漂移应变及位移均不存在. 位移形式如下:

$$u_i(x, y) = \bar{\epsilon}_{ij} x_j + w_i + O(\delta^2) \tag{6}$$

采用子胞求解技术求解上述的近似位移场.

对于弹性材料而言, 其胡克定律如下:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{7}$$

其中 $C_{ijkl}(x)$ 是复合材料的各项的刚度分量. 对于采用局部坐标系 y 定义的代表性体积单元, 刚度函数是周期的, 因此

$$C_{ijkl}(x) = C_{ijkl}(y) \tag{8}$$

把方程(5)代入(7)并对微观变量 y_i 微分得

$$\frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijkl}(y) [\bar{\epsilon}_{kl}(x) + \epsilon_{kl}(x, y)] = 0 \tag{9}$$

定义下列应力向量

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}(y) \bar{\epsilon}_{kl}(x) \tag{10}$$

$$\sigma_{ij}^1 = C_{ijkl}(y) \epsilon_{kl}(x, y) \tag{11}$$

后者为漂移应力, 因此可写成下列形式

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial y_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial y_j} = 0 \tag{12}$$

上式为广义平衡方程, 从方程(12)可以看出第一项包含未知的周期漂移位移函数 u_i , 而第二项只包括虚拟的体积力, 只与宏观坐标相关, 除了在每项间的界面外, 其余的地方均为 0.

对于给定的平均应变 $\bar{\epsilon}_{kl}$, 对于给定代表性体积单元边界采用周期性边界条件, 利用式(12)可以求解得到未知的漂移应力场. 除了边界条件外, 在代表性体积单元间的各项材料间需要应力以及位移连续条件.

假设代表性体积单元被定义在立方区域 ($0 \leq y_1 \leq D, 0 \leq y_2 \leq H, 0 \leq y_3 \leq L$), 其周期性边界条件(以其中的 y_1 方向为例)为

$$\begin{aligned} u_i(y_1 = 0) &= u_i(y_1 = D) \\ \sigma_{1i}(y_1 = 0) &= \sigma_{1i}(y_1 = D) \end{aligned} \tag{13}$$

其中总的应力可以表达成下式

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 \tag{14}$$

同时要把代表性体积单元的某一点位移固定.

考虑到内部界面的连续条件以及周期性边界条件来求解方程(14), 就能建立代表性体积单元的应变场. 建立起局部应变与平均应变的关系. 首先定义反映漂移应变与平均应变间关系的四阶张量 A

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{15}$$

代入到方程(5)就可得到所需要的应变集中向量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\boldsymbol{I}_4 + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})] \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{I}_4$ 是特定的四阶张量.

为了获得应变集中向量 $\boldsymbol{A}$, 需按下述方式来解决. 在求解方程式(14)时, 必须设内部界面以及周期的边界条件的 $\bar{\varepsilon}_1 = 1$, 而其它的分量设置成 0, 即能求解出 A_{ij11} , ($i, j = 1, 2, 3$); 接下来设置 $\bar{\varepsilon}_2 = 1$, 其它分量为 0, 即求得 A_{ij22} , ($i, j = 1, 2, 3$), 如此重复下去.

一旦获得了应变集中向量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$, 按下述步骤即可获得复合材料的刚度向量. 把方程(16)代入到式(7)得到

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{17}$$

把上述方程得到的应力在整个代表性体积单元的平均得到复合材料的平均应力及有效刚度系数为 C^*

$$C^* = \frac{1}{V_y} \int C(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) dV_y \tag{18}$$

2 改进的 HFGMC

把图 1 所示的代表性体积单元划分为 $N_\alpha \times N_\beta \times N_\gamma$ 个子胞(如图 2 所示), 分析这个单元的应力/应变分布, 就可以得到整个应力/应变场.

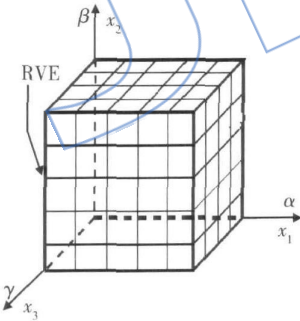


图 2 $N_\alpha \times N_\beta \times N_\gamma$ 规模单元

Fig 2 A representative volume elements which contains $N_\alpha \times N_\beta \times N_\gamma$ sub elements

假设高精度通用单胞模型的近似位移假设为下列形式:

$$\begin{aligned} u_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} = & \bar{\varepsilon}_i x_j + W_{i(000)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \bar{y}_1^{(a)} W_{i(100)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ & \bar{y}_2^{(\beta)} W_{i(010)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \bar{y}_3^{(\gamma)} W_{i(001)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{y}_1^{a2} - \frac{d_\alpha^2}{4} \right) W_{i(200)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ & \frac{1}{2} \left(3\bar{y}_2^{b2} - \frac{h_\beta^2}{4} \right) W_{i(020)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{y}_3^{c2} - \frac{l_\gamma^2}{4} \right) W_{i(002)}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \end{aligned} \tag{19}$$

$W_{i(1mn)}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ 与子胞尺寸和材料相关的未知量. 把上式代入到式(5)中, 可以得到每个子胞的应变分量.

在文献[8]中采用的原始通用单胞模型中, 假设的位移场与方程式(19)相同, 但在上述的网格划分过程中, 在每个子胞又划分为 2×2 的亚子胞, 同时求解方程的未知量为方程式(19)中的未知系数 $W_{i(mn)}^{(\beta, \gamma)}$. 文献[9]在此基础上推广到三维分析中. 而在文献[10]中, 假设的位移项为三阶多项式的形式, 同时给出的子胞划分为 2×2 阶, 该方法推广到 $N_\beta \times N_\gamma$ 阶较为困难, 并且求解的方程数目也较多, 而向三维推广时更加复杂.

基于上述两种方法的缺点, 本文利用了文献[11]针对高阶理论改进算法的思想, 提出了改进的高精度通用单胞模型. 在下面的分析过程中 $t_{iB}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, t_{iT}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, t_{iL}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, t_{iR}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, t_{iA}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, t_{iF}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ 分别代表子胞 (α, β, γ) 的下表面、上表面、左表面、右表面、后表面以及前表面的平均应力; $u_{iB}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, u_{iT}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, u_{iL}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, u_{iR}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, u_{iA}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, u_{iF}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ 分别代表子胞 (β, γ) 的下表面、上表面、左表面、右表面、后表面以及前表面的平均位移.

以左表面为例, 定义的平均应力和位移为

$$t_{iL}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{d_\alpha l_\gamma} \int_{-d_\alpha/2}^{d_\alpha/2} \int_{-l_\gamma/2}^{l_\gamma/2} t_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} \cdot \left[\bar{x}_1^{(a)}, -\frac{h_\beta}{2}, \bar{x}_3^{(\gamma)} \right] d\bar{x}_3^{(\gamma)} d\bar{x}_1^{(a)} \tag{20}$$

$$u_{iL}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{d_\alpha l_\gamma} \int_{-d_\alpha/2}^{d_\alpha/2} \int_{-l_\gamma/2}^{l_\gamma/2} u_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} \cdot \left[\bar{x}_1^{(a)}, -\frac{h_\beta}{2}, \bar{x}_3^{(\gamma)} \right] d\bar{x}_3^{(\gamma)} d\bar{x}_1^{(a)} \tag{21}$$

把假设的位移和子胞的本构方程代入到(20)和(21)式, 可以得到表面平均应力和平均位移间的关系表达式如下:

$$\bar{t}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \boldsymbol{K}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \bar{u}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \bar{\boldsymbol{C}}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\Gamma}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \Delta T \tag{22}$$

在上式中, $\bar{t}, \bar{u}$ 为子胞各个表面的未知平均应力及位移矩阵, $\boldsymbol{K}, \bar{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{\Gamma}$ 为与每个子胞的细观几何尺寸和弹性常数相关的常数矩阵.

相邻子胞间界面处的位移及应力在平均意义下应该是连续的. 以一个方向为例

$$u_{iF}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = u_{iA}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} = u_{iA}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)}$$
$$t_{iF}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + t_{iA}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} = 0$$

根据周期性边界条件, 上式中 $N_\alpha + 1 \rightarrow 1$.

把式(19)代入到上述方程可以得到 9 个方程, 下面以其中的一个为例:

$$\begin{aligned} &K_{ab}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{1A}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + (K_{aa}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + K_{bb}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)}) u_{1A}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} + \\ &K_{ba}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{1A}^{(\alpha+2, \beta, \gamma)} + K_{ab}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{1L}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ &K_{ag}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{1L}^{(\alpha, \beta+1, \gamma)} + K_{bh}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{1L}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} + \\ &K_{hg}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{1L}^{(\alpha+1, \beta+1, \gamma)} + K_{gq}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{2L}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ &K_{ai}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{2L}^{(\alpha, \beta+1, \gamma)} + K_{gh}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{2L}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} + \\ &K_{hi}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{2L}^{(\alpha+1, \beta+1, \gamma)} + K_{an}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{1B}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ &K_{am}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{1B}^{(\alpha, \beta+1, \gamma)} + K_{bn}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{1B}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} + \\ &K_{lm}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{1B}^{(\alpha+1, \beta+1, \gamma)} + K_{ar}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{3B}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + K_{aq}^{(\alpha, \beta, \gamma)} u_{3B}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} + \\ &K_{br}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{3B}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} + K_{br}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)} u_{3B}^{(\alpha+1, \beta+1, \gamma)} = - \\ &(C_{11}^{(\alpha, \beta, \gamma)} - C_{11}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)}) \bar{\epsilon}_{11} - (C_{12}^{(\alpha, \beta, \gamma)} - C_{12}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)}) \bar{\epsilon}_{22} - \\ &(C_{13}^{(\alpha, \beta, \gamma)} - C_{13}^{(\alpha+1, \beta, \gamma)}) \bar{\epsilon}_{33} + (\Gamma_1^{(\alpha, \beta, \gamma)} - \Gamma_1^{(\alpha+1, \beta, \gamma)}) \Delta T \end{aligned} \quad (23)$$

把上述 9 个表达式可以写成下列的矩阵形式:

$$K\bar{U} = A\bar{\epsilon} + \alpha\Delta T \quad (24)$$

其中式(24)中 K 为所有子胞的常系数组成的矩阵, $\bar{U}$ 为子胞各个表面的未知平均位移; A 和 α 各子胞的弹性常数和热膨胀系数组成的矩阵; $\bar{\epsilon}$ 为宏观应变向量, ΔT 为温差。

求解上述矩阵, 并代入到子胞的应变中, 即可得到应变集中向量 $A(\gamma)$, 再利用式(17)和(18)即可得到复合材料的宏观弹性系数。

从上述分析可以看出, 改进后高精度通用单胞模型与原始高精度通用单胞模型相比有以下优点:

- 1) 通过消除亚子胞来简化了离散化过程, 只剩下子胞来代表材料的微观结构。这与通用单胞模型的子胞划分是相同的。
- 2) 采用子胞界面的平均量来代替假设位移方程所定义的变量做为未知数, 降低了求解方程数目。见图 3 所示, 该图取每个方向划分的数目相同。从该图可以看出求解方程的数量只为原始算法的 3/7。

3 模型的应用与算例分析

利用上述改进三维高精度通用单胞模型, 可以实现对复合材料宏观弹性性能的计算。

首先, 本文针对文献[12]实验的 B/A1 单向纤维增强复合材料, 利用宏细观统一的本构模型计算了宏观弹性性能, 并与文献[12]上的试验值和细观力学有限元法计算值(与文献[12]的材料参数等均相同)进行了对照, 详见表 1。从表中可以看出, 本文模型的计算结果与试验值和细观有限元结果具有较好的一致性。

其次, 对球形颗粒增强复合材料, 利用本文模型进行了宏观性能的计算。假设球形颗粒在基体中呈图 1 所示的排列, 球形颗粒增强复合材料网格的划分如图 4(坐标 a, b 表示子胞的长度), 即把代表性体积单元划分成 $7 \times 7 \times 7$ 的网格。

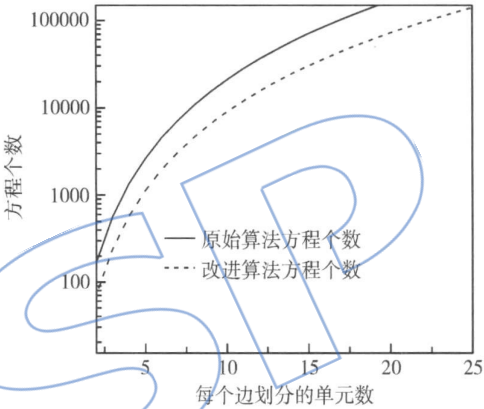


图 3 求解方程个数对比图
Fig. 3 Comparison of the number of the solving equations

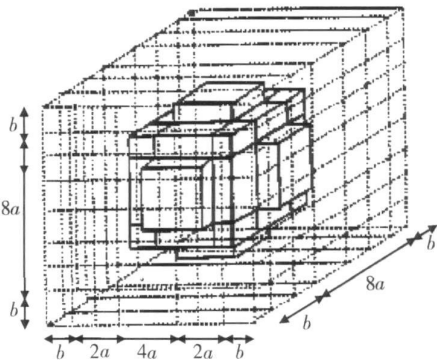


图 4 球形增强相 RVE
Fig. 4 RVE of the spheroidal particle reinforced composites

表 1 纤维增强 MMC 的有效性能的计算值与试验值对比

Table 1 Comparison of the efficient reformulation of the fiber reinforced MMC with the experimental valaue				
材料	弹性性能	本文模型	细观力学有限元法	试验值
B/ A1	E_1/GPa	215. 3	215 ^[11]	216 ^[12]
$V_f=0.47$	E_2/GPa	142. 8	144 ^[11]	140 ^[12]
$E_m=68.3\text{ GPa}$	G_{12}/GPa	53. 9	57. 2 ^[11]	52 ^[12]
$\mu_m=0.3$	G_{23}/GPa	45	45. 9 ^[11]	
$E_f=379.3\text{ GPa}$	μ_{12}	0. 195	0. 19 ^[11]	0. 29 ^[12]
$\mu_f=0.1$	μ_{23}	0. 259	0. 29 ^[11]	

表 2 球形颗粒增强复合材料有效性能对比

Table 2 Comparison of the efficient reformulation of the spheroidal particle reinforced composites

材料	弹性性能	本文模型	细观力学有限元法	通用单胞模型
B/ A1	E_1 / GPa	74. 88	74. 4	74. 18
$R= 0. 25$	G_{12} / GPa	28. 64	29. 957	27. 96
材料参数同表 1	μ_2	0. 292	0. 292	0. 293

采用上述同样的材料弹性常数,对球形颗粒增强复合材料有效性能的计算见表 2. 计算结果表明,本文的计算结果与细观力学有限元法计算的结果具有较好的一致性.

4 结 论

本文对高精度通用单胞模型的算法进行了改进并推广到三维,改进后求解方程数目减少了大约 55%,求解时间进一步降低.同时消除了原始算法中的亚子胞的概念,使分网进一步简化.本文对纤维增强金属基以及颗粒增强复合材料的宏观有效性能进行了预测,与部分文献中的试验结果及有限元计算值相对照,表明该模型具有较好的适应性以及足够的计算精度.

参考文献:

[1] 范赋群,王震鸣,稽醒,等.关于复合材料力学的几个基本问题的研究[J].华南理工大学学报(自然科学版),1995,23(4):1-6.
FAN Fuqun, WANG Zhenming, JI Xing, et al. Study of several basic problems on mechanics of composites [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science), 1995, 23(4): 1-4. (in Chinese)

[2] Paley M, Aboudi J. Micromechanical analysis of composites by the generalized cell model[J]. Mechanics of Materials, 1992, 14: 127-139.

[3] 孙志刚,宋迎东,高希光,等.改进算法的三维通用单胞模型及其应用[J].机械科学与技术,2005,24(9): 1029-1032.
SUN Zhigang, SONG Yingdong, GAO Xiguang, et al. An efficient implementation of the three dimensional GMC model and its application [J]. Mechanical Science and Technology, 2005, 24(9): 1029-1032. (in Chinese)

[4] 宋迎东,雷友锋,高德平,等.通用单胞法模型预测纤维增强钛基复合材料弹性性能[C]//第十届航空发动机结构强度与振动会议征文集.安徽歙县:中国航空学会,2000:

137-141.

[5] 雷友锋,宋迎东,高德平,等.纤维增强复合材料结构的宏观一体化分析方法[J].机械科学与技术,2001,21(4): 617-619.
LEI Youfeng, SONG Yingdong, GAO Deping, et al. A unified method for macroscopic and mesoscopic analysis of fiber reinforced composite structure [J]. Mechanical Science and Technology, 2002, 21(4): 617-619. (in Chinese)

[6] 雷友锋.纤维增强金属基复合材料宏细观统一本构模型及应用研究[D].南京:南京航空航天大学,2002.
LEI Youfeng. A unified macro and micro mechanics constitutive model and its applications for fiber reinforced metal matrix composites [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2002. (in Chinese)

[7] Aboudi J, Pindera M J, Arnold S M. Higher order theory for functionally graded materials[J]. Composites Part B, 1999, 33(8): 777-832.

[8] Aboudi J, Bednarczyk B A, Arnold S M. High fidelity generalization method of cells for inelastic periodic multiphase materials[R]. NASA- TM- 2002- 211469.

[9] Aboudi J. Micromechanical analysis of the finite elastic viscoplastic response of multiphase composites[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(11): 2793-2817.

[10] 宋迎东,雷友锋,孙志刚,等.一种新的纤维增强复合材料细观力学模型[J].南京航空航天大学学报,2003,35(4): 435-440.
SONG Yingdong, LEI Youfeng, SUN Zhigang, et al. A new micro mechanics model for fibrous composites [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 35(4): 435-440. (in Chinese)

[11] Bansal Y, Pindera M J. Efficient reformulation of the thermoelastic higher order theory for functionally graded materials[J]. Journal of Thermal Stresses, 2003, 26(11/12): 1055~ 1092.

[12] Kenaga D, Doyle J F, Sun C T. The characterization of boron/aluminum composite in the nonlinear range as an orthotropic elastic plastic material[J]. J Comp Mater, 1987, 21: 516-531.