

文章编号: 1000-8055(2007) 11-1963-07

两级星型齿轮传动系统非线性动力学研究

朱自冰, 朱如鹏, 鲍和云
(南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016)

摘 要: 建立了两级星型齿轮传动系统的非线性动力学分析模型, 模型中考虑了系统的综合啮合误差、时变啮合刚度以及齿侧间隙. 采用数值积分方法对多间隙多自由度非线性微分方程组进行了求解. 分析了两级星型齿轮传动系统由简谐振动、非谐单周期振动、倍周期振动以及拟周期振动通向混沌的非线性动力学特性.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 星型齿轮传动; 非线性振动; 混沌; 动态特性
中图分类号: V232.8 **文献标识码:** A

Non-linear dynamic study of 2-stage star gear train

ZHU Zi-bing, ZHU Ru-peng, BAO He-yun

(College of Mechanical and Electrical Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A dynamic analysis model was established for 2-stage star gear train, wherein the transmission error and the time-varying stiffness and backlash were considered. Using ODE45 integration method, the nonlinear differential equations with multiple backlashes were solved. The nonlinear dynamic behavior, which leads to chaos from harmonic vibration, non-harmonic vibration, period-doubling vibration and quasi-periodic vibration by changing frequency excitation of the system, was discussed thereof.

Key words: aerospace propulsion system; star gear train; nonlinear vibration; chaos; dynamic characteristic

星型齿轮传动是航空发动机上常用的一种功率分流定轴齿轮系传动. 功率分流齿轮传动系统非线性动力学的研究亦开始受到重视^[1-6]. 但以上文献研究的都为单级齿轮系统的非线性系统. 在多级星型齿轮传动系统中包括多对齿轮的啮合问题, 其自由度数目较多, 非线性响应特性更为复杂. 对于多级多自由度多间隙系统的星型齿轮传动系统的非线性动态特性还未见到相关的文献研究. 基于此, 本文研究了两级星型齿轮传动系统的非线性动态特性, 并分析了系统由简谐振动、非谐单周期振动、倍周期振动以及拟周期振动通向混沌的非线性动力学特性.

1 系统的运动方程

图 1 所示是两级内外啮合星型齿轮传动装置的传动简图. 整个系统由第一级传动系统(太阳轮 Z_s , N 个星轮 Z_{p1})和第二级传动系统(内齿轮 Z_r , N 个星轮 Z_{p2})相联接组成. 输入功率经太阳轮 Z_s 分流给 N 个星轮 Z_{p1} , 又经 N 个二级星轮 Z_{p2} 汇流到内齿轮 Z_r 输出.

图 2 所示为系统计算模型, 其中 K_{sp} 表示太阳轮和星轮之间的轮齿啮合刚度, K_{rp} 表示星轮和内齿圈之间的轮齿啮合刚度; 此系统共有 $(2 + 2 \times N)$ 个自由度, 其广义坐标如下:

收稿日期: 2007-05-09; 修订日期: 2007-10-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(50775108), 航空科学基金项目(03C52021), 江苏省自然科学基金项目(BK2004125)

作者简介: 朱自冰(1966-), 男, 湖南省人, 博士研究生, 主要研究方向: 机械传动.

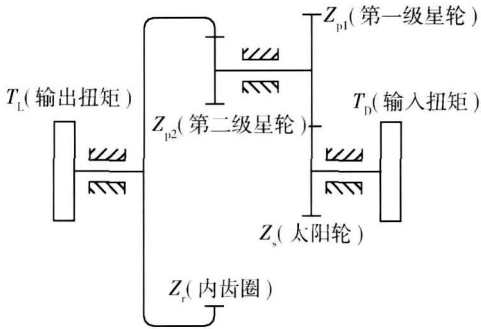


图 1 两级星型齿轮传动简图

Fig. 1 2-stage star gear train transmission

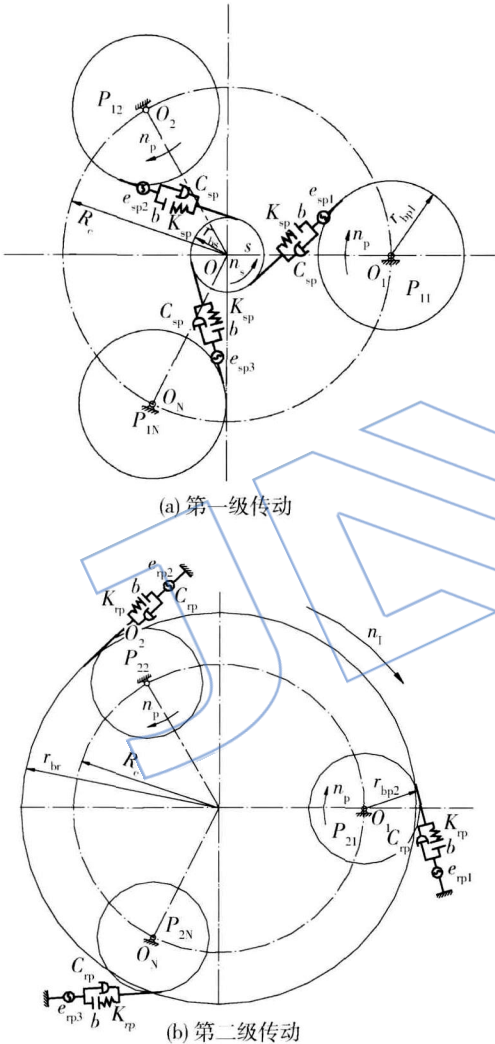


图 2 两级星型齿轮传动系统计算模型

Fig. 2 2-stage star gear train dynamic model

$X = \{x_s, x_{p1i}, x_{p2i}, x_r\}^T$. 其中, x_s 为太阳轮沿啮合线的微位移, $x_s = r_{ts} \cdot \theta$; x_{p1i} 为第一级第 i 个星轮沿啮合线的微位移, $x_{p1i} = r_{tp1i} \cdot \theta_{p1i}$; x_{p2i} 为第二级第 i 个星轮沿啮合线的微位移, $x_{p2i} = r_{tp2i} \cdot \theta_{p2i}$; x_r 为内齿轮沿啮合线的微位移, $x_r = r_{br} \cdot \theta$. 其中, θ 为各构件的扭转角位移, r_b 为基圆半径.

综合啮合误差用傅立叶级数表示为

$$e(t) = \sum_{i=1}^{N_e} A_{ei} \cos(\omega t + \Phi_{ei}) \quad (1)$$

式中, ω 为啮合频率, $\omega = 2\pi n z / 60$, n 为转速, z 为齿数, A_{ei} 为误差的 i 阶谐波幅值, Φ_{ei} 为初相位.

时变啮合刚度 $K(t)$ 由平均啮合刚度 k_m 和变刚度 $k(t)$ 两部分组成, 即 $K(t) = k_m + k(t)$, 其中变刚度 $k(t)$ 部分可用 Fourier 级数表示为

$$k(t) = \sum_{i=1}^{N_k} A_{ki} \cos(\omega t + \Phi_{ki}) \quad (2)$$

式中, A_{ki} 为刚度的 i 阶谐波幅值, Φ_{ki} 为初相位.

令 P_{spi} , P_{rpi} 分别为第一级传动和第二级传动第 i 条啮合线上的动载荷, 则

$$P_{spi} = K_{spi}(t) f(x_s - x_{p1i} - e_{spi}, b_{spi}) \quad (3)$$

$$P_{rpi} = K_{rpi}(t) f(x_{p2i} - x_r - e_{rpi}, b_{rpi}) \quad (4)$$

式中, $K_{spi}(t)$, $K_{rpi}(t)$ 分别为各啮合齿轮副沿作用线的时变啮合刚度; e_{spi} , e_{rpi} 分别为啮合齿轮副沿作用线的综合齿频误差函数; b_{spi} , b_{rpi} 分别为齿侧间隙; r_{ts} , r_{tp1i} , r_{tp2i} , r_{br} 分别为各齿轮的基圆半径; f 为间隙非线性函数, 具有下面的统一形式

$$f(x_i, b_i) = \begin{cases} x_i - b_i & x_i > b_i \\ 0 & -b_i \leq x_i \leq b_i \\ x_i + b_i & x_i < -b_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

令 D_{spi} , D_{rpi} 分别为第一级传动和第二级传动第 i 条啮合线上的啮合振动阻尼力, 则 $D_{spi} = C_{sp}(\dot{x}_s - \dot{x}_{p1i} - \dot{e}_{spi}, b_{spi})$, $D_{rpi} = C_{rp}(\dot{x}_{p2i} - \dot{x}_r - \dot{e}_{rpi}, b_{rpi})$, 式中, C_{sp} , C_{rp} 分别为第一、二级传动的阻尼系数. ($i = 1, 2, \dots, N$)

系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s + \sum_{i=1}^N (D_{spi} + P_{spi}) = P_{in} \\ m_{p1j} \ddot{x}_{p1j} - (D_{spj} + P_{spj}) + \frac{K_a}{r_{tp1}} \left(\frac{x_{p1i}}{r_{tp1}} - \frac{x_{p2i}}{r_{tp2}} \right) = 0 \\ m_{p2j} \ddot{x}_{p2j} - (D_{rpj} + P_{rpj}) + \frac{K_a}{r_{tp2}} \left(\frac{x_{p1i}}{r_{tp1}} - \frac{x_{p2i}}{r_{tp2}} \right) = 0 \\ m_r \ddot{x}_r + \sum_{i=1}^N (D_{rpi} + P_{rpi}) = -P_{out} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

式中, m_s , m_{p1i} , m_{p2i} , m_r 分别为各齿轮在其基圆半径 r_b 上的当量质量, ($j = 1, 2, \dots, N$) 其通式为 $m = J / r_b^2$, J 是转动惯量; K_a 为联结第一级星轮和第二级星轮的轴的扭转刚度, P_{in} 为输入扭矩转化在太阳轮基圆半径上的等效力, $P_{in} = T_{in} / r_{ts}$; P_{out} 为输出扭矩转化在内齿轮基圆半径上的等效力, $P_{out} = T_{out} / r_{br}$, T_{in} , T_{out} 分别为输入扭矩和输出扭

矩.

方程(6)是 $2N+2$ 自由度的半正定、变参数、非线性二阶微分方程组,由于系统坐标中包含了刚体位移,方程有不定解;为了消除刚体位移并将系统化为无量纲模型,为此,引入质量块之间的相对位移作为系统的广义坐标如下:

$$\begin{aligned} X &= \{X_{sdi}, X_{rdi}, X_{sr}\}^T \quad (7) \\ \left\{ \begin{aligned} \ddot{X}_{sdi} + \frac{C_{sp}}{\omega_h m_s} \sum \dot{X}_{sdi} + \frac{C_{sp}}{\omega_h m_{p1}} \dot{X}_{sdi} + \frac{\bar{K}_{spi}(t)}{m_s} \sum f(X_{sdi}, b_{sdi}/b_c) + \frac{\bar{K}_{spi}(t)}{m_{p1}} f(X_{sdi}, b_{sdi}/b_c) + \\ \frac{K_a}{m_{p1} \omega_h^2 r_{tp1}^2} X_{sdi} - \frac{K_a}{m_{p1} \omega_h^2 r_{tp1}^2} X_{rdi} &= \frac{P_{in}}{\omega_h^2 b_c m_s} - \frac{K_a}{m_{p1} \omega_h^2 r_{tp1}^2} \bar{e}_{spi} - \ddot{\bar{e}}_{spi} \\ \ddot{X}_{rdi} + \frac{C_{sp}}{\omega_h m_s} \sum \dot{X}_{sdi} + \frac{C_{sp}}{\omega_h m_{p2}} (\dot{X}_{sr} - \dot{X}_{rdi}) + \frac{\bar{K}_{spi}(t)}{m_s} \sum f(X_{sdi}, b_{sdi}/b_c) + \\ \frac{K_a}{m_{p2} \omega_h^2 r_{tp2}^2} (X_{rdi} - X_{sdi}) &= \frac{P_{in}}{\omega_h^2 b_c m_s} - \frac{C_{rp}}{\omega_h m_{p2}} \frac{r_{tp1}}{r_{tp2}} \dot{\bar{e}}_{rpi} + \frac{K_a}{m_{p2} \omega_h^2 r_{tp2}^2} \bar{e}_{spi} \\ \ddot{X}_{sr} + \frac{C_{sp}}{\omega_h m_s} \sum \dot{X}_{sdi} - \frac{C_{rp}}{\omega_h m_r} \sum (\dot{X}_{sr} - \dot{X}_{rdi}) + \frac{\bar{K}_{rpi}(t)}{m_r} \sum f(X_{sr} - X_{rdi} - \frac{r_{tp1}}{r_{tp2}} \bar{e}_{rpi}, b_{sdi}/b_c) + \\ \frac{C_{rp}}{\omega_h m_r} \sum (\dot{X}_{sr} - \dot{X}_{rdi}) &= \frac{P_{in}}{\omega_h^2 b_c m_s} + \frac{C_{rp}}{\omega_h m_r} \frac{r_{tp1}}{r_{tp2}} \dot{\bar{e}}_{rpi} \end{aligned} \right. \quad (8) \end{aligned}$$

式中, $\bar{e}_{spi}(\tau) = A_{spi}/b_c \cos(\Omega\tau + \Phi_{spi})$, $\bar{e}_{rpi}(\tau) = A_{rpi}/b_c \cos(\Omega\tau + \Phi_{rpi})$, $\bar{K}_{spi}(t) = 1 + k_{sa}/k_{sm} \cos(\Omega\tau + \Phi_{spi})$, $\bar{K}_{rpi}(t) = 1 + k_{ra}/k_{rm} \cos(\Omega\tau + \Phi_{rpi})$, $\Omega = \omega/\omega_h$, ω 为系统的激励频率.

则式(8)用矩阵形式可表达为

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]f(X) = \{P\} \quad (9)$$

式中, M, C, K 分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $X, f(X)$ 分别为位移向量和位移向量的非线性部分; P 载荷列向量.

2 非线性动态特性及参数研究

针对某航空星型齿轮减速器本文用 Matlab 中的 ODE45 数值积分方法进行计算. 系统的基本参数如下: 星轮个数: $N=3$; 模数: $m_1=1.38$, $m_2=2.25$; 齿数: $Z_s=24$, $Z_{p1}=97$, $Z_r=93$, $Z_{p2}=19$; 时变啮合刚度幅值: $K_{si}=0.2$.

2.1 单周期激变为混沌

当系统的误差幅值 $e_{spi} = e_{rpi} = 5$, 阻尼比 $\zeta = 0.03$, 间隙值 $b_{spi} = 200$, $b_{rpi} = 220$, 无量纲激励频率 $\Omega \leq 0.2981$ 时, 齿轮系统处于啮合状态而不脱啮, 表现为单周期振动, 其相图为椭圆, Poincaré 图为单个离散的点.

当无量纲激励频率增加到 0.2982 时, 系统表现为时而啮合时而脱啮的振动状态, 且无规律可循, 成为一种混沌振动. 从完全啮合状态的单周期振动到时而啮合时而脱啮的混沌振动状态之间

式中, $X_{sdi} = (X_s - x_{p1i} - e_{spi})/b_c$, $X_{rdi} = (X_s - x_{p2i} \cdot r_{tp1}/r_{tp2})/b_c$, $X_{sr} = (X_s - x_r \cdot r_{tp1}/r_{tp2})/b_c$, b_c 为给定的位移标称尺度. 令 $\tau = \omega_h t$, $\omega_h = \sqrt{K_{sp1} / \left(\frac{m_s m_{p1}}{m_s + m_{p1}} \right)}$, ω_h 为标称频率, K_{sp1} 为太阳轮与第一级星轮 1 间的平均啮合刚度. 则方程组(6)转化为如下 $(2N+1)$ 个无量纲方程

没有出现分岔, 是直接激变为混沌, 如图 3.

2.2 倍周期分岔通向混沌

当系统的误差幅值 $e_{spi} = e_{rpi} = 15$, 阻尼比 $\zeta = 0.02$, 间隙值 $b_{spi} = 50$, $b_{rpi} = 60$, 无量纲激励频率 $\Omega \leq 0.3$ 时, 齿轮系统处于啮合状态而不脱啮, 表现为单周期振动.

当无量纲激励频率增加到 0.364 时, 系统表现为非谐单周期响应. 此时系统的运动为单周期运动, 但不再是谐振动, 系统中会有脱啮现象发生, 如图 4.

当无量纲激励频率增加到 0.42 时, 系统表现为两周期响应. 此时系统的运动为两周期运动, Poincaré 映射图为 2 个离散点, 系统中会有脱啮现象发生, 频率高于单周期非谐响应, 如图 5.

当无量纲激励频率增加到 0.464 时, 系统表现为混沌响应, 如图 6.

2.3 拟周期通向混沌

当系统的误差幅值 $e_{spi} = e_{rpi} = 15$, 阻尼比 $\zeta = 0.005$, 间隙值 $b_{spi} = 100$, $b_{rpi} = 120$, 无量纲激励频率 $\Omega \leq 0.26$ 时, 齿轮系统处于啮合状态而不脱啮, 表现为单周期振动.

在无量纲激励频率为 0.298 时, 系统表现为拟周期响应, 其 Poincaré 映射图由一些看似连续点组成, 相图是具有一定宽度的曲线带, 系统会有脱啮现象发生, 如图 7.

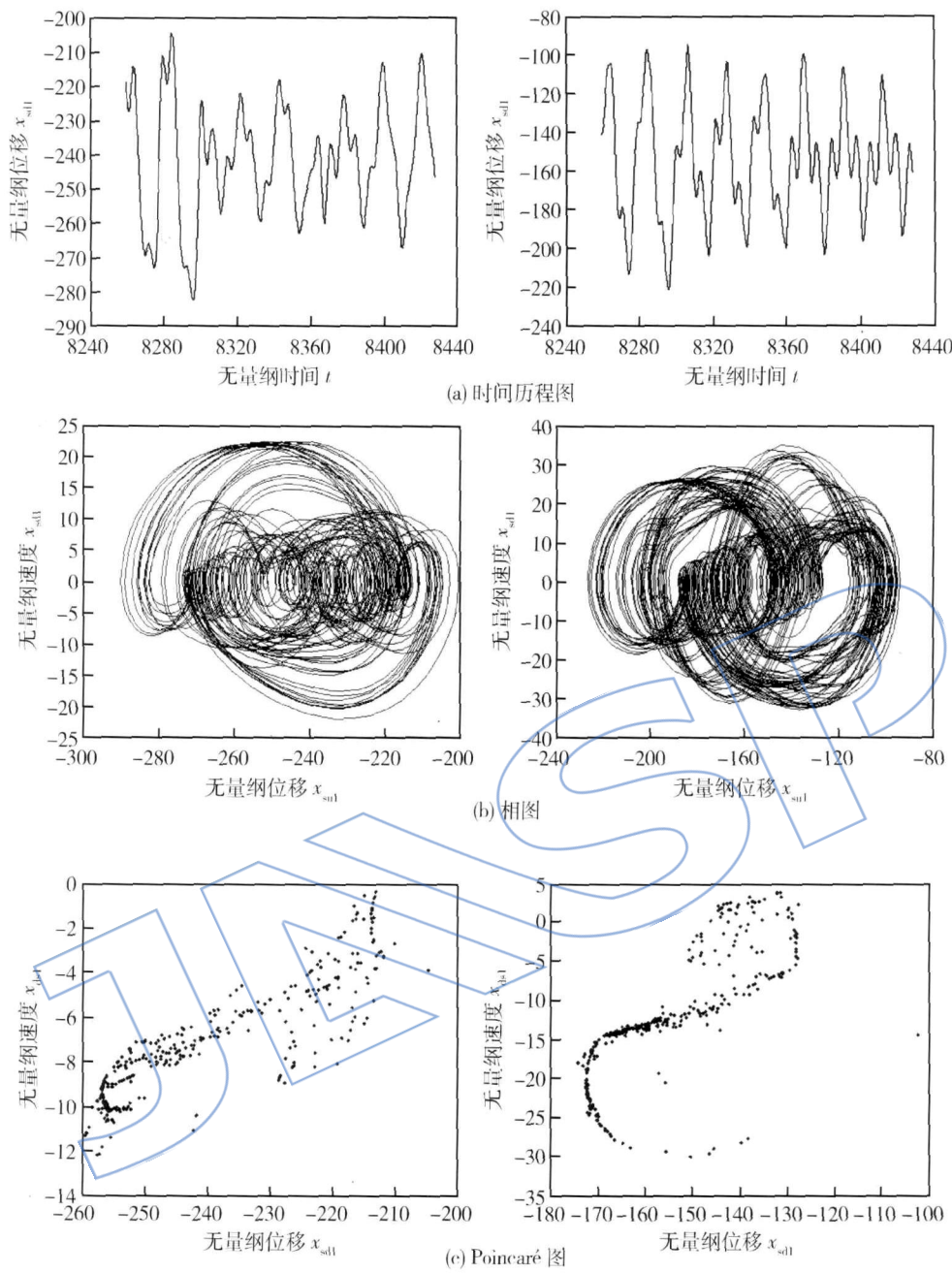
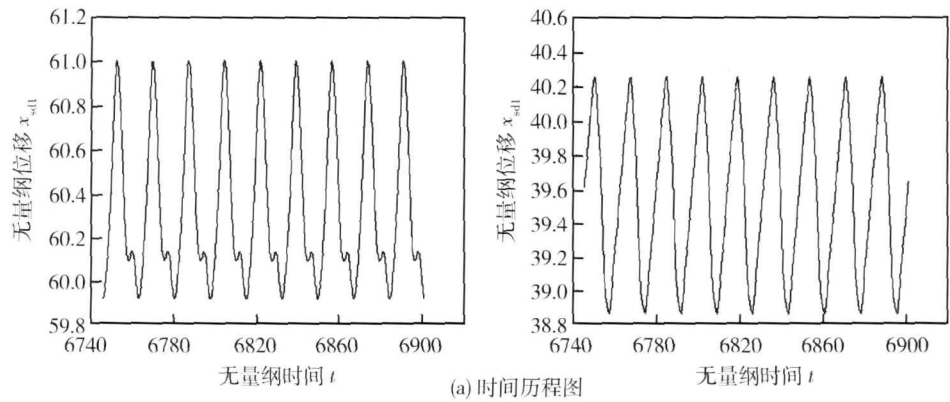


图 3 混沌响应($\Omega=0.2982$)

Fig. 3 Chaos vibration ($\Omega=0.2982$)



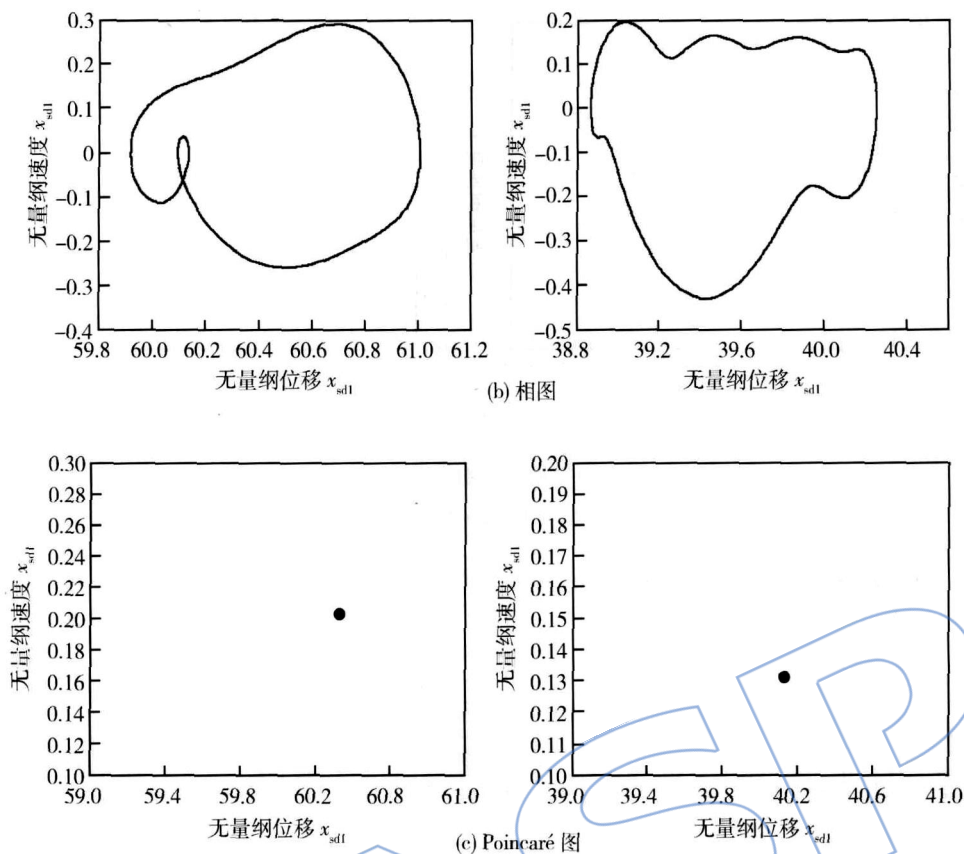
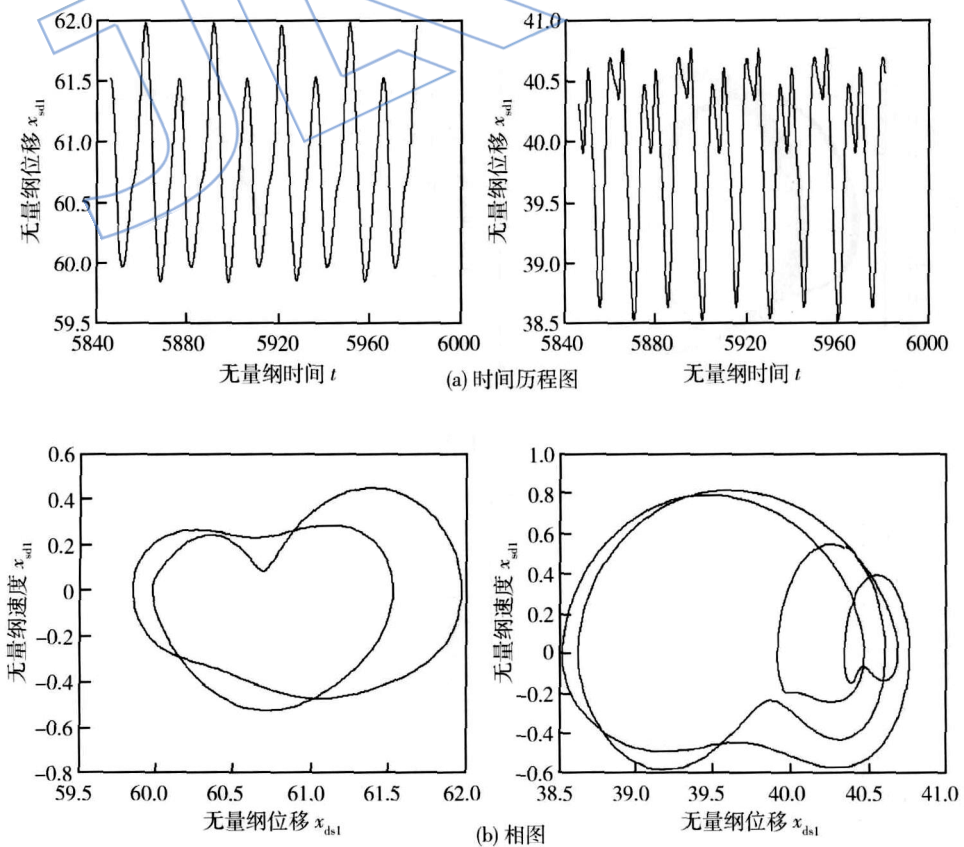


图 4 非谐单周期动态响应($\Omega=0.364$)
Fig. 4 Non-harmonic vibration ($\Omega=0.364$)



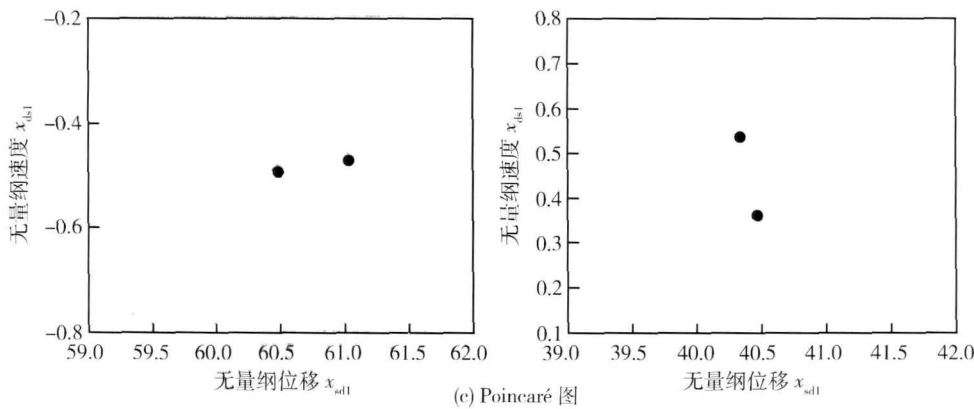


图 5 两周期动态响应($\Omega=0.42$)

Fig. 5 Period-doubling vibration ($\Omega=0.42$)

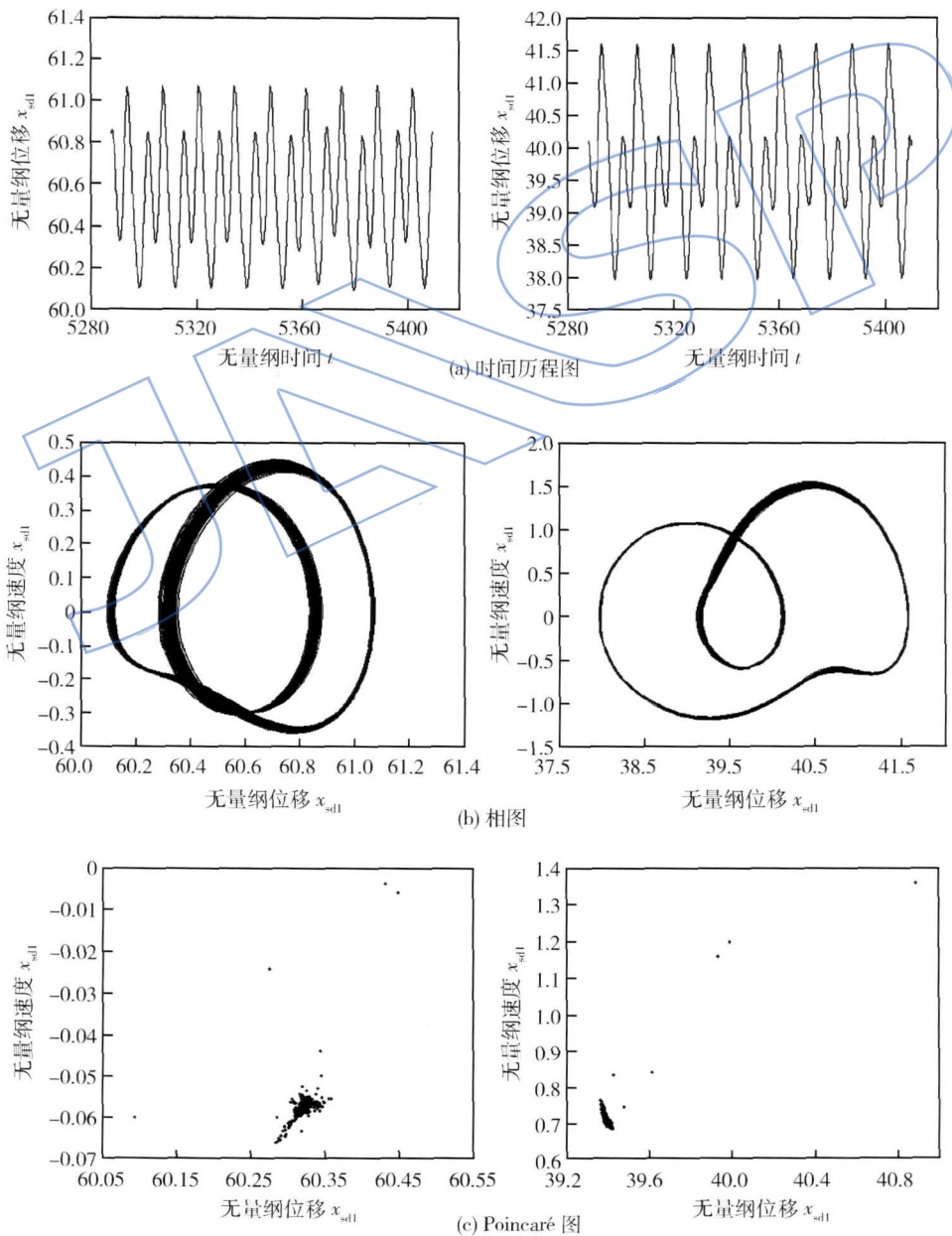


图 6 混沌响应($\Omega=0.464$)

Fig. 6 Chaos vibration ($\Omega=0.464$)

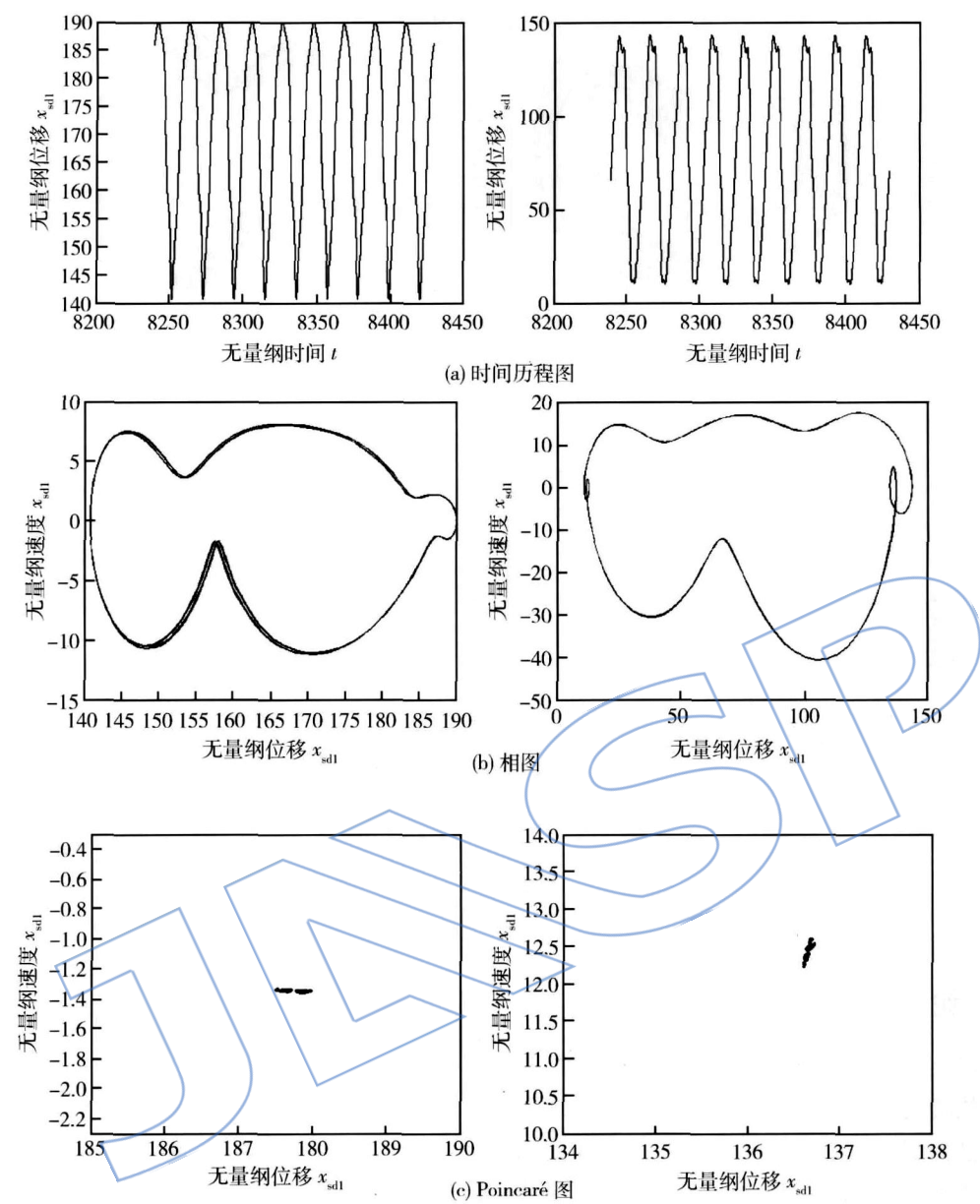
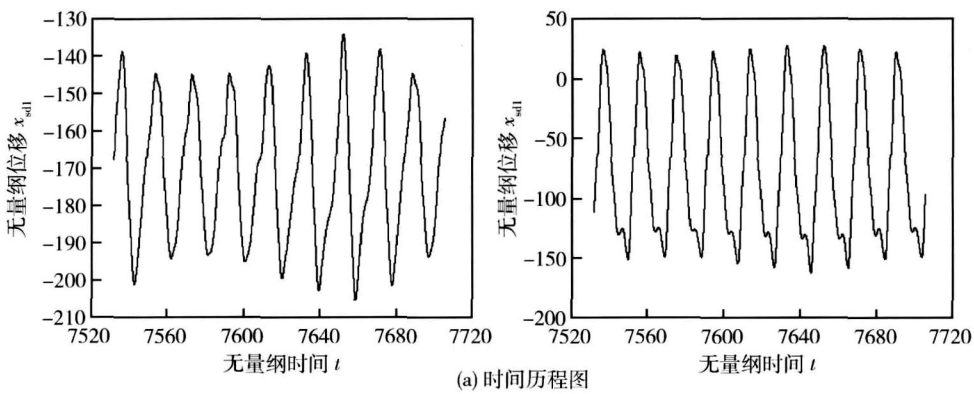


图 7 拟周期动态响应($\Omega=0.298$)
Fig. 7 Quasi-periodic vibration ($\Omega=0.298$)

当无量纲激励频率增加到 0.326 时,系统由 拟周期振动变为混沌响应,如图 8.



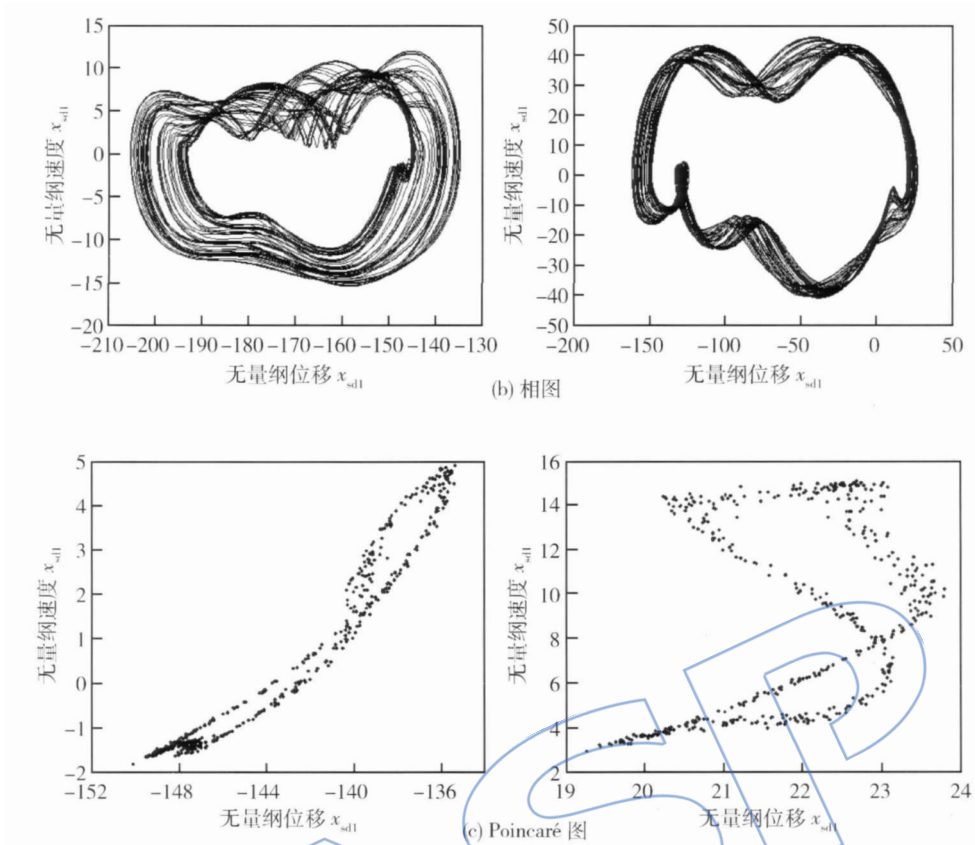


图 8 混沌响应 ($\Omega=0.326$)
Fig. 8 Chaos vibration ($\Omega=0.326$)

3 结 论

通过以上的分析可以发现,当间隙存在时,两级星型齿轮传动系统在齿频误差激励下,出现了典型的分岔与混沌非线性特征.在改变系统的无量纲激励频率时,系统会出现混沌响应,通往混沌的道路有单周期激变为混沌,倍周期通向混沌以及拟周期通向混沌等,在不同的参数及不同的无量纲激励频率下,系统由不同的道路进入混沌区域.

参考文献:

[1] Kahraman A. Load sharing characteristics of planetary transmissions [J]. Mech. Mach. Theory, 1994, 29 (8) : 1151-1165.
[2] Parker R G. A physical explanation for the effectiveness of planet phasing to suppress planetary gear vibration[J]. Journal of Sound and Vibration. 2000, 236(4) : 561-573.

[3] Hidaka T, Terauchi Y, Fujii M. Analysis of dynamic tooth load on planetary gear[J]. Bulletin of the JSME, 1980, 176 (23) : 315-323.
[4] August A, Kasuba R. Torsional vibration and dynamic loads in a basic planetary gear system[J]. Transaction of the ASME, Journal of Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1986, 108 : 348-253.
[5] 孙智民, 沈允文, 王三民, 等. 齿星型齿轮传动系统分岔与混沌的研究[J]. 机械工程学报, 2001, 37(12) : 11-15.
SUN Zhimin, SHEN Yunwen, WANG Sanmin, et al. Bifurcations and chaos of star gear system[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(12) : 11-15.
[6] 孙智民, 沈允文, 王三民, 等. 星型齿轮传动系统的非线性动力学分析[J]. 西北工业大学学报, 2002, 20 (2) : 222-226.
SUN Zhimin, SHEN Yunwen, WANG Sanmin, et al. On nonlinear dynamic behavior of star gear system due to clearances[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2002, 20(2) : 222-226.