

文章编号: 1000-8055(2009)04-0753-07

复杂结构角系数计算方法

张 涛, 孙 冰
(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 推导了能束在辐射半球面上均匀分布的角系数计算公式. 根据面元间的位置关系, 把有限元和能束均匀分布法相结合计算复杂结构的角系数. 采用三角形网格统一表示边界面并根据边界面网格进行角系数计算的遮挡判断. 计算结果表明, 方法的计算精度比有限元法和蒙特卡洛法高, 计算效率比蒙特卡洛法高, 遮挡判断方法准确高效.

关 键 词: 角系数; 有限元; 能束均匀分布; 蒙特卡洛法

中图分类号: V520.6 文献标识码: A

Numerical computation of view factor of complicated configuration

ZHANG Tao, SUN Bing
(School of Astronautics,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The formulas of view factor computation of ray uniform distribution on radiant hemisphere were deduced. View factors were computed by combining finite element method (FEM) and ray uniform distribution according to the position of surface cells. Triangle grid was used to express outline of complicated configuration and judge shading. It was demonstrated by a comparison with FEM and Monte Carlo method that the computing precision and efficiency of this method is higher and shading judgment method is correct and highly efficient.

Key words: view factor; finite element method (FEM); ray uniform distribution; Monte Carlo method

在进行火箭发动机辐射传热计算时, 一般采用灰体表面包壳辐射换热模型计算温度场, 该模型需要计算任意两个辐射换热面元之间的角系数^[1-2]. 由于发动机内部结构复杂, 面元形状各异, 有效辐射面积相差很大, 而且彼此之间存在着严重的遮挡, 因此要计算任意两个面元间的角系数很复杂. 目前采用的角系数计算方法主要是有限差分法(FDM), 有限元法(FEM), 蒙特卡洛法(MC法), 矢量法等. FDM对空间任意曲面作了二次曲面方程假定^[3-5], 这在处理复杂形状物体时, 其灵活性和适应性不够强; 同时, 在投影平面的选用上 FDM 也存在较大缺点^[1, 4-5]. 对存在公

共边界的单元体, FDM 会产生较大误差. MC 法对于复杂结构适应性强, 但是其随机布置能束发射点和能束发射方向产生很多重复计算^[6], 在计算相距较远的面元之间的角系数需要发射很大数目的能束才能达到所需精度, 计算效率较低. 矢量法一般只适合求解简单结构之间的角系数^[7]. 而 FEM 计算中, 每个三角形单元都有自己的投影面, 在处理曲面时比 FDM 合理; 而且进行网格离散时不需要作二次曲面假设, 只需要结构尺寸即可^[8]. 但是, FEM 在处理有公共边界的单元时误差很大, 甚至会产生奇异.

本文采用统一的网格描述物体的边界表面;

根据兰贝特定律推导出计算角系数的能束均匀分布法(Ray uniform distribution, 简称RUD). 分析了FEM, RUD, MC 的计算精度与面元相对位置的关系; 提出根据面元间的位置关系分别采用FEM 和 RUD 的角系数计算综合法; 根据边界面网格进行复杂结构遮挡判断. 最后比较了几种方法的计算精度和效率.

1 FEM 和 RUD 计算角系数

1.1 网格离散

由于很多结构用方程描述很复杂, 甚至不存在描述方程, 从而在判断遮挡时无法求出射线与遮挡面的交点. 为了增强求解程序的适用性和通用性, 本文采用统一的网格表示物体边界面. 三角形网格既能很好的表示物面边界, 又能简化遮挡判断; 同时, 三角形面积坐标理论也很成熟, 因此选择三节点三角形单元作为网格的单元类型. 为了减少遮挡判断的计算时间, 在程序编写时网格离散为两套: 一套粗网格描述物体边界面, 用于判断遮挡; 一套细网格, 用于表示辐射换热面进行角系数计算. 其中, 细网格需要给出每个单元的外法线信息. 例如, 图 1 所示的计算网格, 其对应的边界面网格如图 2 所示.

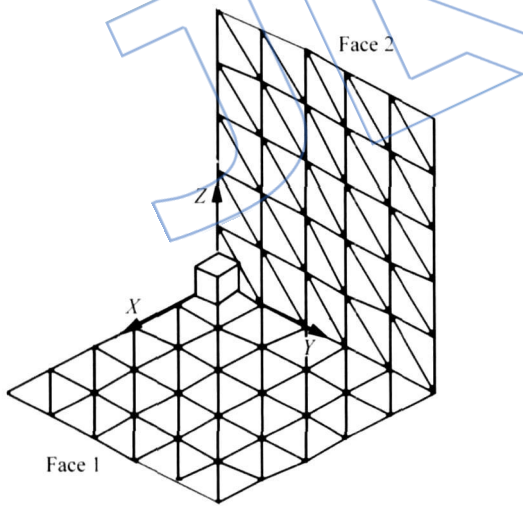


图 1 角系数计算网格
Fig. 1 Computational grid

1.2 FEM 计算角系数

如图 3 所示, 表面 A_1 到表面 A_2 的角系数

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1} dA_1 \iint_{A_2} \frac{\max(\cos \phi_1, 0) \max(\cos \phi_2, 0)}{\pi r^2} dA_2 \quad (1)$$

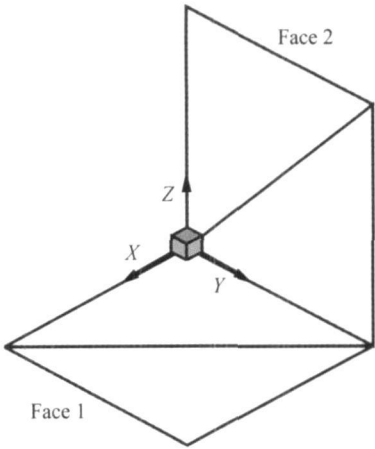


图 2 边界网格
Fig. 2 Boundary grid

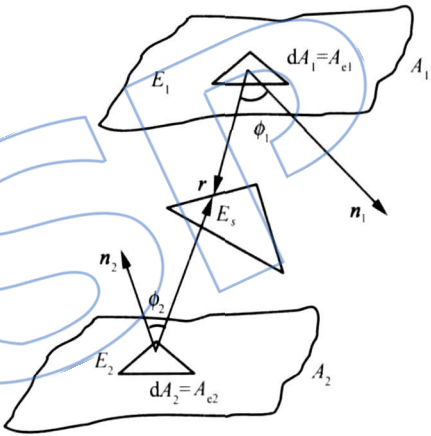


图 3 角系数定义
Fig. 3 View factor definition

设函数

$$G = \frac{\max(\cos \phi_1, 0) \max(\cos \phi_2, 0)}{\pi r^2} \quad (2)$$

ϕ_1, ϕ_2 为 dA_1, dA_2 外法线与其连线的夹角.

网格离散后, 对于面积分别为 A_{e1} 和 A_{e2} 的三角形单元 E_1 和 E_2

$$F_{E1, E2} = \frac{1}{A_{e1}} \iint_{A_{e1}} dA_{e1} \iint_{A_{e2}} G dA_{e2} = G_{E1, E2} A_{e2} \quad (3)$$

其中

$$G_{E1, E2} = \frac{1}{A_{e1} A_{e2}} \iint_{A_{e1}} dA_{e1} \iint_{A_{e2}} G dA_{e2} \quad (4)$$

$G_{E1, E2}$ 形式较复杂, 本文采用三角形面积坐标的高斯积分计算.

1.3 RUD 计算角系数

MC 法计算角系数时随机布置能束发射点和发射方向带来大量的重复计算, 而角系数是纯粹的几何因子, 其大小只与面元间的相对位置有关,

因此可以采用更加简单的均匀布置能束发射点和发射方向的计算模型. 本文从兰贝特余弦定律出发, 推导出 RUD 计算角系数公式.

如图 4 所示, 设半球辐射力为 E , 定向辐射强度为 L , 立体角为 Ω ($0 \sim 2\pi$), 周向角为 θ ($0 \sim 2\pi$), 天顶角为 ϕ ($0 \sim \pi/2$), 由兰贝特余弦定律可得

$$E = \int_{\Omega=2\pi} L \cos \phi d\Omega = L \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi \quad (5)$$

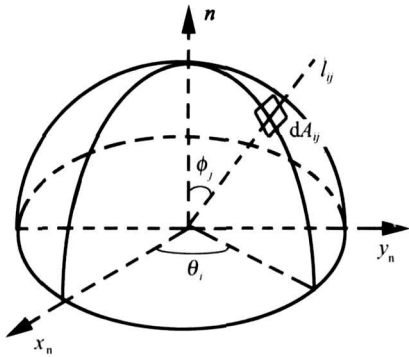


图 4 能束发射方向模型
Fig. 4 Ray direction model

由定积分的性质

$$E = L \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta\theta \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M \cos \phi_j \sin \phi_j \Delta\phi_j \quad (6)$$

当均匀离散周向角和天顶角时可得

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \quad (7)$$

$$\Delta\phi_j = \frac{\pi}{2M} \quad (8)$$

将式(7), 式(8)代入式(6)可得

$$E = L \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{2\pi}{N} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M \cos \phi_j \sin \phi_j \frac{\pi}{2M} = L\pi \frac{\pi}{M} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M \cos \phi_j \sin \phi_j \quad (9)$$

当进行数值计算, M 为有限数时有

$$E \approx \frac{L\pi^2}{M} \sum_{j=1}^M \cos \phi_j \sin \phi_j = \sum_{j=1}^M E_{ij} \quad (10)$$

计算时将 $\frac{L\pi^2}{M}$ 作为单位能量, 则可得每个球面微元 dA_{ij} 辐射能量为

$$E_{ij} = \cos \phi_j \sin \phi_j \quad (11)$$

其中能束 l_{ij} 的周向角

$$\theta = \frac{2\pi i}{N} \quad i = 1, \dots, N \quad (12)$$

天顶角

$$\phi = \frac{\pi j}{2M} \quad j = 1, \dots, M \quad (13)$$

这样整个辐射半球被分为 $N \times M$ 球面微元, 每个微元面发射一条能量为 E_{ij} 的能束 l_{ij} .

设单元 E_1 有 N_e 个能束发射点, 若每个能束发射点的能束均为 $N \times M$, 则单元 E_1 到 E_2 的角系数

$$F_{E_1, E_2} = \sum_{k=1}^k \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \delta_{ik} \cos \phi_j \sin \phi_j}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \cos \phi_j \sin \phi_j} \quad (14)$$

计算时判断从发射点 k 的能束 l_{ij} 是否与单元 E_2 相交, 若相交, $\delta_{ik} = 1$, 否则 $\delta_{ik} = 0$.

1.4 遮挡判断

根据三角形网格表示边界面的特点, 本文采用了相应的快速判断遮挡的方法.

1.4.1 FEM 遮挡判断方法

在用 FEM 计算角系数时, 通过判断高斯积分基点 O_L, O_K 之间的线段 $O_L O_K$ 与表示边界面的三角形网格是否相交, 若相交则表示 O_L 之间 O_K 的辐射能量交换被遮挡.

1.4.2 RUD 遮挡判断方法

利用 RUD 计算单元之间角系数 F_{E_1, E_2} 时, 由于需要判断每条能束是否与计算单元 E_2 相交. 若相交, 还要判断该能束是否与遮挡面相交, 计算量很大. 但单元之间、单元与边界面之间很多是不能互视的, 这种情况下彼此不发生遮挡. 造成遮挡的边界面必须满足两个条件: 两个单元都可视边界面; 边界面所在平面在两个单元之间. 因此, 在采用 RUD 计算角系数时, 首先进行互视判断, 排除不参与遮挡的边界面; 其次再判断遮挡面是否在计算单元之间, 如果不在计算单元之间也应排除.

设边界面单元 E_s 的三个顶点为 $I_s(x_I, y_I, z_I), J_s(x_J, y_J, z_J), M_s(x_M, y_M, z_M)$, 单元 E_1 的能束发射点为 O_1 , 重心为 E_{1m}, E_2 的重心为 E_{2m} .

1) 判断单元 E_1 可视边界面 E_s 的方法:

$$\cos \phi_i = \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{r}_i| |\mathbf{n}_1|} > 0 \quad (i = I_s, J_s, M_s) \quad (15)$$

$\mathbf{r}_i$ 为发射点到顶点的方向向量.

如果式(15)中有一个条件成立, 就认为单元 E_1 可视 E_s .

2) 判断边界面 E_s 所在平面在单元 E_1 和单元 E_2 之间的方法:

设 E_{1m} 与 E_{2m} 所在直线与 E_s 所在平面的交点

为 O_{in} 则

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} < 0 \tag{16}$$

$\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 分别为交点 O_{in} 到重心 E_{1m} 和 E_{2m} 的方向向量.

若式(16)成立, 则边界面 E_s 在单元 E_1 和 E_2 之间.

在计算角系数 $F_{E1, E2}$ 之前, 利用式(15), 式(16)排除单元 E_1 不互视和不处于单元 E_1 和 E_2 之间的遮挡单元, 从而极大地减少遮挡面和遮挡判断次数.

最后采用以下公式求解面元 A_1 到 A_2 的角系数 $F_{1, 2}$

$$F_{1, 2} = \frac{1}{A_1} \sum_{u=1}^{N_1} \left(\sum_{v=1}^{N_2} F_{Eu, Ev} \right) A_{Eu} \tag{17}$$

其中 N_1, N_2 分别为 A_1, A_2 的有限单元个数, A_{Eu} 为单元 u 的面积.

2 基于FEM 和RUD 角系数计算方法

实际计算表明, 无论 FEM 还是 RUD 在某些情况下都会产生明显的误差. 利用 FEM 计算角系数时, 3 基点高斯积分精度最高. 但是, 3 基点高斯积分在计算有公共边的两个单元间角系数时将产生奇异. 而在单元相隔较远时, 采用 RUD 计算角系数也会产生较大误差. 在计算 $F_{E1, E2}$ 时, 设单元之间距离 r 的平方与单元面积 A_{e2} 之比为 R , 即

$$R = \frac{r^2}{A_{e2}} \tag{18}$$

数值试验表明, 当 R 小于某一值 R_0 时, 高斯 3 点积分求解角系数会产生较大误差, 甚至产生奇异, 而此时采用 RUD 能得到良好的效果; 当 $R > R_0$ 时采用 RUD 将需要 100×100 以上的能束才能达到相应的精度, 而这时 FEM 3 基点积分的计算精度很高. 因此本文根据单元之间的位置关系分别采用 FEM 和 RUD 计算角系数. 当单元之间满足 $R > R_0$ 时, 采用 FEM; 当单元之间满足 $R < R_0$ 时采用 RUD. 而关键问题是 R_0 的选择, R_0 太大或太小都会降低计算精度; 而且 R_0 太大还会大大增加计算时间. 通过数值试验, $R_0 = 10$ 能满足各种情况下计算精度和计算效率的要求.

RUD 中, $N \times M$ 的选择与单元之间的相对位置和单元面积有关. 当 $R < 10$ 时, 每个能束发射点的能束在 $20 \times 20 \sim 50 \times 50$ 之间, 就能达到足够的精度. 为了减少计算时间, 编程时, 可根据 R 的大小自动选择 $N \times M$ 的值. 能束发射点代表整个

单元的表面辐射特性, 发射点的选择与单元形状、单元面积、单元之间的相对位置以及遮挡有关. 本文按照有限元面积积分对求积基点的选择原则, 选择相应的求积基点作为能束发射点. 本文采用的三角形单元能束发射点位置如图 5~ 图 7 所示.

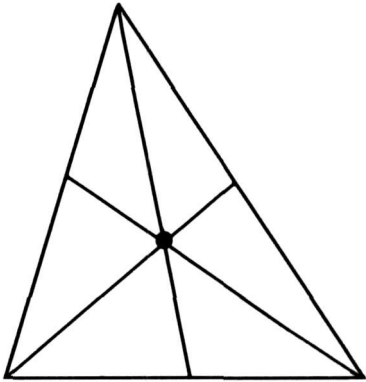


图 5 1 个能束发射点在单元内的位置
Fig. 5 One ray radiation point in element

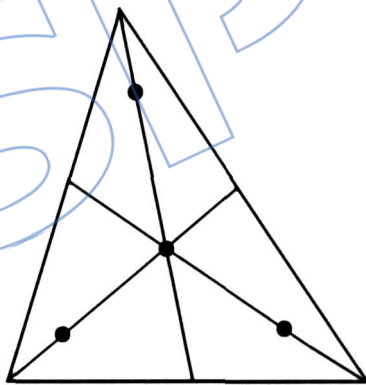


图 6 4 个能束发射点在单元内的位置
Fig. 6 Four ray radiation points in element

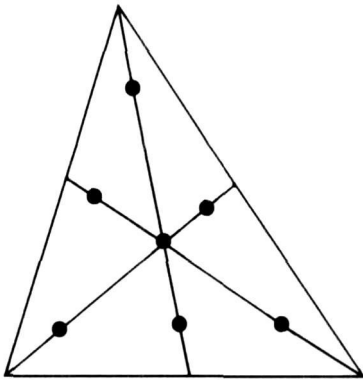


图 7 7 个能束发射点在单元内的位置
Fig. 7 Seven ray radiation points in element

设三角形单元的三个顶点为 $i(x_i, y_i, z_i)$, $j(x_j, y_j, z_j)$, $m(x_m, y_m, z_m)$. 发射点坐标为

$$\begin{cases} x = ax_i + bx_j + cx_m \\ y = ay_i + by_j + cy_m \\ z = az_i + bz_j + cz_m \end{cases} \quad (19)$$

文献[3]提供了参数 a, b, c 的取值.

3 计算结果及分析

为了分析 FEM, RUD, MC 法计算角系数的相对误差与 R 的关系及 RUD 和 MC 的相对误差与能束 N 的关系, 如图 8 所示, 面元采用两个平行正对单位正方形. 图 11 为 RUD 及 MC 法相对误差与能束 N 的关系. 图 12~ 图 15 为三种方法的相对误差与 R 的关系.

为了比较 FEM, RUD, MC 计算有公共边界的面元间角系数的相对误差, 如图 9 所示, 面元为两个垂直单位正方形. 计算结果如表 1 所示.

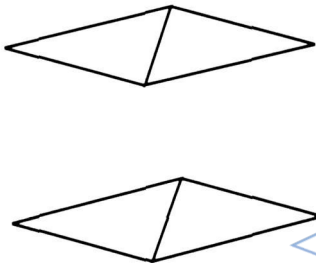


图 8 平行单位正方形计算网格

Fig.8 Parallel unit squares computational grid

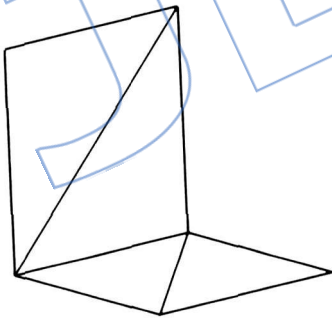


图 9 垂直单位正方形计算网格

Fig.9 Vertical unit squares computational grid

表 1 垂直单位正方形角系数相对误差

Table 1 Relative error of view factor of vertical unit squares

方法	FEM	RUD	MC
Error/ %	奇异	0. 20	1. 3

为了分析和比较本文方法, FEM, MC 法计算复杂结构角系数的精度与时间, 如图 10 所示, 面元为两个平行圆环 S_1 与 S_2 及中间圆柱面 S_3 .

计算结果如表 2 和表 3 所示.

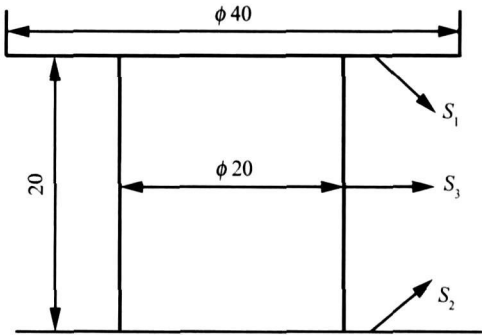


图 10 圆环与圆柱面尺寸及位置关系(单位: mm)

Fig. 10 Dimension and position of cirque and column (Unit: mm)

表 2 圆环 S_1 对 S_2 角系数相对误差

Table 2 Relative error of view factor of cirque S_1 to S_2

方法	Error/ % ($S_1 \rightarrow S_2$)	Error/ % ($S_3 \rightarrow S_2$)
FEM	2. 75	奇异
本文方法	1. 82	1. 84
MC	2. 06	2. 26

表 3 算例 3 三种方法计算时间之比

Table 3 Comparison of computational time of three methods

方法	本文方法	FEM	MC
时间比	10	1	175

从图 11 可以看出, 当能束大于 50×50 后, RUD 计算结果的相对误差在 2% 以内. 而 MC 法即使能束达到 10 000 以上, 误差也只能控制在 5% 以内; 能束达到 20 000 后, 误差仍然大于 2%. 因此, RUD 可以用远小于 MC 法的能束达到较高精度, 从而极大提高计算效率.

从图 12 可以看出, 当 $R > 10$ 时, 3 点高斯积分的 FEM 的精度最高, 相对误差小于 1%; 而 1 点和 7 点高斯积分的精度较低. 因此 FEM 一般采用 3 基点高斯积分. 从图 13 和图 14 可以看出, 当 $R < 40$ 时, RUD 在能束达到 50×50 时误差小于 1%, 而 MC 法能束需要达到 10 000 时, 误差才能控制在 2% 以内. 从图 15 可以看出, $R > 10$ 时, FEM 精度均高于 RUD 和 MC 法; 而 $R < 10$ 时, RUD 的精度很高, 当 $5 < R < 10$ 时, 50×50 的能束可以达到较高精度, 当 $R < 5$ 时, 20×20 的能束

就能达到较高精度.

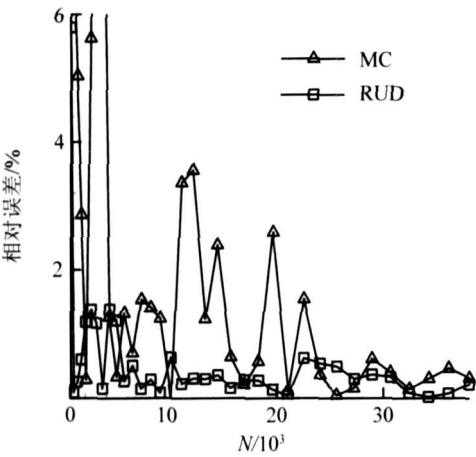


图 11 RUD 与 MC 相对误差与 N 关系
Fig. 11 Relative error_ N of RUD and MC

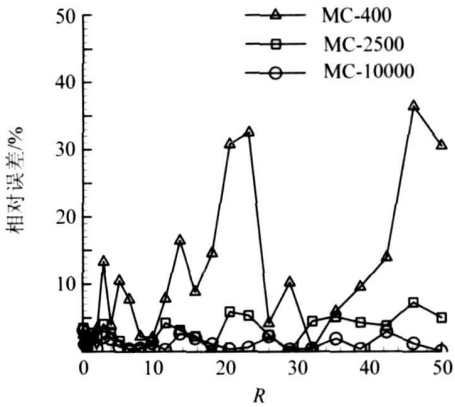


图 14 MC 的相对误差与 R 关系
Fig. 14 Relative error_ R of MC

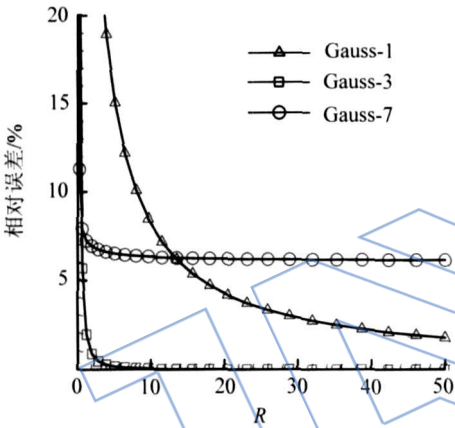


图 12 FEM 1, 3, 7 点积分相对误差与 R 关系
Fig. 12 Relative error_ R of 1, 3, 7 point Gauss integral

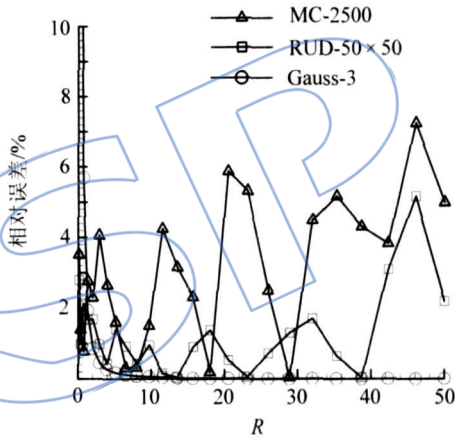


图 15 三种方法的相对误差与 R 关系
Fig. 15 Relative error_ R of three methods

界奇异问题; 在计算效率方面, 本文采用的方法也远高于 MC 法. 从表 2 和表 3 也可以看出本文采用的遮挡判断方法准确有效.

4 结 论

本文采用三角形网格表示结构边界面; 推导了 RUD 的角系数计算公式; 提出了将 FEM 和 RUD 相结合的方法计算复杂结构角系数的综合方法, 并且得出了两种方法的使用原则. 对于复杂结构的遮挡问题给出了相应的判断方法. 通过以上分析可得出如下结论:

- 1) RUD 的计算精度, 计算效率均高于 MC 法;
- 2) 有效解决了复杂结构的遮挡问题, 采用的遮挡判断方法准确高效;
- 3) 本文的方法相对于 FEM 和 MC 法计算精度均有所提高; 解决了 FEM 公共边界奇异问题, 计算效率远比 MC 法高;

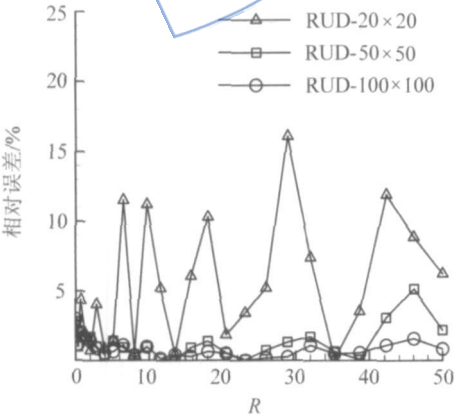


图 13 RUD 的相对误差与 R 关系
Fig. 13 Relative error_ R of RUD

由表 1 可以看出, FEM 计算有公共边界的面元间的角系数产生奇异, RUD 计算精度却很高. 从表 2~ 表 3 可以看出, 本文采用的方法不但计算精度比 MC 法和 FEM 高, 而且处理了公共边

4) 采用网格表示边界面提高了计算程序的通用性和适应性.

参考文献:

[1] 闵桂荣. 卫星热控制技术[M]. 北京: 中国宇航出版社, 1991.
MIN Guirong. Satellite thermal control[M]. Beijing: Astronautics Press, 1991. (in Chinese)

[2] 闵桂荣, 郭舜. 航天器热控制[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
MIN Guirong, GUO Shun. Spacecraft thermal control [M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese)

[3] 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
KONG Xiangqian. Finite element method application in heat transfer[M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese)

[4] 何立群. 角系数的数值计算方法[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 1995, 28(5): 87-90.

HE Liqun. Numerical computation method of view faceter [J]. Journal of Harbin University of Architecture and Engineering, 1995, 28(5): 87-90. (in Chinese)

[5] 李万林, 傅振宣. 角系数计算机程序方法[J]. 工程热物理学报, 1982, 3(1): 76-83.
LI Wanlin, FU Zhenxuan. View factor method of computer program [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 1982, 3(1): 76-83. (in Chinese)

[6] Howell J R. The Monte Carlo method in radiative heat transfer[J]. Journal of Heat Transfer, 1998, 120(3): 547-560.

[7] O' Neill R F, Lorentz D R. A vector approach to numerical computation of view factors and application to space heating[R]. AIAA 83-0157.

[8] 孔祥谦, 王德明. 计算空间任意两曲面辐射角系数的有限单元法[J]. 哈尔滨船舶工程学院学报, 1984, 1(1): 85-92.
KONG Xiangqian, WANG Deming. FEM for view factors of any surfaces[J]. Journal of Harbin Shipbuilding Engineering Institute, 1984, 1(1): 85-92. (in Chinese)