

文章编号:1000-8055(2009)04-0815-04

一类基于颤振行列式的颤振分析新方法

谷迎松, 杨智春, 王巍
(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

摘 要: 提出了一类基于颤振行列式的颤振分析新方法, 分别采用颤振行列式值的模, 或颤振矩阵的模最小特征值这两个指标的频域下界, 来直接确定颤振临界点. 根据这两个指标在颤振临界点附近取极小值的特点, 编制了相应的算法. 数值算例验证了这两个指标在确定颤振临界点时的等价性. 该方法与传统颤振分析方法的结果精度相当, 并且根据颤振临界点处的颤振特征向量还可以定量给出各模态参与颤振耦合的程度.

关 键 词: 颤振行列式; 颤振; 模最小特征值; 颤振特征向量

中图分类号: V215.3

文献标识码: A

New type of flutter solution based on flutter determinant

GU Ying-song, YANG Zhi-chun, WANG Wei

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A new flutter solution method was presented based on flutter determinant as a combination of the concept of flutter and matrix analysis theories. This method could locate the flutter boundary by directly computing indicators, which include the modulus of flutter determinant and the minimum module eigenvalue of flutter matrix. These indicators were proven equivalent with each other at the critical flutter point. The corresponding algorithm was developed for flutter solution by frequency sweeping approach. It was demonstrated by standard numerical examples that these two indicators give the same flutter results which agree well with those obtained by the $p-k$ method. The information of coupled flutter modes can also be determined quantitatively from the flutter eigenvector at the critical flutter point.

Key words: flutter determinant; flutter (aerodynamics);
minimum modulus eigenvalue; flutter eigenvector

颤振是一种典型的气动弹性动不稳定现象^[1], 传统的颤振分析方法如 $p-k$ 法^[2], 依据 $V-g$ 曲线的过零点来确定颤振临界速度. 由于颤振问题的复杂性, 必须经人工介入来判定结果是否合理. 在多外挂组合构型或涉及颤振分析的多学科优化设计(MDO)等工况极多的情况下, $V-g$ 曲线随结构参数的变化可能极为剧烈. 若仍按传统分析方法进行颤振速度计算, 则可能需要过多的人

工干预, 往往使得设计分析陷入困境^[3-4]. 此时就需要发展新的途径来简化颤振分析工作.

Banerjee 在大展弦比无尾飞机颤振特性研究中, 提出了一种通过计算颤振行列式的值来求解颤振临界速度的方法^[5]. 即在不同速度下以扫频方式计算颤振行列式的值, 利用其实、虚部的符号同时发生变化来搜索颤振临界点(颤振行列式为零的点)所在参数区间, 然后用二分法在该区间分

收稿日期:2008-04-23; 修订日期:2009-01-01

基金项目:国家自然科学基金(10672135); 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0965)

作者简介:谷迎松(1981-), 男, 江苏邳州人, 博士生, 主要从事气动伺服弹性研究.

别搜索出颤振速度和颤振频率。

由于颤振行列式一般为复数值,作为颤振计算指标不甚方便。在文献[5]的基础上,提出以颤振行列式值的模为指标进行颤振分析;同时结合矩阵分析理论,导出颤振矩阵的模最小特征值,也可用来确定临界颤振速度,并证明其与颤振行列式的模为等价指标。根据这两个指标在颤振临界点处取极小值的特点,编制了算法,数值算例表明本文方法具有较高精度,并且可以定量给出各模态参与颤振耦合的程度。

1 模态空间的颤振方程

模态空间的拉氏域颤振方程可表示为

$$(s^2 M + sB + K) \eta - q_{\infty} Q(k) \eta = 0 \quad (1)$$

其中 s 为拉氏变量, $M, B, K \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 分别为广义质量、广义阻尼和广义刚度矩阵, $\eta \in \mathbf{C}^n$ 为广义坐标向量, n 为模态阶数, $Q(k)$ 为广义气动力矩阵。

$q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V^2$ 为速压, ρ_{∞} 为大气密度, V 为风速, b 为参考长度, $k = \omega b / V$ 。

由于频域气动力较为容易计算,可令 $s = j\omega$, 得到频域颤振方程

$$[-\omega^2 M + j\omega B + K - q_{\infty} Q(k)] \eta = 0 \quad (2)$$

记颤振矩阵为

$$F(V, \omega) = -\omega^2 M + j\omega B + K - q_{\infty} Q(k) \quad (3)$$

一般地, F 矩阵为非正规矩阵。记 $\det[F]$ 为颤振行列式,在(2)式中, η 有非平凡解,当且仅当

$$\det[F] = 0 \quad (4)$$

2 颤振临界点的判定指标

2.1 颤振行列式值的最小模 $|\det[F(V, \omega)]|_{\min}$

由颤振基本概念可知,在颤振临界点处,即对应于颤振临界速度 V_F 及颤振频率 ω_k , (4) 式成立

$$\det[F(V_F, \omega_k)] = 0 \quad (5)$$

在颤振临界速度下,一般仅一个模态分支发生临界颤振失稳,该分支对应着唯一的颤振频率——即 ω_k 是 V_F 的单值函数,且颤振频率一般落在参与计算的模态频率覆盖的区间内,由此可如下推论:

推论 1 $\forall dV > 0$,

$$\min_{V \in (0, V_F + dV]} |\det[F(V, \omega)]| = |\det[F(V_F, \omega_k)]| = 0$$

引入参数 dV 是为了保证求解中可以获得包含 V_F 的速度区间, ω 在参与计算的模态频率覆盖

的区间内取值。

由推论 1 可知, $|\det[F(V, \omega)]|_{\min}$ 可作为判定颤振临界点的指标。

2.2 颤振矩阵的模最小特征值 $|\lambda_n[F]|_{\min}$

将颤振矩阵 F 的特征值按模从大到小排列为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 根据矩阵分析理论有

$$\det[F] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$|\det[F]| = |\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \cdots |\lambda_n| \geq |\lambda_n|^n$$

容易得出 $\det[F] = 0 \Leftrightarrow \lambda_n[F] = 0$, 则由推论 1 可得

推论 2 $\forall dV > 0$,

$$\min_{V \in (0, V_F + dV]} |\lambda_n[F(V, \omega)]| = |\lambda_n[F(V_F, \omega_k)]| = 0$$

假定 $Q(k)$ 是 k 的连续函数矩阵,那么可知 F 是速度 V 、频率 ω 的连续函数矩阵,从而颤振行列式值的模、颤振矩阵特征值的模均为速度 V 、频率 ω 的连续函数^[6]。考虑二者在颤振临界点处的极值特性,可以发展相应算法来确定颤振临界点。

3 颤振临界点计算方法

由上节讨论可知,以上两个指标均源自于(5)式和推论 1,故推论 2 与推论 1 在颤振临界点上是等价的,从而应用这两个指标的颤振算法也基本相似,仅在指标计算上不同。数值计算中,一般无法达到精确的颤振临界点,所以采用两种指标的极小值点为颤振判据,在算法实现上更为合适。

以 $|\det[F(V, \omega)]|_{\min}$ 指标为例,在获得结构的广义质量阵、广义刚度阵和广义气动力阵后,可在一定频率范围上,以较密的频率采样点,分别在不同的速度 $V^{(i)}$ 下,以扫频方式计算

$$\det[F(V^{(i)}, \omega)],$$

求得其频域下界

$$\min_{\omega} |\det[F(V^{(i)}, \omega)]|,$$

并确定其所在的参数区间,在此区间内用二分法搜索其最小值,所得 $|\det[F]|_{\min}$ 对应的 V_F 和 ω_k 即分别为颤振临界速度和颤振频率。

4 数值算例

为验证用上述两种指标确定颤振临界点的可行性,分别采用 BAH 机翼(HA145B)及 15 号掠翼(HA145E)标准算例^[7]进行了颤振分析,然后通过 DMAP 程序从中抽取出本文算法需用的广义质量阵、广义刚度阵及广义气动力阵。

4.1 算例 1:BAH 机翼(HA145B)

由 $p-k$ 法求得其颤振临界速度为 321.9 m/s , 颤振频率 3.059 Hz . 分别采用上述的两类指标及其相应的算法,计算的频率区间为 $[1,400]\text{ rad/s}$, 覆盖机翼的前 10 阶弹性模态频率,计算频率点间隔为 0.5 rad/s ,并在用二分法搜索颤振临界点时,将频率点离散间隔减小为 0.1 rad/s ,计算得到颤振特性见表 1.

表 1 BAH 机翼的颤振特性

指标	$V_F/(\text{m/s})$	ω_k/Hz
$ \det(F) _{\min}$	322.2	3.09
$ \lambda_n(F) _{\min}$	322.2	3.09

可见采用两种指标得到的颤振计算结果完全一致,验证了前文提出的两个推论的等价性.与 $p-k$ 法所得结果相比,颤振临界速度及颤振频率的相对误差的绝对值分别为 0.06% 和 1.01% .

将计算过程中两种指标的频域最小值随速度变化曲线绘示于图 1 中. 随风速增加, $|\det(F)|_{\min}$ 和 $|\lambda_n(F)|_{\min}$ 大致呈现先增大后减小的趋势,并在颤振临界速度附近取极小值.

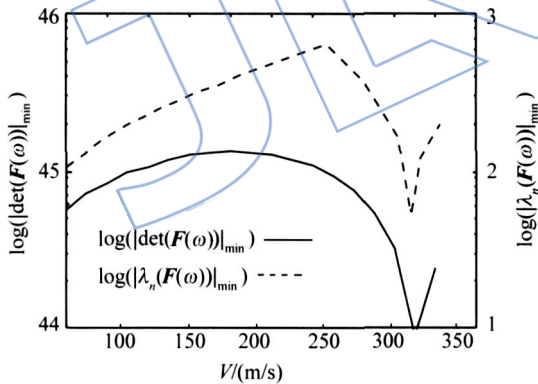


图 1 BAH 机翼 $|\det(F)|_{\min}$ 和 $|\lambda_n(F)|_{\min}$ 随速度变化曲线

Fig. 1 $|\det(F)|_{\min}$ and $|\lambda_n(F)|_{\min}$ v.s. velocity for BAH wing

由于数值计算的固有限制,两个指标均无法达到推论 1,2 中所述的最小值零,但这并不影响其有效性.以 $|\det(F)|_{\min}$ 为例,虽然数值极大,但其在颤振临界速度附近出现明显的极值点,使本文算法仍可获得足够精度的颤振解.

在经典颤振分析中,颤振临界点上,颤振矩阵 F 的模最小特征值 λ_n 对应的特征向量 v_n 即为颤振向量,可表征各模态参与耦合程度的定量信息.

将本例与 $p-k$ 法输出的颤振向量结果比较绘示于图 2. 注意,由于问题定义的不同,颤振矩阵 F 的特征值与 $p-k$ 法中的颤振特征值是无从比较的.

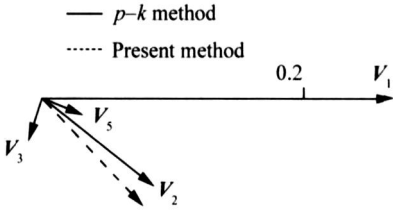


图 2 与 $p-k$ 法颤振特征向量结果比较

Fig. 2 Flutter eigenvector comparison between $p-k$ method and present method

图 2 显示,用 F 矩阵的模最小特征值指标对应的特征向量与 $p-k$ 法所得颤振向量吻合较好,仅第 2 阶在方位上稍有差别.图中向量采用了最大值归一化,第 3 阶,第 5 阶模态分量极小,从而可判定是第 1 阶,第 2 阶模态耦合型颤振.

4.2 算例 2:15°后掠翼(HA145E)

采用 $V-g$ 法求得其颤振临界速度为 149.7 m/s ,颤振频率 113.2 Hz . 计算的频率区间为 $[1,4000]\text{ rad/s}$,覆盖了机翼的前 4 阶弹性模态频率,计算频率点间隔为 10 rad/s . 分别采用上述的两类指标及其相应的算法,并在用二分法搜索颤振临界点时,将频率点离散间隔减小为 1 rad/s ,计算得到颤振特性见表 2.

表 2 15°后掠翼的颤振特性

指标	$V_F/(\text{m/s})$	ω_k/Hz
$ \det(F) _{\min}$	149.4	114.7
$ \lambda_n(F) _{\min}$	149.4	114.7

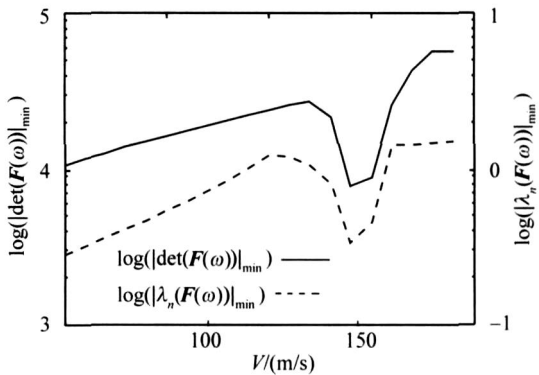


图 3 后掠翼 $|\det(F)|_{\min}$ 和 $|\lambda_n(F)|_{\min}$ 随速度变化曲线

Fig. 3 $|\det(F)|_{\min}$ and $|\lambda_n(F)|_{\min}$ vs. velocity for 15°swept wing

可见分别采用两种指标得到的颤振计算结果完全一致,验证了前文提出的两个推论的等价性.与 $V-g$ 法所得颤振临界速度及颤振频率的相对误差分别为 0.20 %和 1.33 %.

将计算过程中两种指标的频域最小值随速度变化曲线绘示于图 3 中.其中指标极小值所在区间即包含了颤振临界点,且随风速增加,与上例显示了类似的规律性.

5 结 论

本文提出的这类颤振分析新方法在本质上不会出现传统颤振计算方法可能遭遇的“窜支”问题,且判定颤振的条件极为简单——以计算指标在颤振临界速度附近取极小值来确定颤振临界速度所在区间,再用二分法搜索颤振临界点,具有计算自动化程度高的优点.

数值算例表明,本文方法的结果精度较高,而且采用两种指标所得的结果完全一致,验证了两种指标的等价性.并且由颤振临界点处对应的颤振特征向量还可以定量给出各模态参与颤振耦合的程度.

参考文献:

- [1] 陈衍茂,刘济科.非线性颤振极限环稳定性判别的复数正规形法[J].航空动力学报,2007,22(4):614-618.
CHEN Yanmao, LIU Jike. Application of complex normal form method for stability judgement of limit cycle of non-linear flutter[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(4): 614-618. (in Chinese)
- [2] Dowell E H, Clark C, Cox D, et al. A modern course in aeroelasticity [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 2004.
- [3] Schuster D M, Liu D D, Huttshell L J. Computational aeroelasticity success, progress, challenge [J]. Journal of Aircraft, 2003, 40(5): 843-856.
- [4] Edwards J W, Wiesenman C D. Flutter and divergence analysis using the generalized aeroelastic analysis method [J]. Journal of Aircraft, 2008, 45(3): 906-915.
- [5] Banerjee J R. Flutter characteristics of high aspect ratio tailless aircraft [J]. Journal of Aircraft, 1984, 21(9): 733-736.
- [6] Rudin W. Real and complex analysis [M]. New York: McGraw Hill Book Company, 1966.
- [7] Rodden W P, Johnson E H. MSC/ NASTRAN aeroelastic analysis user's guide [M]. Los Angeles: MacNeal-Schwendler, 1994.