

文章编号: 1000 8055(2008)10 1847-07

阻尼陀螺系统动力响应的有限元复模态分析方法

曾 亮¹, 李 琳²

- (1. 中国民用航空总局 航空安全技术中心, 北京 100028;
2. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 采用复模态分析方法研究了陀螺系统及具有粘性阻尼的陀螺系统的动力响应及其数值分析方法, 提出了陀螺模态阻尼比的概念, 实现了利用有限元结构分析软件对诸如薄壁旋转轴和转动薄壁壳体等各类形式的复杂旋转薄壁结构进行动力特性分析的目的, 讨论了不同条件(单点旋转简谐激励和沿圆周呈周波型分布的激励)条件下转动薄壁壳体结构的行波振动特点。

关 键 词: 复模态; 阻尼陀螺系统; 动力响应; 行波振动
中图分类号: V214.3 **文献标识码:** A

Dynamic response of damped gyroscopic system with complex modal method

ZENG Liang¹, LI Lin²

- (1. Center of Aviation Safety Technology,
General Administration of Civil Aviation of China, Beijing 100028, China;
2. School of Jet Propulsion,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The dynamic response of damped gyroscopic system was researched by the complex modal method, and the concept of gyroscopic damping ratio was also put forward in this paper. With the method proposed in this paper, it is possible to analyze the dynamic characteristics of rotating thin-walled structures such as the rotating thin-walled shaft and shell. The characteristics of traveling wave vibration of shell under different load condition (single-point harmonic load and the harmonic load with k circumferential waves) were also discussed.

Key words: complex modal method; damped gyroscopic system; dynamic response; traveling wave vibration

旋转薄壁壳体结构由于具有重量轻、承载能力大的优点, 因此在航空发动机等旋转机械结构设计中被广泛采用, 例如, 航空发动机的静子机匣, 转动件中的薄壁轴, 一般均由不同形式的旋转

壳体结构组成^[1]。

在薄壁壳体结构的动力特性分析中, 对非转动薄壁壳体的动力特性可以利用通用的有限元结构分析软件完成, 而转动薄壁壳体结构由于转动

引起的离心力和哥氏力,一般的有限元结构分析软件尚不能进行此类结构动力特性的分析.从广义来说,转动薄壁壳体结构属于陀螺系统,对此类结构进行动力响应分析时,模态分析法是一种有效的方法.在实际应用中,虽然实模态分析法可以应用于离散系统和连续系统,但复模态分析法通常局限于离散系统.对于连续系统,复模态分析法仅应用于陀螺系统,但尚未应用于阻尼陀螺系统^[2].为了充分利用有限元结构分析软件的强大功能,曹航^[3]推导了转动薄壁壳体这一类陀螺系统的有限元方程,并利用有限元软件 MSC/NASTRAN 的二次开发语言 DMAP 开发了新的结构单元,将该类单元引入 NASTRAN 软件,实现了利用有限元软件对转动薄壁壳体结构进行固有特性的分析.

本文在文献[3]的基础上,采用复模态分析法研究了具有粘性阻尼的陀螺系统的动力响应分析方法,实现了利用有限元结构分析软件对各类形式的复杂旋转薄壁结构进行动力特性分析的目的,并讨论了不同条件下转动薄壁壳体结构行波振动的特点.

1 陀螺系统的稳态响应

N 自由度陀螺系统的强迫振动方程可以写成以下形式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [G]\{\dot{x}\} + [K_0]\{x\} = \{P(t)\} \quad (1)$$

其中 $[M]$, $[G]$, $[K_0]$ 分别为系统的质量矩阵、哥氏力矩阵(即陀螺矩阵)以及考虑离心力后的刚度矩阵, $\{x\}$ 和 $\{P(t)\}$ 分别为 N 维位移列向量和 N 维激励列向量. $[M]$, $[K_0]$ 为 N 阶对称方阵, $[G]$ 为 N 阶反对称矩阵.

在(1)式中令 $\{P(t)\} = \{0\}$,即可得陀螺系统的特征值问题,关于陀螺系统特征值的基本性质可参考文献[3]的有关内容.

设 λ 和 $\{\Phi\}$ 分别是(1)式所对应的陀螺系统的特征值和特征向量(其共轭对 $\bar{\lambda}$, $\{\bar{\Phi}\}$ 也是对应的特征值和特征向量),且 $\lambda = j\omega$,文献[3]给出了陀螺系统复频响应函数矩阵 $[H(\omega)]$ 的模态展开式

$$[H(\omega)] = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\{\Phi_i\}\{\bar{\Phi}_i\}^T}{2(j\omega - \lambda_i)} \quad (2)$$

如果激励为简谐激励,用复数表示为 $\{P(t)\} = \{P_0\}e^{j\omega t}$,那么,利用复频响应函数矩阵便可得到陀螺系统对简谐激励的稳态响应的复数表示为

$$\{x(t)\} = [H(\omega)]\{P_0\}e^{j\omega t}$$

$$\sum_{i=1}^{2N} \frac{\{\Phi_i\}\{\bar{\Phi}_i\}^T}{2(j\omega - \lambda_i)} \{P_0\}e^{j\omega t} \quad (3)$$

从(3)式可见,当 $j\omega \approx \lambda_i$ 时,第 i 阶振动的振幅会变为无穷,此时称系统发生了第 i 阶共振.当然,对实际结构而言,由于存在各种形式的阻尼,因此结构的响应不可能为无穷大.

2 阻尼陀螺系统的稳态响应

考虑阻尼影响的 N 自由度陀螺系统的强迫振动方程可以写成以下形式^[4]:

$$[M]\{\dot{x}\} + [G]\{x\} + [C]\{x\} + [K_0]\{x\} = \{P(t)\} \quad (4)$$

其中 $[M]$, $[G]$, $[K_0]$, $\{P(t)\}$ 意义同前, $[C]$ 为 $N \times N$ 阶的系统阻尼矩阵.

现在对(4)式补充下列方程

$$[K_0]\{x\} - [K_0]\{x\} = 0 \quad (5)$$

上式与(4)式可以合写为

$$[A]\{Y\} + [B]\{Y\} + [D]\{Y\} = \{Q(t)\}. \quad (6)$$

其中

$$[A] = \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [G] & [K_0] \\ -[K_0] & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{y\} = [\{y\}_1, \dots, \{y_N\}],$$

$$\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{P(t)\} \end{Bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} [C] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(6)式即为阻尼陀螺系统在状态空间中的强迫振动方程.

现在对(6)式做下述坐标变换

$$\{Y\} = [\Phi]\{Z\} \quad (7)$$

其中

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{\Phi_i\} \\ \{\Phi_i\} \end{Bmatrix},$$

$$[\Phi] = [\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}, \dots, \{\Phi_{2N}\}],$$

$$[\bar{\Phi}] = [\{\bar{\Phi}_1\}, \{\bar{\Phi}_2\}, \dots, \{\bar{\Phi}_{2N}\}],$$

同时设 $[\Phi]$ 为对应的无阻尼陀螺系统的特征向量矩阵(状态空间下),则可得阻尼陀螺系统在状态空间坐标 Z 下的状态方程为

$$[\bar{\Phi}]^T [A] [\Phi] \{Z\} + [\bar{\Phi}]^T [B] [\Phi] \{Z\} + [\bar{\Phi}]^T [D] [\Phi] \{Z\} = [\bar{\Phi}]^T \{Q(t)\}. \quad (8)$$

根据陀螺系统特征向量的正交性^[2]以及

$$[\bar{\Phi}]^T \{Q(t)\} = [\bar{\Phi}]^T \{P(t)\},$$

由(8)式可以得到

$$[A_p]\{Z\} + [B_p]\{Z\} + [D_p]\{Z\} = [\bar{\Phi}]^T \{P(t)\}. \quad (9)$$

其中

$$[D_p] = [\bar{\Phi}]^T [D] [\Phi]. \quad (10)$$

在(9)式中,虽然 $[A_p]$, $[B_p]$ 是对角阵,但 $[D_p]$ 一般并非对角阵,因此(9)式仍然存在耦合.为了便于求解,我们采用工程上对阻尼的近似处

理方法,即在(10)式中,忽略 $[D_p]$ 中的全部非对角线元素,则 $[D_p]$ 成为如下形式的对角阵:
 $[D_p] = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_{2N}]$. 经过这样处理后,(9)式的 $2N$ 个方程已经全部解耦,其中第 i 个方程为

$$2\dot{z}_i - 2\lambda z_i + d_i z_i = \{\Phi_i\}^T \{P(t)\} \tag{11}$$

进一步可令

$$d_i = 2\xi\lambda \tag{12}$$

由此得到

$$\dot{z}_i - \lambda z_i + \xi\lambda z_i = \frac{1}{2}\{\Phi_i\}^T \{P(t)\} \tag{13}$$

其中 ξ 定义为第 i 阶陀螺模态阻尼比.

采用拉氏变换方法求解(13)式,变换后得到

$$sz_i(s) - z_i(0) - \lambda z_i(s) + \xi\lambda z_i(s) = \frac{1}{2}\{\Phi_i\}^T \{P(s)\} \tag{14}$$

(14)式经整理后得

$$z_i(s) = \frac{z_i(0)}{s - \lambda + \xi\lambda} + \frac{\{\Phi_i\}^T \{P(s)\}}{2(s - \lambda + \xi\lambda)} \tag{15}$$

同样,利用状态方程的方法可以得到阻尼陀螺系统的复频响应函数矩阵 $[H(\omega)]$ 的模态展开式以及简谐激励 $\{P(t)\} = \{P_0\}e^{j\omega t}$ 下该系统的稳态响应的复数表示,分别如以下两式所示

$$[H(\omega)] = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\{\Phi_i\}\{\Phi_i\}^T}{2(j\omega_i - \lambda + \xi\lambda)} \tag{16}$$

$$\{x(t)\} = [H(\omega)]\{P_0\}e^{j\omega t} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\{\Phi_i\}\{\Phi_i\}^T}{2(j\omega_i - \lambda + \xi\lambda)} \{P_0\}e^{j\omega t} \tag{17}$$

在(16)式和(17)式中,如果忽略阻尼,则可分别得到无阻尼陀螺系统的复频响应函数矩阵以及系统对简谐激励的稳态响应的模态展开式,分别如(2)式和(3)式所示.

当采用有限元法对(阻尼)陀螺系统进行动力响应的数值分析时,首先需要使用前述 DMAP 语言(MSC/NASTRAN 软件)所开发的结构单元分析陀螺系统固有特性,计算系统的前 N 阶复特征值和复特征向量,并提取各阶复特征向量中的 M 个自由度对应的数据,其中包括激励作用的自由度和对响应感兴趣点(观察点)的自由度.提取的复特征向量 $\{\Phi_i\}$ 组成以下两式

$$[\Phi] = [\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}, \dots, \{\Phi_N\}]^{M \times N} \tag{18}$$

$$[\Phi]^T = [\{\Phi_1\}^T, \{\Phi_2\}^T, \dots, \{\Phi_N\}^T]^T \tag{19}$$

然后将(18)式和(19)式代入(2)式或(16)式,可分别获得(阻尼)陀螺系统的动柔度矩阵 $^{[5]}$,再根据(3)式或(17)式即可获得(阻尼)陀螺系统的响

应.由于本文是采用模态迭加的思路求解阻尼陀螺系统的动力响应,因此该方法仅适用于小阻尼的陀螺系统,即假设阻尼对系统固有频率的影响可以忽略.

3 算例分析

3.1 算例 1

图 1 所示陀螺系统,它的运动方程如(1)式所示,其中参数为^[6]

$$A = \begin{bmatrix} m\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & ma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ma & 11ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma & 0 & 0 & 11ma^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -m\omega^2\Omega & -m\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ m\omega^2\Omega & 0 & 0 & -m\omega^2 & 0 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & -m\Omega & ma\Omega & 0 \\ 0 & m\omega^2 & m\Omega & 0 & 0 & ma\Omega \\ 0 & 0 & -ma\Omega & 0 & 0 & 4ma^2\Omega \\ 0 & 0 & 0 & -ma\Omega & -4ma^2\Omega & 0 \end{bmatrix},$$

$\Omega = 50 \text{ rad/s}, \omega = 60 \text{ rad/s}, a = 0.61 \text{ m}, m = 0.454 \text{ kg}.$

表 1 为本文计算的陀螺系统的特征值和文献 [6] 给出的结果,从表中可以看到,特征值基本相同,说明了本文计算方法的正确性.同时从表中还可以发现,无阻尼情况下,系统的特征值只有虚部,符合文献[3]中给出的陀螺系统特征值的基本性质.

表 1 陀螺系统特征值
Table 1 Eigenvalue of gyroscopic system

特征值 λ_i	方 法	
	文献[6]	本文
λ_1	$\pm 111.3348j$	$\pm 111.334803j$
λ_2	$\pm 33.8111j$	$\pm 33.811131j$
λ_3	$\pm 2.5237j$	$\pm 2.523672j$

在图 1 所示的陀螺系统中,沿方向 1 施加 4.45 N 的简谐激励,激励频率为 0.1~20 Hz,应用前述有关理论得到了该系统在方向 1 的位移幅频响应曲线,如图 2 所示.从图中可以看到:①单

点简谐激励下,陀螺系统的位移幅频响应曲线同非转动系统一样,即,当激励频率与系统的固有频率相等时,系统就会发生共振,因此曲线上对应于每个固有频率都会出现峰值;②由于没有阻尼的作用,在固有频率处,系统的位移响应趋于无穷。

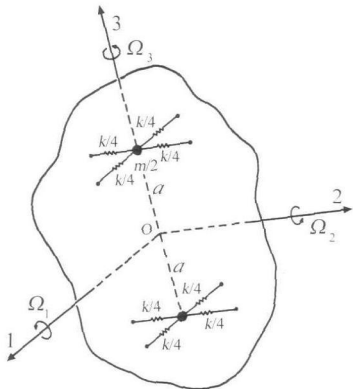


图 1 陀螺系统
Fig. 1 Gyroscopic system

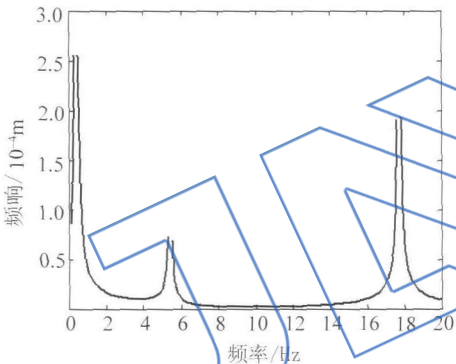


图 2 单点激励下的幅频响应曲线
Fig. 2 FRF curve under single-point harmonic load

3.2 算例 2

图 3 所示为一个两自由度,有阻尼的陀螺系统,它的运动方程如(4)式所示,其中参数为^[7]

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix},$$
$$m = 1 \text{ kg}, \Omega = 1 \text{ rad/s}, c = 0.1 \text{ kg/s}, k_1 = 3 \text{ kg/s}^2, k_2 = 5 \text{ kg/s}^2.$$

表 2 为不同方法得到的该阻尼陀螺系统的特征值(文献[7]采用的是二阶摄动方法).本文的结果和文献结果基本相同,再次说明了本文计算方法的正确性。

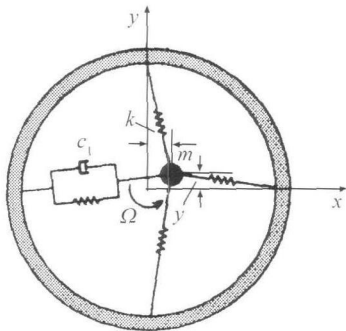


图 3 阻尼陀螺系统
Fig. 3 Damped gyroscopic system

表 2 阻尼陀螺系统特征值
Table 2 Eigenvalue of damped gyroscopic system

特征值 λ_i	方 法	
	文献[7]	本文
λ_1	$-0.018\ 937 \pm 0.936\ 369j$	$-0.018\ 928 \pm 0.936\ 426j$
λ_2	$-0.031\ 063 \pm 3.019\ 857j$	$-0.031\ 060 \pm 3.020\ 448j$

在图 3 所示的阻尼陀螺系统中,沿 Y 向施加 1 N 的简谐激励,激励频率为 0.1~ 0.6 Hz,应用前述有关理论得到了陀螺系统和阻尼陀螺系统在 Y 向的位移幅频响应曲线,分别如图 4 (a) 和图 4 (b) 所示.从图中可以看到:①陀螺系统的位移幅频响应曲线特点同算例 1,可参考前述有关分析;②单点简谐激励下,阻尼陀螺系统的位移幅频响应曲线同非转动阻尼系统一样,当激励频率与系统的固有频率相等时,系统就会发生共振,因此曲线上对应于每个固有频率都会出现峰值;③比较 (a) 和 (b) 两图可以看到,小阻尼对陀螺系统的固有频率的影响不大,但对系统响应影响很大,阻尼减振的作用非常明显。

3.3 转动薄壁壳体的稳态响应

某一圆柱壳体,半径 $R = 0.16 \text{ m}$,长 $l = 0.256 \text{ m}$,厚度 $h = 0.0025 \text{ m}$,材料密度 $\rho = 8\ 000 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.3$.采用 8 节点六面体单元建立圆柱壳的有限元模型,如图 5 所示.边界条件为一端固支,一端自由。

3.3.1 转动薄壁壳体的固有特性分析

在航空发动机中,图 5 所示的壳体可用于模拟篦齿封严装置中的静子结构,当气流通过封严装置时,封严腔中存在旋转压力波,此压力波以转子转

速 Ω 旋转, 就有可能激起静子结构的行波共振. 利用 MSC/NASTRAN 的二次语言 DMAP 开发的转动薄壁壳体固有特性分析模块, 得到了壳体在不同转速和周波 N 下的动频和前、后行波频率, 如表 3 所示^[1]. 在封严装置设计中, 转子转速 Ω 要避开壳体结构的前、后行波频率, 以避免引起静子结构的行波共振.

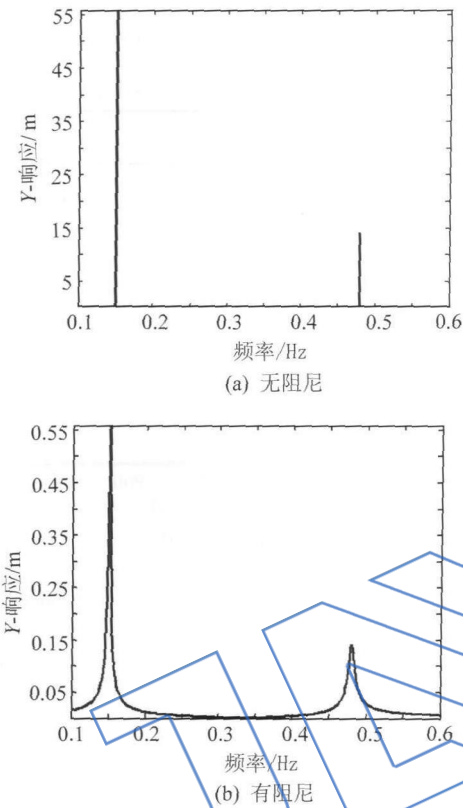


图 4 单点激励下的幅频响应曲线(Y 向)
Fig. 4 FRF curve under single-point harmonic load(Y direction)

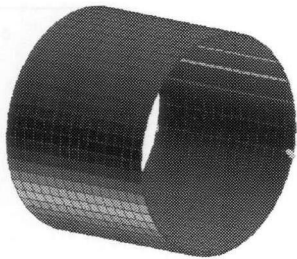


图 5 圆柱壳体有限元模型
Fig. 5 FEM model cylindrical shel

3. 3. 2 转动薄壁壳体的稳态响应分析

航空发动机中的振动载荷非常复杂, 除了有与转速同步的不平衡力, 还有不均匀气动载荷、机械激励等. 本文以壳体转速为 5 000 r/min 的情况为

例, 分析两种典型的激励形式, 一种为与壳体同步旋转的单点径向激励 $F = F_0 \sin \omega t$, 用于模拟不平衡力的作用; 另一种为沿圆周简谐分布的静止不交变的径向激励 $F = F_0 \sin k\theta$, 用于模拟发动机中不均匀气动载荷的作用, 其中 θ 为节点的周向坐标, $k = 3, 4$ (激励形式参考图 6). 虽然该激励在静止坐标系中不交变(例如沿壳体周向有压力不均匀), 但是在转动坐标系中, 激励相对于壳体仍是交变的, 有可能激起壳体的共振^[8-10].

两种情况下的频率分析范围均为 540~ 1 100 Hz, 激励幅值 F_0 均为 1 N, 施加在壳体的自由端.

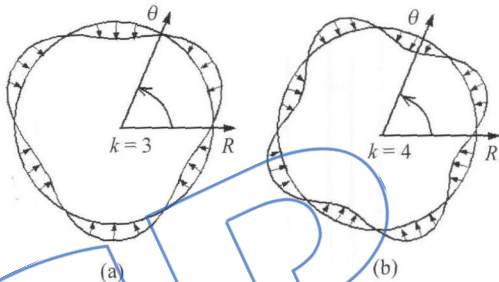


图 6 沿圆周简谐分布的激励
Fig. 6 Traveling harmonic load

应用第 2 节的有关理论, 单点激励下壳体自由端某点的径向位移幅频响应曲线如图 7 所示, 图(a)、(b)、(c)分别对应于无阻尼, 陀螺模态阻尼比 ξ 为 0. 002 和 0. 004 时的幅频响应曲线. 由图可以看到: ①当单点激励频率与转动薄壁壳体的前、后行波频率相等时, 壳体就会发生行波共振. 因此曲线上对应于每个前、后行波频率都会出现峰值; ②在无阻尼情况下, 壳体的共振峰值趋于无穷; 当考虑阻尼作用时, 壳体的共振峰值有了显著降低, 阻尼减振的效果非常明显(陀螺模态阻尼比 ξ 为 0. 004 时的减振效果优于 ξ 为 0. 002 时的减振效果).

当沿圆周简谐分布的径向激励作用在壳体端部时, 自由端某点的径向位移幅频响应曲线如图 8 和图 9 所示, 两图中(a)、(b)、(c)分别对应于无阻尼, 陀螺模态阻尼比 ξ 为 0. 002 和 0. 004 时的响应曲线. 图 8 中壳体的径向位移幅频响应曲线上仅有一个峰值, 对应于 $f = 695$ Hz; 而图 9 中的径向位移幅频曲线的峰值则对应于 $f = 631$ Hz. 从表 3 可知, $f = 695$ Hz 和 $f = 631$ Hz 分别是壳体的 3 周波和 4 周波后行波频率, 两图中曲线的特点说明了, 周波数为 k 的旋转激励可使壳体结构发生具有相同周波数的后行波共振, 其共振频率为所有包含 k 周波数变形的模态所对应的频率.

表 3 壳体前、后行波频率 (动坐标系下,单位: Hz)

Table 3 Traveling frequency of rotating shell

转速/ (r/min)	周波								
	N = 2			N = 3			N = 4		
	动频	前行波	后行波	动频	前行波	后行波	动频	前行波	后行波
0		1 004. 1			614. 7			515. 2	
5 000	1 010	946. 6	1 072. 6	649. 4	598. 4	695. 1	596. 7	554. 5	630. 8
10 000	1 027. 3	899. 74	1 152. 0	743. 84	637. 60	831. 29	792. 5	703. 40	856. 53

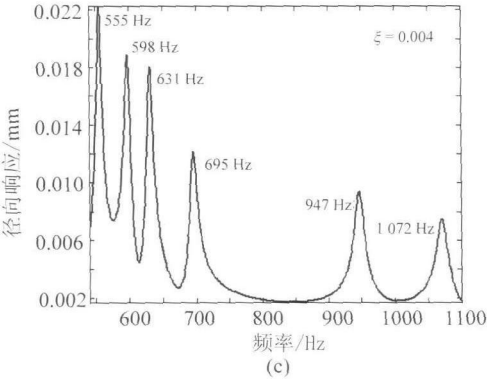
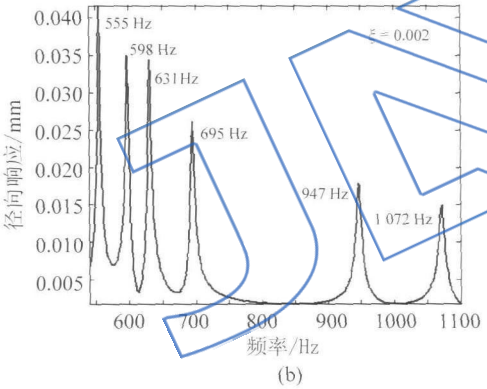
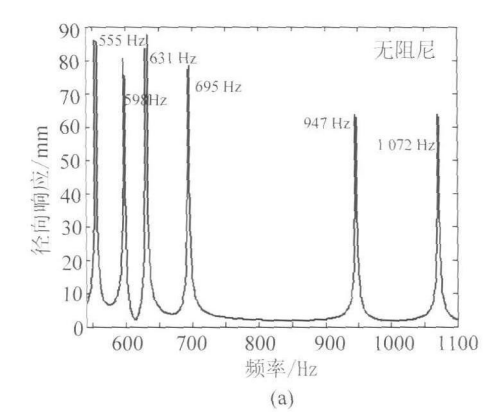


图 7 单点简谐激励下的径向位移幅频响应曲
Fig. 7 Radial FRF curve of shell under
single-point harmonic load

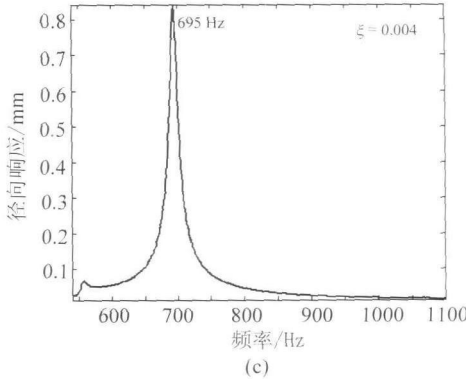
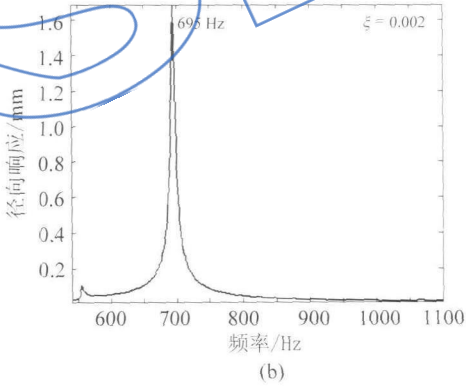
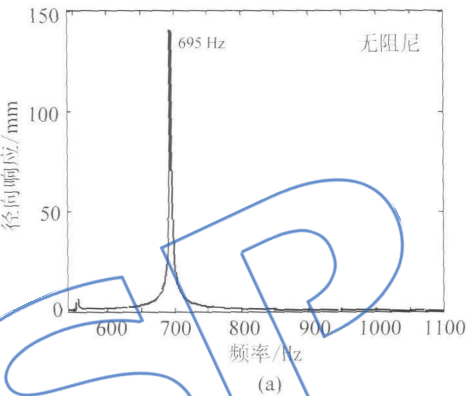


图 8 $k=3$ 时的径向位移幅频响应曲线
Fig. 8 Radial FRF curve of shell under traveling
harmonic load ($k=3$)

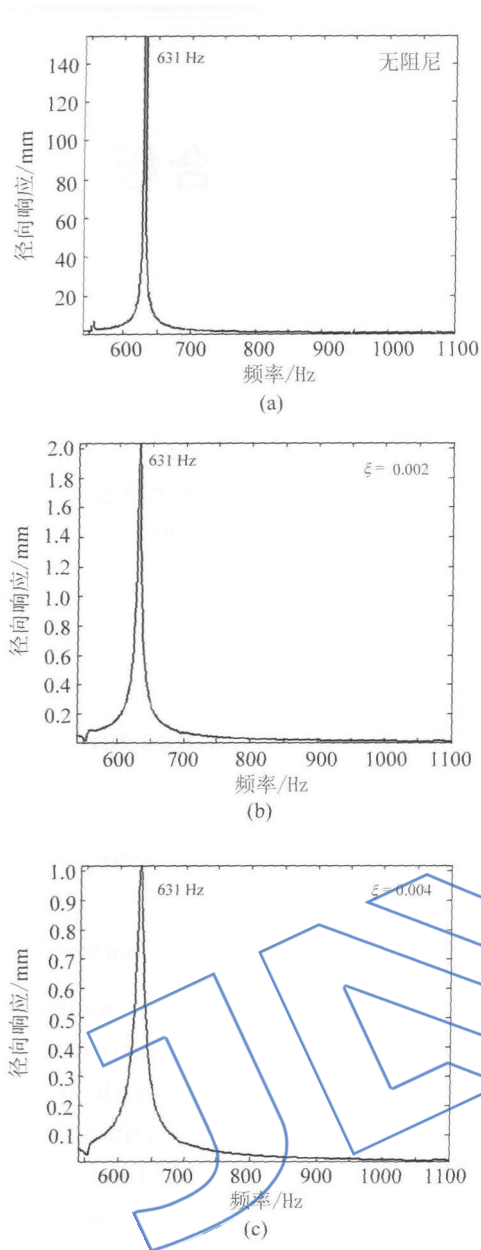


图 9 $k=4$ 时的径向位移幅频响应曲线
Fig. 9 Radial FRF curve of shell under traveling harmonic load ($k=4$)

4 结 论

转动薄壁壳体结构的动力响应属于陀螺系统响应问题,本文发展了针对陀螺系统的复模态分析理论,研究了陀螺系统及阻尼陀螺系统的动力响应及其数值分析方法,提出了陀螺模态阻尼比的概念,并将其应用于对转动薄壁壳体结构的动力响应分析中,得到了以下结论:

1) 与壳体同步旋转的单点简谐激励可激起壳体的行波共振,共振频率为壳体的前、后行波频率;

2) 沿圆周呈周波型分布的激励可使转动(非转动)壳体产生与激励同周波数的后行波共振;

3) 在一定频率范围内具有 k 周波数的激励能激起转动(非转动)壳体多个含有 k 周波数的行波共振(轴向波数不同).

参考文献

[1] 晏砺堂, 朱梓根, 李其汉. 高速旋转机械振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
YAN Litang, ZHU Zigen, LI Qihan. Vibration of rotating machinery in high speed[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1994. (in Chinese)

[2] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
ZHANG Wen. The dynamics of rotor[M]. Beijing: Science Press, 1990. (in Chinese)

[3] 曹航. 转动壳体的动力特性与屈曲分析[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2002.
CAO Hang. The dynamic and buckling analysis of rotating shell[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002. (in Chinese)

[4] 曾亮. 旋转薄壁结构的减振装置设计理论与实验研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2007.
ZENG Liang. The design and experiment research of damping devices for vibration control in thirr walled structures[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007. (in Chinese)

[5] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
NI Zhenhua. Mechanics of vibration[M]. Xi' an: Xi' an Jiaotong University Press, 1989. (in Chinese)

[6] Meirovitch L. A modal analysis for the response of linear gyroscopic system[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1975: 446-450.

[7] Meirovitch L, Ryland G. Response of slightly damped gyroscopic system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 67(2): 1-19.

[8] 王桂华, 李琳. 旋转脉动激励下壳体的行波振动[J]. 航空发动机, 1999, 1: 30-33.
WANG Guihua, LI Lin. Traveling wave vibration of shell under rotating impulse load[J]. Journal of Aero engine, 1999, 1: 30-33. (in Chinese)

[9] 王桂华, 李琳. 航空发动机风扇机匣行波振动的分析方法[J]. 航空动力学报, 2000, 15(2): 183-186.
WANG Guihua, LI Lin. Method for traveling wave vibration analysis of fan casing in aeror engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2000, 15(2): 183-186. (in Chinese)

[10] 《航空发动机设计手册》总编委会. 航空发动机设计手册: 第 18 分册[M]. 北京: 航空工业出版社, 2001.