

文章编号: 1000 8055(2009)03-0615-11

基于控制理论的压气机叶型数值优化方法

杜 磊, 宁方飞

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 将基于控制理论的气动优化方法应用于轴流压气机叶型设计. 以 Euler 方程作为流动控制方程, 具体推导得出了其相应的伴随方程, 分析了边界条件, 并给出求解方法. 以给定压力分布作为目标函数, 将参数化叶型作为设计变量, 在求得目标函数对设计变量的梯度信息后, 结合 BFGS 优化算法得到优化方向, 更新设计变量完成叶型的优化设计. 通过三个算例验证了该叶型优化设计方法的有效性.

关 键 词: 气动优化; 伴随方程; 叶型参数化; Euler 方程

中图分类号: V 231. 3

文献标识码: A

Numerical optimization of compressor blade profile based on the control theory

DU Lei, NING Fang-fei

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: An aerodynamic optimization method based on the control theory has been applied to the axial compressor 2-D blade profile design. The correspondent adjoint equations on the basis of Euler equations and the relevant boundary conditions were deduced in detail. The solving method for the adjoint equations was also proposed. The procedure to conduct an optimized design of a compressor 2-D blade profile could be divided into three steps. First, the required surface pressure distribution is pre-specified and set as the objective function. Second, the parameterized blade profile is seen as a set of the design variables, and the gradients of objective function to the design variables can be calculated by solving the adjoint equations. Third, a new blade profile is obtained by using the BFGS optimization algorithm, and this process is repeated until a converged profile is obtained. The proposed method has been validated by three illustrations.

Key words: aerodynamic optimization; adjoint equations; parametrical blade profile; Euler equations

如何得到一个给定压力分布的叶型, 即所谓的可控扩散叶型(Controlled diffusion airfoil)是叶型优化设计中的一个重要问题. 自上世纪 70 年代以来, 已有多种 CDA 叶型的反问题设计方法, 例如 Deauer 等^[1]的速度图法, Schmidt 的势、流函数法^[2]等. 这些方法的特点是可以直接求得相

应的叶型, 计算简单. 但本身的一些缺点限制了他们的实际使用, 例如得到的叶型容易出现不合理的情况、不能满足叶型的光滑性和为考虑叶片的强度而限定的最大厚度和叶型截面积下限等要求、以及反问题的定解条件较难给出等. 为克服这些困难, 可以将获得 CDA 叶型过程作为一个基

收稿日期: 2008 03 07; 修订日期: 2008 06 19

基金项目: 国家“973”项目(2007CB210103)

作者简介: 杜磊(1985-), 男, 安徽宣城人, 硕士生, 主要从事叶轮机械气体动力学研究.

于正问题求解的优化过程来进行,将对叶型的限制作为约束条件引入以保证得到叶型的合理性.

从初始叶型出发,将叶型参数化为一组设计变量,叶型表面的给定压力分布(目标压力分布)与当前压力分布之差作为目标函数,目标函数是关于设计变量的隐函数,优化过程就是寻求目标函数极小的过程.一般常用的方法是基于目标函数关于设计变量的梯度,即梯度类方法,采用例如最速下降法、牛顿法、共轭梯度法等迭代求解目标函数的极值点.其中获得梯度的常见方法是有限差分方法^[3],其原理是单独扰动每个设计变量,用 CFD 分析程序计算相应的目标函数,除以扰动量,得到目标函数对每个设计变量的导数,即获得目标函数对设计变量的梯度信息.显然,当设计变量较多时,有限差分方法的计算量会很大.80 年代末期 Jameson A^[4] 首先提出基于控制理论的气动优化方法.该方法以偏微分方程系统的控制理论为基础,把叶型作为控制函数,把流场作为约束条件在目标函数中引入,将约束问题转化为无约束问题,设计问题转化为控制问题,通过求解流动控制方程和伴随方程来求解梯度,其计算量只相当于两倍的流场计算且与设计变量数目无关,这一显著特点为该方法应用于复杂外形的气动优化设计提供了可能. Jameson^[4,7], Reuther^[8,9], Anderson^[10], Elliot^[11] 等人先后运用速势方程、Euler 方程、Navier-Stokes 方程对翼型、机翼、翼身组合体乃至全机采用该理论进行了优化设计研究,并取得了良好效果.国内的杨旭东^[12] 将该方法应用于机翼的优化设计、李映辰^[13] 等人利用该方法对涡轮叶片进行了气动优化,各自获得了很好的结果.本文的工作是将该方法应用于压气机叶型的气动优化上.

1 基本原理^[7]

目标函数定量描述了叶型的优劣,优化的过程就是目标函数极值化的过程.该方法中目标函数可有多种选取方法,如阻力系数、升阻比、目标压力分布与当前压力分布之差等,均可表示如下:

$$I = I(\boldsymbol{w}, B)$$

目标函数是流场变量 $\boldsymbol{w}$ 和叶型形状 B 的隐函数,当形状发生微小变化时会导致目标函数有微小变化,即

$$\delta I = \left[\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{w}} \right]_I \delta \boldsymbol{w} + \left[\frac{\partial I}{\partial B} \right]_{II} \delta B \quad (1)$$

下标 I, II 分别表示流场变化和叶型形状变化对

目标函数值变化的贡献,其中 $\delta \boldsymbol{w}$ 和 δB 并不独立,受到流动方程 $R(\boldsymbol{w}, B) = 0$ 的约束

$$\delta \boldsymbol{R} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{w}} \right]_I \delta \boldsymbol{w} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial B} \right]_{II} \delta B = 0 \quad (2)$$

引入 Lagrange 因子 ϕ^T , 可以得到

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{w}} \delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial I}{\partial B} \delta B - \phi^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{w}} \delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial B} \delta B \right] = \left\{ \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{w}} - \phi^T \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{w}} \right\}_I \delta \boldsymbol{w} + \left\{ \frac{\partial I}{\partial B} - \phi^T \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial B} \right\}_{II} \delta B \quad (3)$$

选取的 ϕ 使其满足

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{w}} \right]^T \phi = \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{w}} \quad (4)$$

式(4)即所谓的伴随方程,那么式(3)中的第一项消失,变为

$$\delta I = H \delta B \quad (5)$$

其中

$$H = \left\{ \frac{\partial I}{\partial B} - \phi^T \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial B} \right\}$$

式(5)中的 δI 此时已不再含有流场变化量 $\delta \boldsymbol{w}$, 此即意味着对于任意多个设计变量,求解 I 对其梯度时无需更多的流场计算,只要一次流场求解和一次与流场求解计算量相当的伴随方程的求解,这正是该方法的核心所在.每个设计循环中按此方式改变叶型

$$\delta B = -\lambda H$$

其中 λ 为正,当 λ 足够小(5)就足够精确,更新叶型后

$$\delta I = -\lambda H^T H < 0$$

则更新后叶型的目标函数与更新前相比有所减小,这样就完成了一个设计循环,如此迭代直到取得最小的目标函数值.当然如果要获得目标函数极大,只要 λ 取负值即可.

2 伴随方程及其边界条件

本文采用的流动控制方程为二维 Euler 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} \\ \rho u_i H \end{bmatrix}$$

其中

$$p = (\gamma - 1) \rho \left[E - \frac{1}{2} (u_i u_i) \right], H = E + \frac{p}{\rho}$$

流场计算使用 O 型网格,为了推导简便需要做物理域(x_1, x_2) 到计算域(ξ_1, ξ_2) 的变换,如图 1

所示

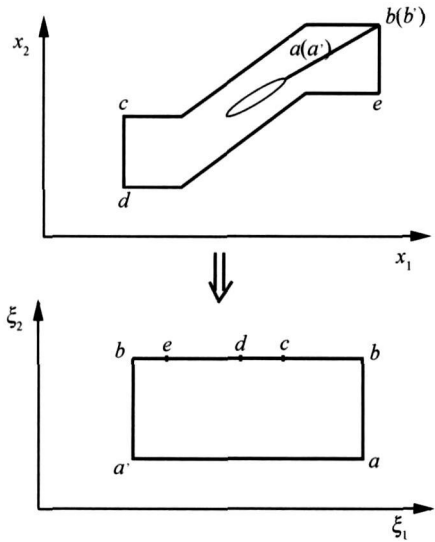


图1 变换示意图

Fig. 1 Sketch map of the transform

变换矩阵

$$K_{ij} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right], \quad J = \det(K), \quad K_{ij}^{-1} = \left[\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right]$$

计算域中控制方程为

$$\frac{\partial (Jq)}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} = 0 \tag{6}$$

其中

$$F_i = S_{ij} f_j, \quad S_{ij} = JK_{ij}^{-1} \tag{7}$$

令

$$A_i = \frac{\partial f_i}{\partial q}$$

则叶型受扰动所引起的通量变化为

$$\delta F_i = S_{ij} A_j \delta q + \delta S_{ij} A_j q \tag{8}$$

定常流动时, 流动变化受到流动控制方程的约束

$$\frac{\partial \delta F_i}{\partial \xi_j} = 0$$

令 Lagrange 因子

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T$$

左乘上式且在整个流动区域 D 内积分, 有

$$\iint_D \varphi^T \frac{\partial \delta F_i}{\partial \xi_j} d\xi_1 d\xi_2 = 0$$

如果 φ 可微, 则有

$$\iint_D \frac{\partial (\varphi^T \delta F_i)}{\partial \xi_j} d\xi_1 d\xi_2 - \iint_D \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} \delta F_i d\xi_1 d\xi_2 = 0$$

对上式应用 Gauss 定理得

$$\begin{aligned} &\int_a^b \varphi^T \delta F_2 d\xi_1 - \int_{a'}^{b'} \varphi^T \delta F_2 d\xi_1 - \\ &\iint_D \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} \delta F_i d\xi_1 d\xi_2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

目标函数取为

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b (p - p_d)^2 dS$$

其中 p 为当前的计算压力分布, p_d 为给定的压力分布. 叶型受扰动后目标函数值发生变化

$$\begin{aligned} \delta I = &\frac{1}{2} \int_a^b (p - p_d)^2 \delta \left(\frac{dS}{d\xi_1} \right) d\xi_1 + \\ &\int_a^b (p - p_d) \left(\frac{dS}{d\xi_1} \right) \delta p d\xi_1 \end{aligned} \tag{10}$$

将流动约束式(9)引入到目标函数式(10)中得

$$\begin{aligned} \delta I = &\frac{1}{2} \int_a^b (p - p_d)^2 \delta \left(\frac{dS}{d\xi_1} \right) d\xi_1 + \\ &\iint_D \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} \delta F_i d\xi_1 d\xi_2 + \\ &\int_a^b \left[(p - p_d) \left(\frac{dS}{d\xi_1} \right) \delta p + \varphi^T \delta F_2 \right] d\xi_1 - \int_b^{b'} \varphi^T \delta F_2 d\xi_1 \end{aligned} \tag{11}$$

前面提到过, 该方法的核心在于式(11)最后表达式中不再含有流场变化量, 以下便是以此为原则对式(11)中各项的分别讨论:

1) 流场区域积分项

$$\begin{aligned} &\iint_D \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} \delta F_i d\xi_1 d\xi_2 = \\ &\iint_D \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} (S_{ij} A_j \delta q + \delta S_{ij} A_j q) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

此项不含流场变化量, 必有

$$\frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} S_{ij} A_j = 0$$

为了可以时间推进求解加上时间项, 利用坐标变换关系, 上式物理域中的形式为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - A^T \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \tag{12}$$

式(12)即为二维 Euler 方程相应的伴随方程, 此时

$$\iint_D \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} \delta F_i d\xi_1 d\xi_2 = \iint_D \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi_j} \delta S_{ij} f_j d\xi_1 d\xi_2 \tag{13}$$

2) 叶型表面积分项

流动在叶型表面满足 $\mathbf{v} = 0$ 的滑移边界条件, 那么有

$$\delta F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{21} \\ S_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \delta p + p \begin{bmatrix} 0 \\ \delta S_{21} \\ \delta S_{22} \\ 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} &\int_a^b (p - p_d) \left(\frac{dS}{d\xi_1} \right) \delta p + \varphi^T \delta F_2 d\xi_1 = \\ &\int_a^b \left[(p - p_d) \left(\frac{dS}{d\xi_1} \right) + \varphi_2 S_{21} + \varphi_3 S_{22} \right] \delta p d\xi_1 + \\ &\int_a^b (\varphi_2 \delta S_{21} + \varphi_3 \delta S_{22}) p d\xi_1 \end{aligned}$$

此项不含流场变化量, 必有

$$\varphi_2 S_{21} + \varphi_3 S_{22} + (p - p_d) \left(\frac{dS}{d\xi} \right) = 0$$

该式在物理域中的形式为

$$\varphi_2 n_1 + \varphi_3 n_2 = - (p - p_d) \quad (14)$$

式(14)即为伴随方程在叶型表面的边界条件, 其中 n_1, n_2 为物理域中叶型表面法向量分量, 此时

$$\int_a^b (p - p_d) \left(\frac{dS}{d\xi} \right) \delta p + \varphi^T \delta F_2 d\xi = \int_a^b (\varphi_2 \delta S_{21} + \varphi_3 \delta S_{22}) p d\xi \quad (15)$$

3) 外边界积分项

$$\int_b^c \varphi^T \delta F_2 d\xi = \int_b^c \varphi^T \delta F_2 d\xi + \int_d^e \varphi^T \delta F_2 d\xi + \int_c^d \varphi^T \delta F_2 d\xi + \int_e^f \varphi^T \delta F_2 d\xi$$

从变换示意图中可以看出 $\overline{bc}, \overline{de}$ 对应于物理域中的一对周期性边界, 如果伴随方程也满足周期性条件, 则自然有

$$\int_b^c \varphi^T \delta F_2 d\xi + \int_d^e \varphi^T \delta F_2 d\xi = 0$$

$\overline{cd}$ 段对应于物理域中的进口边界, 若流动在进口

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & u_1^2 & u_1 u_2 \\ \frac{1}{2} u_1 (u_1^2 + u_2^2) & \frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{3}{2} \rho u_1^2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 & \rho u_1 u_2 \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{3}{2} \rho u_1^2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 & \rho u_1 u_2 & \frac{\gamma}{\gamma-1} u_1 \end{bmatrix}$$

$\overline{eb}$ 对应于物理域中的出口边界, 如果出口亚声, 有

$$\varphi^T A_1 \delta q = \varphi^T M \begin{bmatrix} \delta \rho \\ \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

要使出口处积分不含流场变化量, 则有

$$\varphi_1 + u_1 \varphi_2 + u_2 \varphi_3 + \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) \varphi_4 = 0 \quad (18)$$

$$\varphi_1 + 2u_1 \varphi_2 + u_2 \varphi_3 +$$

$$\left[\left(\frac{\gamma p}{\gamma-1} \right) \rho + \frac{3}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right] \varphi_4 = 0 \quad (19)$$

$$\varphi_3 + u_2 \varphi_4 = 0 \quad (20)$$

式(18)~(20)即为出口亚声时伴随方程的出口边界条件. 如果出口超声, 应满足

$$\varphi = [0, 0, 0, 0]^T \quad (21)$$

在实际计算中保持物理域中进出口边界的几何位置不变, 最后

$$\int_b^c \varphi^T \delta F_2 d\xi = 0 \quad (22)$$

处超声, 那么 $\delta q = 0$, 此时在进口处对伴随方程而言不用给出边界条件; 若流动在进口处亚声, 流场计算时进口处的总温、总压和进口气流角不变, 即有

$$\begin{bmatrix} \delta \rho \\ \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta p \end{bmatrix} = X \delta p$$

其中

$$X^T =$$

$$\left[\frac{\rho}{\gamma p}, -\frac{1}{\rho(u_1 + u_2 \tan \alpha)}, -\frac{\tan \alpha}{\rho(u_1 + u_2 \tan \alpha)}, 1 \right]$$

α 为进口气流角. 若在进口处与流场变化量无关, 则有

$$\varphi^T \delta f_1 = \varphi^T M \begin{bmatrix} \delta \rho \\ \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta p \end{bmatrix} = \varphi^T M X \delta p = 0$$

即满足 $\varphi^T M X = 0$ (16)

其中

$$M X = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 2\rho u_1 & 0 & 1 \\ \rho u_2 & \rho u_1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{3}{2} \rho u_1^2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 & \rho u_1 u_2 & \frac{\gamma}{\gamma-1} u_1 \end{bmatrix}$$

将(13), (15), (22)带入(11)最后得到

$$\delta I = \frac{1}{2} \int_a^b (p - p_d)^2 \delta \left(\frac{dS}{d\xi} \right) d\xi + \int_a^b (\varphi_2 \delta S_{21} + \varphi_3 \delta S_{22}) p d\xi + \iint \frac{\partial \varphi^T}{\partial \xi} \delta S_{ij} f_j d\xi d\xi \quad (23)$$

3 伴随方程数值求解

在用式(23)求解梯度时首先需要 $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]^T$ 已知, 即求解完流场还必须还要求解伴随方程. 式(12)是常系数的双曲型方程, 其系数矩阵与流动控制方程系数矩阵相似, 可以使用类似于流场计算的数值方法求解伴随方程. 本文采用有限体积空间离散, 时间上采用四阶 Runge-Kutta 显示格式离散.

对于任意的有限体积单元 $V_{i,j}$, 伴随方程写成积分形式为

$$\int_{V_{i,j}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV - \int_{V_{i,j}} \left(A_1^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2^T \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dV = 0$$

该体积单元中认为其系数矩阵为常数, 且利用

Gauss 公式变换为

$$\int_{V_{i,j}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV - \mathbf{A}_{1,i,j}^T \int_{B_{i,j}} \varphi_{n_x} dS - \mathbf{A}_{2,i,j}^T \int_{B_{i,j}} \varphi_{n_y} dS = 0$$

式中 n_x , n_y 为单元体表面外法向量分量. 令 $\varphi_{i,j}$ 为单元中心的面积平均, 空间离散后的形式为

$$V_{i,j} \frac{d\varphi_{i,j}}{dt} - \mathbf{R}_{i,j} = 0 \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_{i,j} = \tilde{\mathbf{F}}|_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{\mathbf{F}}|_{i-\frac{1}{2},j} + \tilde{\mathbf{F}}|_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{F}}|_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

上式中 $\tilde{\mathbf{F}}|_{i+\frac{1}{2},j}$, $\tilde{\mathbf{F}}|_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{F}}|_{i-\frac{1}{2},j}$, $\tilde{\mathbf{F}}|_{i,j-\frac{1}{2}}$ 分别为四边形单元体表面“通量”.

$$\tilde{\mathbf{F}}|_{i+\frac{1}{2},j} = \mathbf{A}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T S|_{i+\frac{1}{2},j} \varphi_{i+\frac{1}{2},j} \quad (26)$$

其中 S 为单元体表面面积, 且

$$\mathbf{A}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T = \mathbf{A}_{1,i,j}^T n_x|_{i+\frac{1}{2},j} + \mathbf{A}_{2,i,j}^T n_y|_{i+\frac{1}{2},j} \quad (27)$$

界面上的 φ 采用取相邻单元的平均值的中心差分格式, 即

$$\varphi_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}) \quad (28)$$

将 (28) 代入 (26) 中得

$$\tilde{\mathbf{F}}|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T S|_{i+\frac{1}{2},j} (\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}) \quad (29)$$

式 (29) 计算“通量”时不能保证计算收敛性, 需加入人工粘性. 本文采用矩阵人工粘性^[14], 上式变为

$$\tilde{\mathbf{F}}|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T (\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}) + |\tilde{\mathbf{A}}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T| (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j})] S|_{i+\frac{1}{2},j} \quad (30)$$

其中

$$|\tilde{\mathbf{A}}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T| = \mathbf{T} |\Lambda| \mathbf{T}^{-1}, \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] \quad (31)$$

矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T$ 可按相邻单元的算术平均计算, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^{-1}$ 分别是 $\tilde{\mathbf{A}}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T$ 的左右特征矩阵, Λ 是 $\tilde{\mathbf{A}}_{c,i+\frac{1}{2},j}^T$ 的特征值对角阵, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^{-1}$, Λ 具体表达式可参照文献[15]附录中给出的结果.

由于在驻点和声速点附近会有特征值趋于零, 使得人工粘性也趋于零, 引起计算的不稳定, 造成数值困难. 为克服此困难, 可以用 λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 来替代原来的特征值, 取

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \max(|\lambda_1|, 0.25\rho(\mathbf{A}_c^T)), \\ |\lambda_2| &= \max(|\lambda_2|, 0.25\rho(\mathbf{A}_c^T)), \\ |\lambda_3| &= \max(|\lambda_3|, 0.25\rho(\mathbf{A}_c^T)), \\ |\lambda_4| &= \max(|\lambda_4|, 0.25\rho(\mathbf{A}_c^T)) \end{aligned}$$

其中 $\rho(\mathbf{A}^T)_c = |u n_x + v n_y| + c$, c 为声速.

对于常微分方程组 (25), 其四阶 R-K 法可写为

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \varphi^{(n)} \\ \varphi^{(m)} &= \varphi^{(0)} + \alpha_m \frac{\Delta t}{V} \mathbf{R}^{(m-1)}, m = 1 \sim 4 \\ \varphi^{(n+1)} &= \varphi^{(4)} \end{aligned} \quad (33)$$

其中 (n) 表示当前时间步, $(n+1)$ 为新的时间步, (m) 为 R-K 法中第 m 步, 系数 $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 1/2$, $\alpha_4 = 1$. Δt 取为 Euler 方程达到定常解时最后一步的当地时间步长即可.

求解伴随方程时所需要的边界条件前面已经给出, 这些条件是为了能够精确求解梯度所必须满足的, 可以视为伴随方程的“物理”边界条件. 计算时还需要补充数值边界条件, 可以将分析流动方程的特征线理论同样应用于伴随方程, 得到其特征变量形式的数值边条, 详细结果可参考文献[12].

注意到伴随方程中的系数矩阵与 Euler 方程的相似, 只相差一个符号, 因而特征值互为正负. 这就意味着, 流动方程的进口相当于伴随方程的“出口”, 流动方程的出口相当于伴随方程的“进口”. 亚声流动中, Euler 方程在进口处需要给定三个物理边条, 一个数值边界条件, 伴随方程就相应地需要给出三个数值边条和一个物理边条式 (16); 出口处 Euler 方程要只能给定一个物理边条, 需要三个数值边条, 而伴随方程相应地需要三个物理边条式 (18) ~ 式 (20), 只要一个数值边条, 此情况下伴随方程适定. 而如果式 (12) 中的系数矩阵取为正, 那么和流动方程相同, 对于亚声问题其在出口处就只能给定一个物理边条, 这与满足式 (18) ~ 式 (20) 三个物理边界条件相冲突, 伴随方程就不再适定. 对于超声流动, 同样存在这个问题, 这也就是式 (12) 中取负号的原因所在.

4 叶型参数化

叶型参数化可以有多种方式, 本文采用文献[16]中所使用的方法. 由初始叶型确定图 2 中所示几何参量.

参数化中各几何参量为

θ 叶片安装角; t 稠度;

T_m 最大厚度;

L_m 最大厚度圆心与前缘沿弦线方向的距离;

r_1 前缘半径; δ_1 前缘扩张角;

r_t 尾缘半径; δ_t 尾缘扩张角;

λ 前缘几何构造角;
 λ 尾缘几何构造角;
 H_s 吸力面最大挠度;

L_s 吸力面最大挠度位置与前缘沿弦线方向
距离;

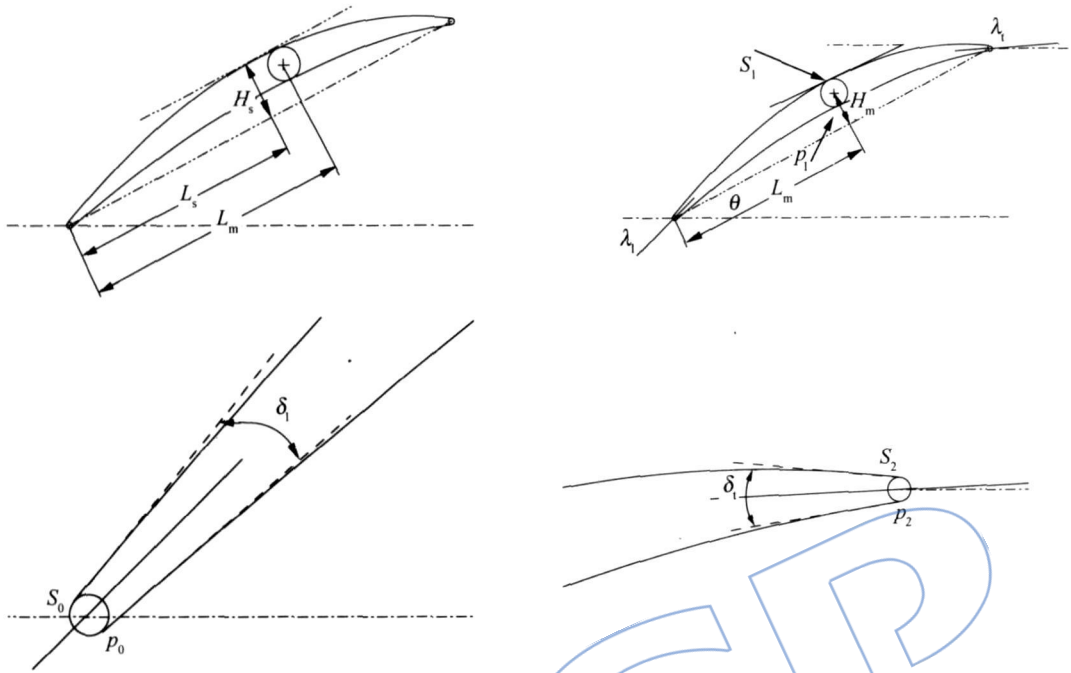


图 2 参数化中需要的几何参量

Fig. 2 Geometrical parameters used in the parametric method for blade profile

由这些几何参量就可以得到图 3 中所示点的坐标,吸力面和压力面上的三点之间分用两段三次样条曲线拟合.采用三弯矩法,样条曲线形式可写为

滑性的同时又可避免非合理型面的出现.实际计算中选取 $T_m, L_m, H_s, L_s, \delta_1, \delta_2, \lambda_1, \lambda_2$ 这 8 个几何参量作为可以变化的设计变量.当给定离散的初始叶型之后,这些设计变量都可以计算得到,对叶型的扰动就是通过扰动这些设计变量来完成.

5 流场计算程序及该方法计算流程

所采用的 S1 流场计算程序为自行开发的多块结构化二维 CFD 程序.它利用有限体积方法对流动方程进行空间离散,通量用 LDFSS 格式计算,对于隐式时间离散的控制方程组,采用 LU-SGS 算法求解.具体数值方法参见文献[17-18].基于控制理论的叶型优化问题计算流程如下:

- 1) 叶型参数化;
- 2) 生成计算网格(分块结构化网格,如图 4);
- 3) 求解 Euler 方程;
- 4) 求解伴随方程;
- 5) 分别扰动各个设计变量,计算目标函数对设计变量的梯度;
- 6) 采用 BFGS 优化算法确定寻优方向,且用一维线性方法确定最优步长;
- 7) 更新设计变量,判断是否结束计算.否则转入 2) 进入循环计算.

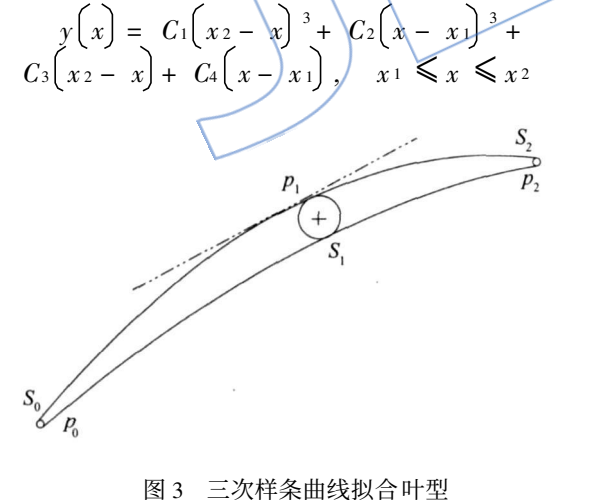


图 3 三次样条曲线拟合叶型

Fig. 3 Parametrize blade profile with cubic spline curve

其中 x_1, x_2 为曲线的两端点 C_1, C_2, C_3, C_4 为待定系数,可由端点坐标和各点处的一阶导数求出.这种样条曲线的优点是其二阶导数在两端点之间是线性变化的,不会在两端点之间形成二阶导数的极值,因而将其用于定义叶型时在保证必要的光

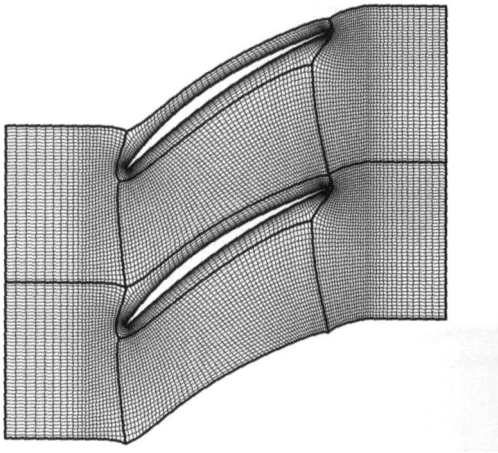


图 4 计算网格
Fig. 4 Calculation mesh system

6 数值算例

6.1 算例 1 回归某已知叶型

为了检验该方法的有效性, 将一个已知叶型的压力分布作为目标压力分布, 改变已知叶型的设计变量值, 将改变后的叶型作为初始叶型. 这样就保证了给定的目标压力分布有确实存在的叶型与其对应, 而且是全局最优解. 计算结果显示目标

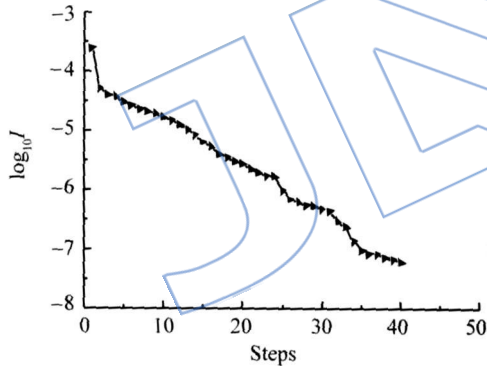


图 5 目标函数值变化
Fig. 5 Convergence history in case 1

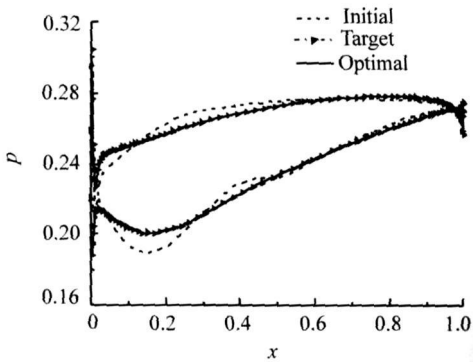


图 6 压力分布
Fig. 6 Pressure distribution in case 1

函数值由初始的 10^{-4} 量级, 经过 40 个迭代循环后下降到 10^{-8} 量级, 图 5 给出了优化过程中的目标函数变化. 从图 6 中看到, 得到的最终压力分布与目标压力分布几乎完全一致. 算例 1 叶型见图 7. 这一算例的结果表明, 该方法在解决给定压力分布问题时可行有效.

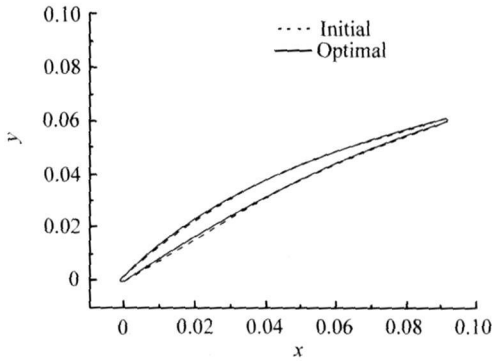


图 7 算例 1 叶型
Fig. 7 Blade shape in case 1

6.2 算例 2 改变已有叶型的负荷分布

算例 2 目标函数值变化见图 8. 该算例中初始叶型的压力分布如图 9 所示, 可见叶型前部的气动负荷较高, 给定的目标压力分布是将前面的部分负荷分配给后面部分, 使得整个叶型上的负荷分布更均匀.

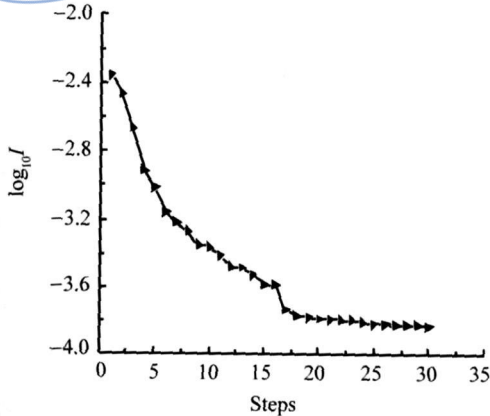


图 8 目标函数值变化
Fig. 8 Convergence history in case

从计算结果来看, 得到的新叶型与初叶型相比(图 10 所示), 前者的挠度较之后者有明显减小, 吸力面变得更加平缓. 气流在叶型前部的加速过程平缓使得负荷得以下降. 还要注意的最后得到的压力分布并非和目标压力分布完全一致. 有两种可能原因, 一是在本文设定的叶型参数化条件下无法生成完全符合目标压力分布的叶型, 或者得到该问题的一个局部最优解. 计算时这两

方面的问题都有可能发生,是需要解决的问题.就本问题而言,最后得到的压力分布基本上达到改变负荷分布的目的.

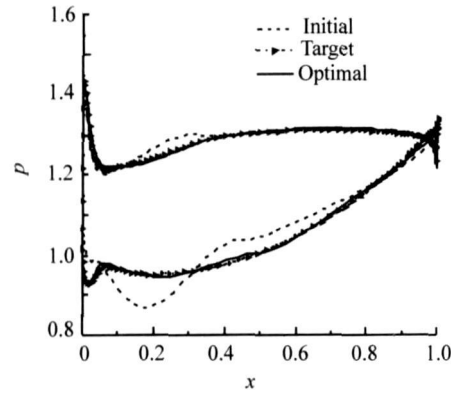


图9 算例2 压力分布

Fig.9 Pressure distribution in case 2

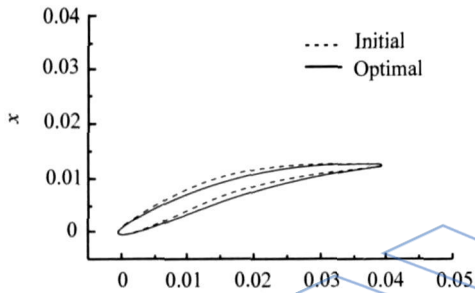


图10 算例2 叶型

Fig.10 Blade shape in case 2

6.3 算例3“超临界”叶型优化设计

当压气机叶栅进口马赫数较高时,叶栅通道内可能会出现局部超声流动,且在吸力面出现激波.激波/附面层干扰作用可使波后出现流动分离,进而造成较高的流动损失.本算例试图通过本文的方法消除吸力面激波,从而得到“超临界”叶型.

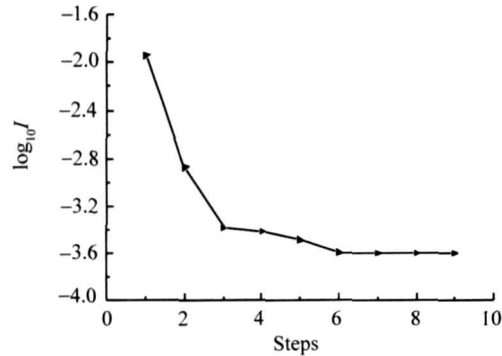


图11 算例3 目标函数值变化

Fig.11 Convergence history in case 3

图11和图13分别显示了优化过程中目标函数值和叶型形状的变化.从图12中的压力分布可以看出,初始叶型在大约30%弦长有激波存在,给定的目标压力将激波“抹平”.得到的新叶型挠度比初始叶型小,吸力面比较平缓.图14与图15显示,初始叶型造成的激波在经过优化计算后消失,优化叶型吸力面气流加减速平缓.

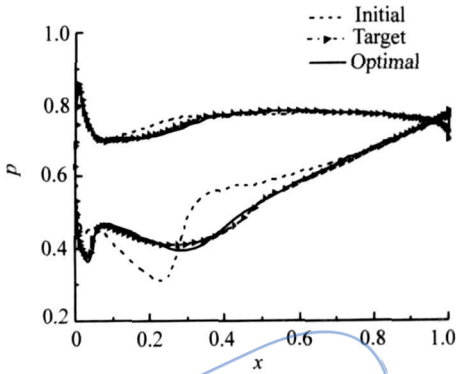


图12 算例3 压力分布

Fig.12 Pressure distribution in case 3

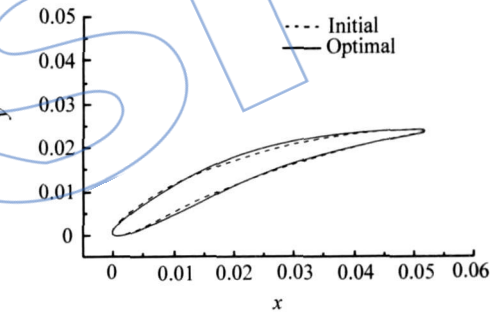


图13 算例3 叶型

Fig.13 Blade shape in case 3

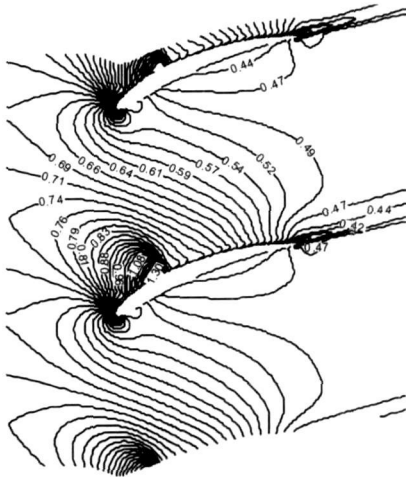


图14 算例3 初始流场马赫数分布图

Fig.14 Mach number distributions of original cascade flow field in case 3

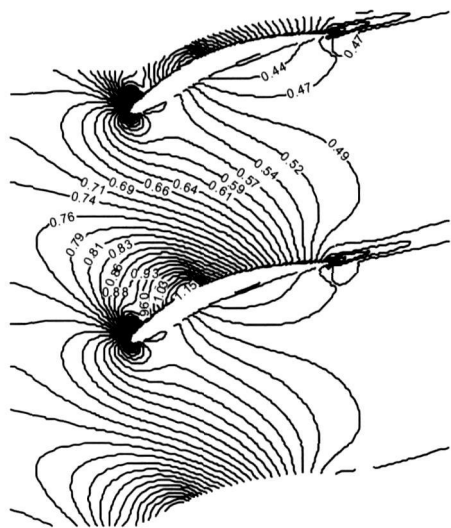


图 15 算例 3 优化流场马赫数分布图
Fig. 15 Mach number distributions of optimized cascade flow field in case 3

6. 4 算例 4 粘性流动问题

对于更接近实际的粘性流动如何解决, 完全可以和处理无粘流动情况相同, 从粘性流动控制方程出发推导考虑粘性的伴随方程, 文献 [7] 中详细给出了粘性方程的推导. 可以发现, 由于粘性项的存在, 使得伴随方程推导变得非常繁杂, 而且最后得到的伴随方程形式也比无粘的要复杂的多, 自然求解的工作量也会大很多.

考虑到对于没有发生大分离的情况, 可以将叶栅流动视为近壁面边界层流动和主流区流动两部分组成. 根据边界层理论, 壁面的压力主要是受到主流区流动的影响, 而主流区的粘性作用很小, 可以看成是无粘流动. 所以当叶型外形受到微小扰动, 造成压力分布变化时, 起主导作用的是无粘流场的相应变化, 粘性项影响和无粘项相比可忽略. 虽然略去伴随方程中的粘性项是一种近似处

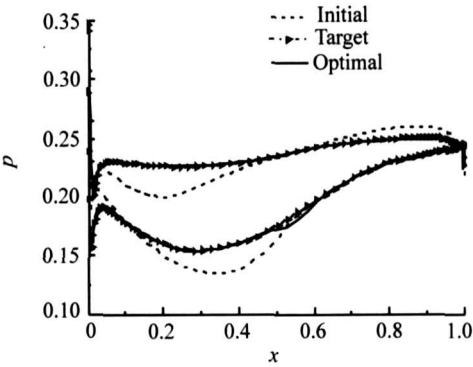


图 17 算例 4 压力分布
Fig. 17 Pressure distribution in case 4

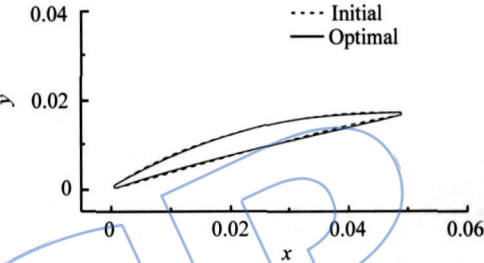


图 18 算例 4 叶型
Fig. 18 Blade shape in case 4

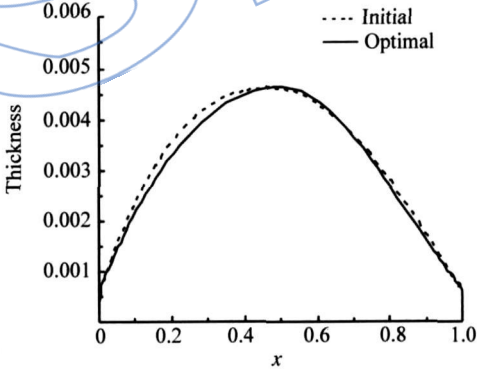


图 19 算例 4 叶型厚度分布
Fig. 19 Blade thickness distribution in case 4

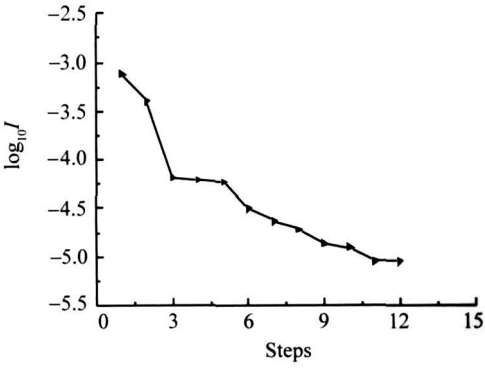


图 16 算例 4 目标函数数值变化
Fig. 16 Convergence history in case 4

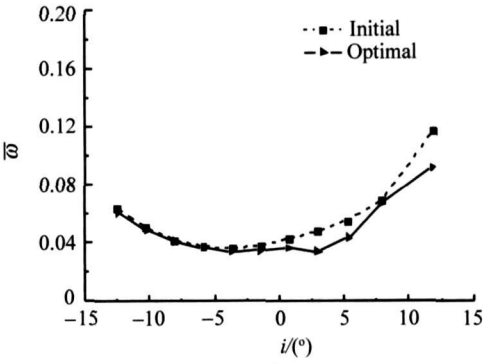


图 20 算例 4 叶型攻角特性
Fig. 20 Blade incidence characteristic in case 4

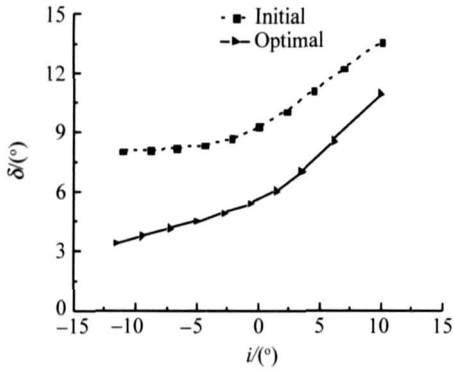


图 21 算例 4 叶型落后角特性

Fig. 21 Blade characteristic in case 4

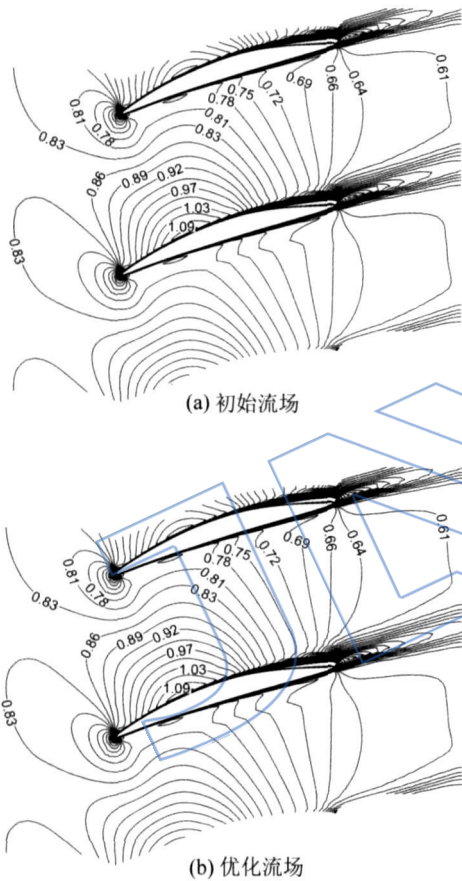


图 22 算例 4 初始流场(a) 和优化流场(b) 马赫数分布图

Fig. 22 Mach number distributions of original cascade flow field (a) and optimized cascade flow field (a) in case 4

理, 会影响目标函数对设计变量梯度求解的准确性, 但是梯度类优化方法并不需要精确的梯度大小, 而只要是梯度的大致方向正确就可以用来寻优. 所以本文直接使用无粘的伴随方程来处理粘性流动.

图 16 显示, 虽然采取近似处理, 但目标函数值下降了两个量级, 比较好的实现了优化. 图 18,

19 给出了优化前后叶型的变化. 从图 17 中的压力分布可以看出, 优化后的压力分布与给定的目标压力吻合的很好, 无粘伴随方程来解决粘性问题的近似处理可行. 图 20 和 21 比较的是在相同情况下初始叶型和优化叶型的攻角特性和落后角特性, 可以看出优化叶型流动性能要优于初始叶型. 图 22 流场马赫数分布显示, 优化后的叶型流动的最大马赫数减小, 消除了初始叶型中的激波.

7 结 论

本文将基于控制理论的气动优化方法应用于轴流压气机叶型设计, 详细推导了以 Euler 方程作为流动控制方程的伴随方程及其边界条件, 并给出了求解方法, 建立了以该方法为核心的轴流压气机叶型优化设计平台. 计算结果充分表明, 该方法在解决给定压力分布问题时是有效的, 能够获得较为理想的结果, 可以用来进行压气机叶型设计. 一般而言经过 15 个优化循环就能得到一个最优解(可能是局部最优解), 差不多相当于 30 个流场的计算量, 计算效率较高.

当然, 该方法也有自身不足. 其中一个问题是如何给定合适的压力分布, 这取决于设计者的经验, 需要根据具体问题判定什么样的压力分布是好的. 另外, 优化得到的压力分布与给定压力分布的接近程度会受叶型参数化方法的约束, 哪种参数化方法更佳需要进一步探讨. 再有, 此方法属梯度类方法, 得到的优化结果有可能陷入局部最优解, 这是该类方法固有的缺陷. 其解决方法有可能可以通过改变初始叶型的方式来避开局部最优解.

参考文献:

- [1] Bauer F P, Garabedian D K. Supercritical wing section [R]. Lecture Notes in Economics and Math Systems, Springer Verlag, New York: Section 1, 1972: 66; Section 2, 1975: 108.
- [2] Schmidt E. Computation of supersonic compressor and turbine cascade with a design method for transonic flow [J]. Journal of Engineering for Power, Trans. of the ASME, 1980, 102(1): 68-74.
- [3] Hicks R M, Henne P A. Wing design by numerical optimization [J]. Journal of Aircraft, 1978, 15: 407-412.
- [4] Jameson A. Aerodynamic design via control theory [R]. AGARD CP-463, 1989.
- [5] Jameson A. Optimum aerodynamic design using CFD and control theory [R]. AIAA-95-1729.
- [6] Jameson A, Reuther J. Control theory based airfoil design

using the Euler equations[R]. AIAA-94-4272.

[7] Jameson A. Optimum aerodynamic design using CFD and control theory[R]. AIAA-95-1729.

[8] Jameson A, Reuther J. Control theory based airfoil design using the Euler equations[R]. AIAA-94-4272.

[9] Jameson A, Alonso J J, Reuther J, et al. Aerodynamic shape optimization techniques based on control theory [R]. AIAA-98-2538.

[10] Reuther J, Jameson A. Control theory based airfoil design for potential flow and a finite volume discretization[R]. AIAA-94-0499.

[11] Reuther J, Jameson A. Aerodynamic shape optimization of wing and wing body configurations using control theory [R]. AIAA-95-0123.

[12] Anderson W K, Venkatakrishnan V. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation[R]. AIAA-97-0643.

[13] Elliott J, Peraire J. Aerodynamic design using unstructured meshes[R]. AIAA-96-1941.

[14] 杨旭东. 基于控制理论的气动优化设计技术研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002.

YANG Xudong. Study on the aerodynamic optimizations techniques based on control theory[D]. Xi'an: Northwest Polytechnical University, 2002. (in Chinese)

[15] LI Yingchen, YANG Dianliang, FENG Zhenping. Inverse problem in aerodynamic shape design of turbomachinery blade[R]. ASME-GT-2006-91135.

[16] Swanson R C, Turkel E. On central difference and upwind scheme[J]. J. of Comp. Phys, 1992, 101: 292-306.

[17] Blazek J. Computational fluid dynamics: principles and applications [M]. Netherlands: Elsevier Science, 2001.

[18] 宁方飞, 刘晓嘉. 一种新的响应面模型及其在轴流压气机叶型气动优化中的应用[J]. 航空学报, 2007, 28(4): 813-820.

NING Fangfei, LIU Xiaojia. A new response surface model and its applications in the aerodynamic optimization of axial compressor blade profile[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007, 28(4): 813-820. (in Chinese)

[19] 宁方飞. 考虑真实几何复杂性的跨声压气机内部流动的数值模拟[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2002.

NING Fangfei. Numerical simulation of the transonic compressor inner flow considering real geometrical complexity[D]. Beijing: Beijing University of Astronautics and Aeronautics, 2002. (in Chinese)

[20] Ning F F, Xu L P. Numerical investigation of transonic compressor rotor flow using an implicit 3D flow solver with one equation Spalart-Allmaras turbulence model[R]. ASME Paper 2001-GT-0359, 2001.