

文章编号: 1000-8055(2009)02-0470-07

渐开线轮齿的弯曲应力参数化分析

李 杰, 王乐勤, 孙青军
(浙江大学 化工机械研究所, 杭州 310027)

摘 要: 根据渐开线和齿根过渡曲线方程及相关参变量的取值范围, 将载荷作用于单齿啮合最高点, 建立了一套齿轮弯曲应力的参数化平面有限元分析方法. 算例显示, 现行设计方法的修正系数能比较准确地反映齿根的最大拉应力. 齿根弯曲最大压应力大于最大拉应力, 而现行设计方法仅考虑了最大拉应力. 随着刀具齿顶圆角、变位系数和齿形角的增大, 齿根最大拉应力都有减少. 其中, 压力角和刀具齿顶圆角的影响较显著, 而齿数对齿根应力几乎无影响.

关 键 词: 渐开线轮齿; 弯曲应力; 参数化; 过渡曲线; 有限元

中图分类号: TH132.413

文献标识码: A

Parameterized analysis of bending stress of involute teeth

LI Jie, WANG Le-qin, SUN Qing-jun

(Institute of Chemical Machinery, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The parameterized teeth model was established based on the involute and tooth root transitional curve equations with the defined interval of independent variables, and the force was loaded at the highest point of single pair meshing teeth according to the hand-book. A two dimensional finite element parameterized analysis method about the tooth bending stress was presented. Through examples, the results of finite element method are in good agreement with those of the actual designing method, proving the accuracy of the model modified factor of the latter. But the stress from the former method is appreciably bigger when the tip rounding radius of generating rack is smaller or the pressure angle of tooth is bigger. The actual designing method only focuses on the tensile stress which is proved smaller than the compressive bending stress. The maximum tensile bending stress decreases with the increase of the tip rounding of the generating rack, the modification coefficient and the pressure angle. The effect of the pressure angle and the tip rounding is more prominent, while the teeth number has only slight effect on the bending stress.

Key words: involute tooth; bending stress; parameterized analysis; trochoid; finite element

齿轮弯曲应力的计算方法主要有解析法、试验法和数值法. 数值方法中, 有限元技术在计算齿轮弯曲应力上得到广泛采用. Wilcox^[1]通过二维轮齿应力的有限元分析, 提出了相关的指数函数

和多项式函数的修正系数. 魏任之^[2]对各种参数齿轮的有限元结果进行回归拟和, 得到了直齿轮受载点法向挠曲变形近似公式. Chabert 等^[3]通过有限元方法, 针对两种载荷作用方法进行比较,

收稿日期: 2008-01-10; 修订日期: 2008-04-15

作者简介: 李杰(1976-), 男, 辽宁海城人, 博士生, 主要从事机械设计理论研究与产品开发. E-mail: lijie0321@yahoo.com.cn

通讯作者: 王乐勤(1945-), 男, 山东聊城人, 教授、博导, 主要从事流体机械理论、创新设计及控制工程.

E-mail: hjwlq2@zju.edu.cn

一种是作用在单齿啮合最高点, 另一种是作用在轮齿齿顶. Chang 等^[4]研究了有限元方法中的位移约束、圆角半径和轮缘厚度等对计算结果的影响. 张力等^[5]针对 6 种不同齿根过渡曲线进行了弯曲强度分析. 唐进元等^[6]讨论了计算弯曲强度的精确有限元模型.

早期的有限元方法存在着网格粗糙^[3]、齿根过渡曲线按圆角处理^[7]、没能完全参数化等问题. 而近些年的基于接触的三维分析涉及到载荷分配与传递误差^[8-9], 且针对性较强, 不能形成计算弯曲应力的便捷方法.

通过建立参数化几何模型, 施加合适的边界条件, 形成二维弯曲强度的有限元方法. 将方法与现行设计算法相比较, 并针对刀具齿顶圆角、压力角、变位系数、模数等对弯曲应力的影响进行了分析, 为航空航天等领域中特殊齿廓的设计提供了又一种方法.

1 现行轮齿弯曲强度设计方法

齿轮强度计算主要包括接触强度计算和弯曲强度计算. 随着硬齿面技术的成熟, 轮齿的接触承载能力大大提高, 而在重载工况下弯曲应力越来越引起关注, 弯曲强度不足将引起轮齿齿根过早出现裂纹、甚至整齿折断等事故.

Lewis 公式^[10]是最早采用的齿轮弯曲强度计算方法, 也是现行标准规范中普遍采用的计算基础. 该公式基于材料力学的抛物线梁理论, 把轮齿视为等强度悬臂梁; 引入“齿形系数”进行模型计算结果的修正. 直至 1982 年以后, 齿形系数等修正系数的计算方法才比较完善^[11]. 这就是现行齿轮弯曲强度设计规范的来源.

目前齿轮设计标准中, 齿根应力的计算采用了大量的修正系数, 具体包括载荷修正、加工装配误差修正和模型修正三类系数. 其中载荷系数取决于工况, 变动范围很大; 而加工装配误差修正系数涉及到微观结构与齿轮箱整体布局; 模型修正系数来源于计算模型与轮齿齿廓的近似性, 包括研究齿形系数、应力修正系数和重合度系数.

在 GB3480-1997 中, 针对齿根应力的基本值的计算有两种方法, 分别是载荷作用在齿顶和单齿啮合最高点, 其中载荷作用于单齿啮合最高点是推荐优先采用的方法, 其计算如式 (1) 所示.

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{bm_n} Y_F Y_S Y_\beta \tag{1}$$

其中 σ_{F0} 为齿根弯曲应力基本值, F_t 为端面内分

度圆上的名义切向力, b 工作齿宽, m_n 法向模数, Y_F 为齿形系数, Y_S 为应力修正系数, Y_β 为螺旋角系数. 各系数的取值参见文献[12].

2 轮齿的参数化建模

2.1 参数化几何模型的建立

渐开线齿轮齿廓由齿顶圆弧、渐开线、齿根过渡曲线、齿根圆弧四部分组成. 在有限元分析中, 圆弧和渐开线的参数方程建立相对容易. 齿根过渡曲线通常采用近似处理, 或者给出方程但没有给定参变量的区间^[6]. 而齿根过渡曲线是确定齿根危险截面、最大齿根应力的关键因素, 很有必要建立精确的曲线方程.

基于加工原理, Brauer^[13]通过坐标变换, 建立了可以表征所有渐开线齿轮轮齿的通用参数化模型. 参考该方法, 下面给出对应的渐开线和过渡曲线的参数化方程和自变量区间.

以齿轮分度圆圆心为坐标原点, 以某个轮齿齿厚中线为 x 轴, 以轮齿周向为 y 轴, 建立右手直角坐标系, 则

1) 渐开线曲线方程, 如式 (2) 所示

$$r_I(\varphi) = \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi + [r(\varphi) - s/2] \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha) \\ r \sin \varphi - [r(\varphi) - s/2] \cos \alpha \cos(\varphi - \alpha) \end{bmatrix} \tag{2}$$

其自变量如式 (3) 所示

$$\varphi(r_{IF}) = \frac{s}{2r} + \tan \alpha - \sqrt{\frac{r_{IF}^2}{r_b^2} - 1} \tag{3}$$

对应取值范围如式 (4) 所示

$$\varphi(r_a) \leq \varphi \leq \varphi(r_{IF}) \tag{4}$$

其中

$$s = s_r / \cos \beta + 2 X_t \tan \alpha$$

齿根过渡曲线矢径的大小如式 (5) 所示

$$r_{IF}(u_{IF}) = |r_{IF}| = \sqrt{\left[\frac{Q \sin u_{IF} + e - X}{\sin u_{IF}} - r \sin u_{IF} \right]^2 + r^2 \cos^2 u_{IF}} \tag{5}$$

渐开线部分矢径的大小如式 (6) 所示

$$r_{II}(\varphi) = \sqrt{[r(\varphi) - s/2] \cos \alpha - r \sin \alpha]^2 + r_b^2} \tag{6}$$

当无根切时, 式 (4) 中 $r_{IF} = r_{IF}(\alpha)$; 当有根切时, 根据渐开线齿廓与齿根过渡曲线交点处的矢径相等, 进行迭代求解.

2) 齿根过渡曲线方程, 如式 (7) 所示

$$r_F(u_F) = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi_F + \frac{\rho \sin u_F + e - x}{\sin u_F} \sin(\varphi_F - u_F) \\ r \sin \varphi_F - \frac{\rho \sin u_F + e - x}{\sin u_F} \sin(\varphi_F - u_F) \end{bmatrix} \quad (7)$$

其自变量表达式如(8)所示

$$u_{IF} \leq u_F \leq \pi/2 \quad (8)$$

其中

$$\tan u_F = \tan u_F \sec \beta$$
$$\varphi_F(u_F) = \frac{1}{r} \left[e \tan \alpha_t + \cot u_F (\rho \sin u_F + e - x) + \frac{s_r}{2 \cos \beta} - \rho^+ \frac{\cos u_F - \sec \alpha_n}{\cos \beta} \right] \quad (9)$$

其中 u_{IF} 可由式(5)求得.

公式(2)~(9)中,各符号含义如下: φ, u 为参变量, r 为节圆半径, s 为节圆端面齿厚, s_r 为节圆法面齿厚, α, β 为压力角、螺旋角, ρ 为加工刀具齿顶圆角. r_a, r_b 分别为齿顶圆和基圆半径, x 为高度变位量, $e(= h_t - \rho)$ 为辅助距离, h_t 为轮齿齿根高. 各符号下标的含义为 n, t 分别代表法截面和端面方向, I 代表渐开线齿廓部分, F 代表齿根过渡曲线部分, IF 代表渐开线和齿根过渡曲线相交部分.

利用公式(2)和(7),生成若干关键点,连接各个关键点,形成若干段三次样条曲线.通过镜像命令,生成另一半齿廓.然后绘制齿顶和齿根圆弧,完成单个轮齿模型的建立.

2.2 有限元模型及边界条件

有限元分析在 Ansys 10.0 中进行.为提高效率和精度,网格采用带中节点的 Plane82 平面单元,且具有中间稀疏、边缘密集的分布特点,边界单元边长为 0.02 mm,如图 1 所示.

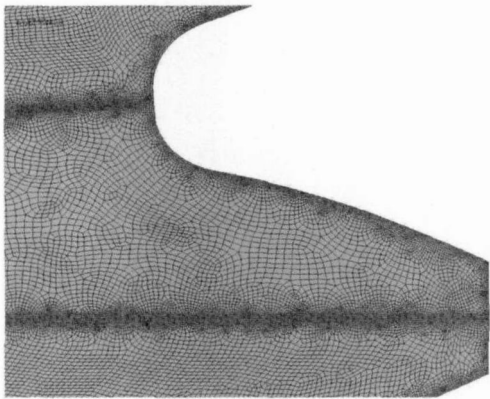


图 1 局部网格划分
Fig. 1 Local meshing plot

轮齿工作时,仅在受载齿及其附近的局部范

围内有较大应力,轮齿大部分区域应力为零.若采用全齿数模型,将导致大量的冗余计算.以前学者针对弯曲应力分析,通常选择单齿模型^[3,4],而实际上由于边界约束导致了齿根局部范围内的应力分布不同于真实情况.对于薄壁轮缘结构,由于轮缘变形量较大导致了齿根应力扩散范围大,有学者采用 5 个轮齿模型^[14].但对于常规齿轮,采用 3 个轮齿模型得到边界上的位移和应力都是足够小的^[5].故选择 3 个周向有效齿数.

通常齿坯结构中,轮缘厚度在 $2.5m_n$ 以上.齿坯轮缘厚度,对齿根弯曲应力的分布有显著影响^[14],但对于全固定约束的边界来讲,影响不大^[4].因此,可选择 $3m_n$ 的齿坯厚度.

2.3 位移约束与载荷

切向力载荷作用于单齿啮合最高点.其中,加载点的压力角和载荷作用角,参考标准中弯曲强度的计算方法求得^[12].另外,在轮缘内侧及两侧施加固定位移约束.

3 结果与讨论

现分析上述有限元模型计算的准确性,然后讨论刀具齿顶圆角、齿数、变位系数和压力角等参数对齿根最大主应力的影响.

3.1 有限元模型准确性分析

选择模数为 2 mm,齿数为 45 的标准直齿轮,在方向为逆时针,大小为 500 N/mm 的切向载荷下,轮齿的弯曲主应力分布如图 2 和图 3 所示.

受载轮齿的弯曲主应力延伸到了相邻的两个轮齿,但仅局限在这三个轮齿之内.轮齿内轮缘和周向边界应力分布约在最大应力的 1.5% 以下,可以近似为零.这也说明了由分析模型采用的结构尺寸是足够的,几乎不受边界条件的影响,计算结果是准确的.

偏离.

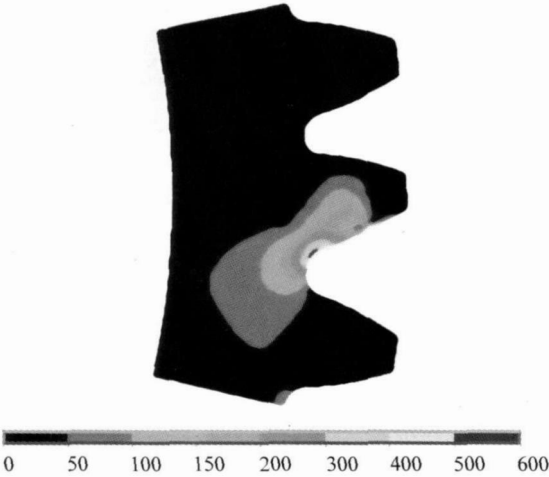


图 2 轮齿弯曲拉应力分布 (单位: MPa)
Fig.2 Tensile stress distribution of tooth bending
(Unit: MPa)

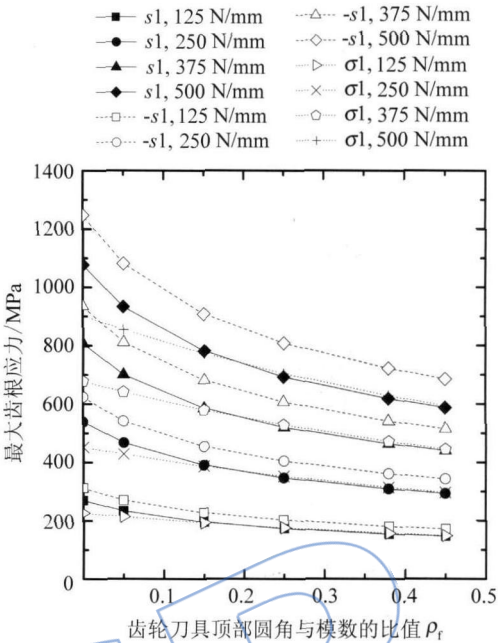


图 4 不同齿顶圆角半径时的主应力分布
Fig.4 Maximum principle stress for different tip
rounding radii of generating rack

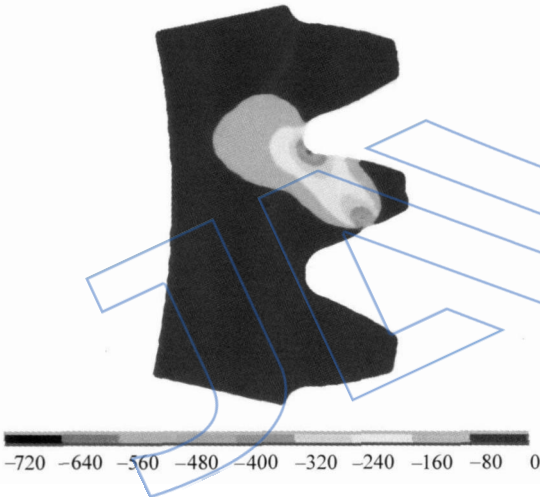


图 3 轮齿弯曲压应力分布 (单位: MPa)
Fig.3 Compressive stress distribution of tooth bending
(Unit: MPa)

3.2 刀具齿顶圆角的影响

单齿啮合最高点的位置压力角和载荷作用角分别为 20.785° 为 18.894° 时, 施加不同大小的载荷, 改变刀具齿顶圆角大小, 得到齿根应力最大值如图 4 所示. 横坐标 ρ_r 为刀具齿顶圆角系数, 即加工齿轮刀具的顶圆半径与模数的比值, s_1 为弯曲拉应力, $-s_3$ 为弯曲压应力的绝对值, σ_1 为按公式得到的齿根应力基本值.

由图 4 可知, 通过有限元计算的到的最大拉应力和通过现行设计规范得到的齿根应力值基本吻合. 但在采用小刀具齿顶圆角时, 两者略有

刀具齿顶圆角系数从 0 增大到 0.45 的过程中, 最大主应力减少幅度大于 40%. 其原因在于, 随着刀具齿顶圆角的增大, 齿根过渡曲线也在不断增加, 即齿根危险截面的齿厚增加, 进而导致了最大主应力不断减小. 换句话说, 结构不连续区域的增加导致了应力集中的减轻.

因此, 在设计航空高强度齿轮时, 在不影响端面重合度的前提下, 选择尽可能大的刀具齿顶圆角是提高弯曲承载能力的有效措施之一.

以刀具齿顶圆角系数 $\rho_r = 0.38$ 为例, 不同载荷水平下的齿根过渡曲线上最大主应力如图 5 所示. 其中, 横坐标为过渡曲线弧长, 方向为从渐开线侧指向齿根圆弧.

由图 5 可知, 不同载荷水平下, 最大压应力均大于最大拉应力, 这与以前学者的结论一致^[3]. 其原因在于, 轮齿除了受到切向力, 还受到径向压应力, 该径向压应力抵消了受拉侧的部分拉应力, 还进一步增大了受压侧的压应力.

另外, 由图 2 和图 3 可知, 拉应力和压应力的范围都布满了整个齿槽. 因此, 在计算齿根疲劳裂纹时, 除了计算最大拉应力和最大压应力点外, 还要计算交变应力幅值最大点^[15].

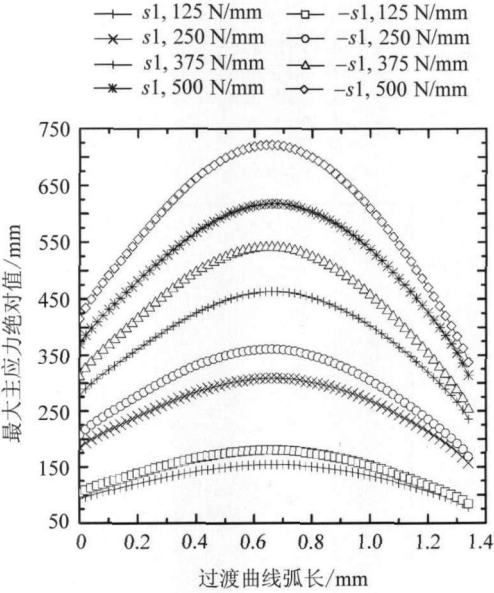


图 5 刀具齿顶圆角系数为 0.38 的主应力分布
Fig. 5 Maximum principle stress distribution for tip rounding coefficient 0.38

3.3 齿数的影响

不同齿数下,选取算例参数如表 1 所示.通过有限元计算得到的最大主应力和通过现行设计方法得到的齿根应力值如图 6 所示.在模数和刀具齿顶圆角相同的情况下,齿轮齿数对齿根最大应力基本没有影响.

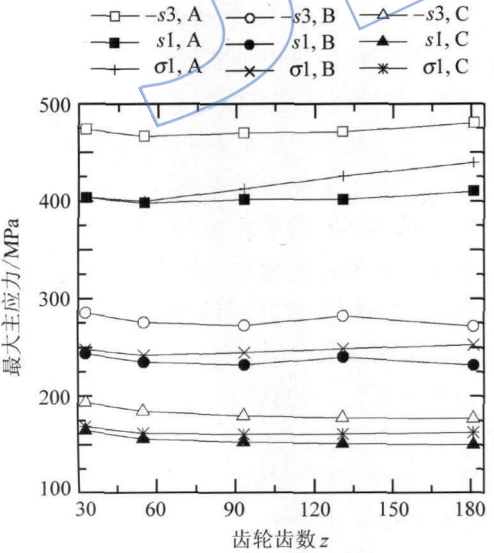


图 6 不同齿数下的最大主应力分布
Fig. 6 Maximum principle stress for different teeth

从不同的算例中也可以看出,现行标准中的设计公式与有限元分析结果吻合较好,但在齿数

较多时,两者略有偏离.

表 1 考察齿数对齿根应力影响的算例
Table 1 Cases for different gear teeth numbers

算例 编号	模数/ mm	载荷/ (N/mm)	刀具齿顶圆角 半径/mm	齿数
A	2	250	0.3	每组算例分别
B	3	250	0.75	取 33, 55, 93,
C	8	500	3.04	131, 181

3.4 变位系数的影响

不同变位系数下,选取算例参数如表 2 所示.通过有限元计算得到的最大拉应力值和通过现行设计方法得到的齿根应力值如图 7 所示.在刀具齿顶圆角半径较小的情况下,齿根最大拉应力随着正变位系数的增大而显著减小,而当圆角半径较大时,随着正变位系数增大,齿根应力的减小不是很明显.

在齿轮设计中,推荐采用高度或者角度变位设计,其好处之一就是能提高齿轮的弯曲强度,这与有限元计算结果一致.

表 2 考察变位系数对齿根应力影响的算例
Table 2 Cases for different addendum modification coefficients

算例 编号	模数 / mm	载荷/ (N/mm)	齿数	刀具齿顶圆 角半径/mm	变位系数
D	3	500	37	0.75	每组算例分
E	5	250	131	0.5	别取 0, 0.1,
F	8	1250	53	3.04	0.2, 0.3

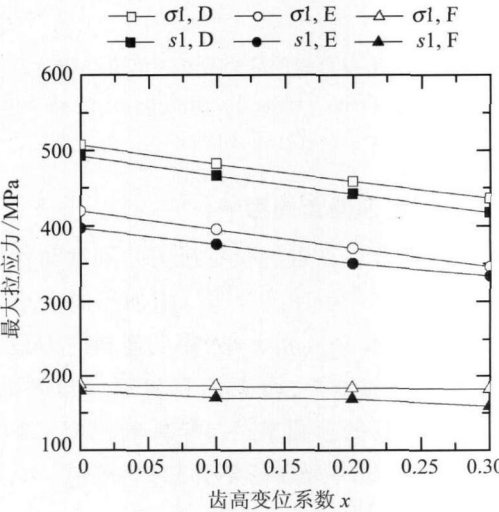


图 7 不同齿高变位系数下的齿根最大拉应力
Fig. 7 Maximum tensile stress for different addendum modification coefficients

3.5 齿形角的影响

不同齿形角下, 选取的算例参数如表 3 所示. 通过有限元计算得到的最大拉应力和通过现行设计方法得到的齿根应力值如图 8 所示. 其中, 个别齿廓由于齿顶圆角半径较大, 造成齿根圆弧段不存在, 本设计程序中未考虑这一因素, 故该处没有计算点.

表 3 考察齿形角对齿根应力影响的算例

Table 3 Cases for different pressure angles

算例 编号	模数/ mm	载荷/ (N/mm)	齿数	齿顶圆角 半径/mm	齿形角/(°)
G	4	500	53	1.52	每组算例分别
H	2	250	47	0.5	取 15°, 20°,
I	6	500	71	0.9	22.5°, 25°, 27.5°

由图 8 可知, 随着齿形角的增大, 齿根最大拉应力有着大幅度的减小. 这也是大齿形角应用于航空等重载齿轮中的一个重要原因.

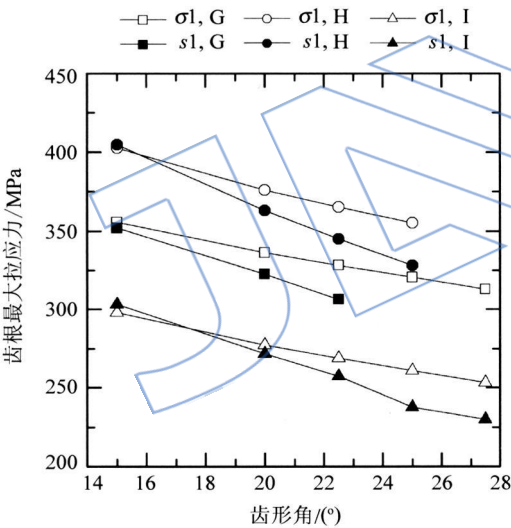


图 8 不同压力角下的齿根最大拉应力
Fig. 8 Maximum tensile stress for different pressure angles

另外, 现行设计方法对于大压力角的齿形设计得到的计算结果, 与有限元计算结果相比, 偏于保守. 也就是说, 现行齿轮弯曲应力修正系数中, 未能准确计算压力角的影响.

4 总结

按照渐开线齿轮的齿廓方程, 主要包括渐开线方程和齿根过渡曲线方程, 并给出了相关参

量的取值范围, 建立了参数化轮齿模型, 讨论确定了轮缘厚度和周向有效齿数. 将载荷作用于单齿啮合最高点, 其位置和方向根据齿轮设计手册确定. 建立了一套计算齿轮弯曲强度的参数化平面有限元分析方法, 为特殊齿形的弯曲强度计算提供了又一种方法.

将有限元方法与现行设计计算方法相比较发现, 两者获取的最大弯曲应力值吻合较好. 现行设计方法的修正系数比较准确, 能真实地反映出轮齿的最大齿根应力. 但在刀具齿顶圆角较小, 或者轮齿压力角较大时, 两者有显著偏离. 现行设计方法比较保守, 得到的齿根应力偏大.

齿根的最大弯曲压应力往往大于最大弯曲拉应力, 而现行设计方法中仅仅考虑了最大拉应力, 而没有考虑最大压应力因素.

通过针对不同的算例分析, 得到不同参数对齿根应力的影响. 随着刀具齿顶圆角、正变位系数和齿形角的增大, 齿根最大拉应力都有减少, 其中, 压力角和刀具齿顶圆角的影响最为显著. 而齿数对齿根应力的几乎无影响.

参考文献

[1] Wilcox L, Colman W. Application of finite elements to the analysis of gear tooth stress[J]. ASME Journal Engineering for Industry, 1973; (95): 1139-1148.

[2] 魏任之, 张永忠. 关于直齿圆柱齿轮齿受载变形量的计算[J]. 齿轮, 1980; (4): 1-8.

WEI Renzhi, ZHANG Yongzhong. The calculation of tooth deformation of spur cylindrical gear[J]. Gear, 1980, (4): 1-8. (in Chinese)

[3] Chabert G, Tran T D, Mathis R. An evaluation of stresses and deflection of spur gear teeth under strain[J]. ASME Journal Engineering for Industry, 1974: 85-93.

[4] Chang S H, Huston R L, Coy J J. A finite element stress analysis of spur gears including fillet radii and rim thickness effects[J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, (105): 327-330.

[5] 张力, 王军, 周彦伟. 不同齿根过渡曲线的齿根弯曲强度有限元分析[J]. 矿山机械, 1997, (6): 45-47.

ZHANG Li, WANG Jun, ZHOU Yanwei. Finite element analysis of gear bend strength for different transitional curves at the root of tooth[J]. M & PE, 1997, (6): 45-47. (in Chinese)

[6] 唐进元, 周长江, 吴运新. 齿轮弯曲强度有限元分析精确建模的探讨[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(10): 1146-1150.

TANG Jinyuan, ZHOU Changjiang, WU Yunxin. A method for exact modeling of the bending of spur gear teeth by FEM[J]. Mechanical Science and Technology,

- 2004, 23(10): 1146-1150. (in Chinese)
- [7] Cornell R W. Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth[J]. Journal of Mechanical Design, 1981, 103: 447-459.
- [8] 李润方, 林腾蛟, 陈兵奎, 等. 宽斜齿轮啮合过程三维接触有限元分析[J]. 机械科学与技术, 1997, 16(3): 415-418.
- LI Runfang, LIN Tengjiao, CHEN Bingkui, et al. 3-D finite element contact analysis for large width helical gears in meshing process[J]. Mechanical Science and Technology, 1997, 16(3): 415-418. (in Chinese)
- [9] 朱坚民, 周福章, 雷静桃. 渐开线斜齿圆柱齿轮弹性变形的三维有限元分析[J]. 农业机械学报, 1998, 29(4): 113-117.
- ZHU Jianmin, ZHOU Fuzhang, LEI Jingtao. 3-D finite element analysis for elastic deformation of the involute helical gears[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 1998, 29(4): 113-117. (in Chinese)
- [10] Lewis W. Investigation of the strength of gear teeth[C]// Proc. Engineers' Club. Philadelphia: 1893.
- [11] 周长江, 唐进元, 吴云新. 齿根应力与轮齿弹性变形的计算方法进展和比较研究[J]. 机械传动, 2004, 28(5): 1-6.
- ZHOU Changjiang, TANG Jinyuan, WU Yunxin. The comparative study of the bending stress and elastic deformation calculation of gear tooth[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2004, 28(5): 1-6. (in Chinese)
- [12] 齿轮手册编委会. 齿轮手册[M]. 2版. 北京: 机械工业出版社, 2002.
- Gear Handbook Committee. Gear handbook[M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2002.
- [13] Brauer J. A general finite element model of involute gears[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, (40): 1857-1872.
- [14] Bibel G D, Reddy S K, Savage M, et al. Effects of rim thickness on spur gear bending stress[J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 1994, 116: 1157-1162.
- [15] Shott B A. A new approach to gear tooth root stresses[J]. Journal of Engineering for Industry, 1974: 11-17.