

文章编号: 1000-8055(2009)06-1219-10

激波诱导燃烧模拟中轴对称边界数值异常研究

刘 晨, 王江峰, 伍贻兆

(南京航空航天大学 航空宇航学院, 南京 210016)

摘 要: 对钝体激波诱导燃烧模拟中引起对称轴附近出现数值异常现象的几个影响因素进行了细致讨论. 在飞行速度低于爆轰速度情形的模拟中, 在一定条件下靠近对称轴的位置会出现明显的数值异常——燃烧阵面扭曲. 分别从边界处理方法、计算格式、化学反应机制和计算网格等 4 个方面对该异常产生的原因进行了详细地讨论. 研究表明 4 个因素都会导致数值异常产生, 深入的分析表明计算格式是其中最根本的因素, 而这种燃烧阵面扭曲的数值异常应该与粉刺问题 (Carbuncle) 类似. 针对如何克服轴对称边界数值异常提出了一些合理的措施, 并给出了验证算例的对比与分析.

关 键 词: 激波诱导燃烧; 轴对称; 边界条件; 数值异常

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

Study on the abnormity of the axial-symmetric boundary in simulation of shock-induced combustion

LIU Chen, WANG Jiang-feng, WU Yi-zhao

(College of Aerospace Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The abnormity of the axial-symmetric boundary in simulation of shock-induced combustion was discussed. Practice has shown that the abnormity (distortion of combustion front) may appear near the axis when the velocity was below the detonative speed. Four key factors, such as the solution method of the boundary, numerical scheme, chemical reaction model and mesh were analyzed. It is shown that all factors can cause the abnormity, but the numerical scheme should be the most fundamental one. The abnormity may be similar to the 'carbuncle' problem. Some reasonable measures are proposed, and numerical results show the availability of these proposals.

Key words: shock-induced combustion; axial symmetry; boundary conditions; abnormity

随着高超声速技术的发展, 世界各国都对高超声速飞行器的推进系统进行了深入的研究. 这类高超声速推进系统中的核心技术就是超燃冲压发动机、爆震发动机等的研制, 而超声速燃烧技术又是其中的关键. 超声速燃烧流场中包含了剧烈的激波间断、快速的化学反应等, 这些复杂的流动现象使得实验研究存在很大的困难, 因此数值模拟手段的研究和应用在国内外都得到了广泛的

重视^[1-5].

Lehr 等在上世纪 70 年代所做的关于激波诱导燃烧的弹道靶自由飞实验^[6]已经成为测试化学非平衡程序模拟能力的经典算例. 实验模型为球柱组合体, 半径 $r = 7.5 \text{ mm}$, 实验环境: 温度 $T = 286 \text{ K}$, 压力 $p = 42\,662 \text{ Pa}$, H_2/Air 混合气体组分比例为 $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + 3.76\text{N}_2$, 此时声速 403 m/s , 爆轰速度 $D_0 = 2055 \text{ m/s}$. 根据实验观测, 模型飞行

收稿日期: 2008-06-04; 修订日期: 2008-08-12

基金项目: 国家自然科学基金(90716013)

作者简介: 刘晨(1982-), 男, 江苏如皋人, 博士生, 主要研究方向为高超声速燃烧.

速度 $V < D_{qj}$, 弹头轴线附近流场为脱体激波-预燃延迟-燃烧阵面结构; 飞行速度 $V > D_{qj}$, 燃烧阵面与脱体激波重合^[3]. 数值模拟时计算区域是实验模型的球头部分. 数值实践表明对于飞行速度大于爆轰速度情形的模拟要比低于爆轰速度情形更容易实现.

文中只讨论飞行速度低于爆轰速度的情形, 初场条件为温度 250 K, 压力 42 662 Pa, 马赫数 4.5126, 来流组分比例为 $2H_2 + O_2 + 3.76N_2$. 图 1 给出了该情形时流场结构示意图及实验照片. 实践表明该情形下粘性影响很小, 而且流场是轴对称的, 为了简化通常都采用轴对称 Euler 方程进行数值求解^[1-5]. 本文采用多种计算格式和网格对该情形进行了模拟, 研究中发现一定的条件下会出现图 2 所示的数值异常. 图 2 给出的是该情形下模拟得到的对称轴附近的 H_2 密度分布, 从中可以看出流场结构基本是正确的, 但是燃烧阵面对称轴附近出现了明显的扭曲, 这显然与实验结果不符. 文中将对导致该数值异常的因素做深入的研究, 并提出一些避免该异常出现的有效建议.

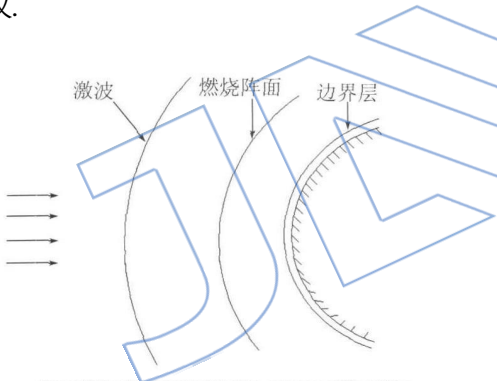


图 1 流场结构示意图及实验照片

Fig. 1 Sketch of field configuration and experimental shadow graph

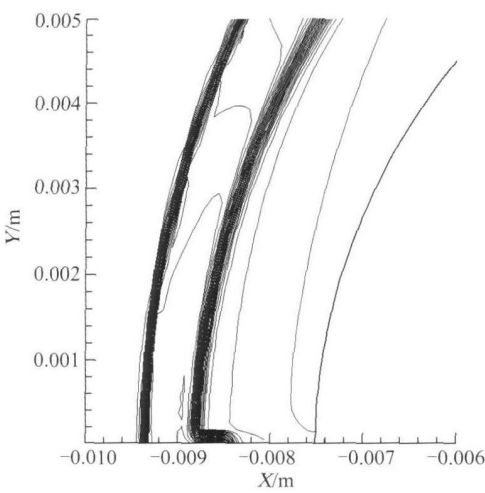


图 2 数值模拟得到的 H_2 密度分布
Fig. 2 Density contour of H_2

1 控制方程及数值离散方法

1.1 控制方程

控制方程是轴对称多组分 Euler 方程组, 其形式如下:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + H = S$$

其中 Q 为守恒变量; F, G 分别为轴向和径向的无粘数值通量; H 为无粘轴对称交叉源项; S 为化学反应源项; x, y 分别表示轴向和径向方向.

$$Q = [\rho_1, \dots, \rho, \dots, \rho_{NS}, \rho u, \rho v, e_t]^T$$
$$S = [\dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_{NS}, 0, 0, 0]^T$$

式中 ρ_i 是组分 i 的密度, $\rho = \sum \rho_i$; NS 为组分个数; u, v 分别表示轴向和径向速度分量; e_t 是单位体积总能, $e_t = \sum \rho h_i - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$, h_i 为组分 i 的单位质量焓值; p 是压强; $\dot{\omega}_i$ 为组分 i 的化学反应质量生成率. 组分 i 的比定压热容、焓值以及 $\dot{\omega}_i$ 由 ChemKin 库函数获得. 若未特殊说明, 文中采用的化学反应机制均为 Shang^[7] 的 7 组分 7 反应机制.

1.2 数值离散及边界条件

控制方程的空间离散采用基于非结构网格的有限体积方法. 时间推进采用 5 步 Runge-Kutta 格式, 并采用当地时间步长加速收敛. 对于化学反应源项所导致的刚性问题, 这里采用化学反应特征时间方法^[8].

计算初场由来流条件给出. 远场边界采用基于黎曼不变量的无反射边界条件. 物面条件为: ①无

穿透条件 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$; ② 非催化壁条件 $\frac{\partial(\rho/\rho)}{\partial \mathbf{n}} = 0$, $\mathbf{n}$ 表示物面法向. 对称边界上应用对称条件.

2 影响因素讨论

下面分别详细讨论 4 个可能导致数值异常产生的因素, 即边界处理方法、计算格式、化学反应机制及计算网格质量.

2.1 边界处理方法的影响

采用有限体积格心格式时, 需要计算边界边上的数值通量, 一般做法是利用左单元的流场参数估算边界边上的参数值. 常见的两种不同的处理思路为: 一是直接根据左单元给出边界边上的数值通量估计值; 二是先在边界边外侧引入一个伪单元, 然后采用与内场边相同的方法进行处理, 即求解一个对应的 Riemann 问题. 这里只讨论对称边界.

2.1.1 直接赋值方法

这种方法理论上是最精确的, 但是实际应用时很难根据左单元直接给出边界边上流场参数的精确值. 最常见的做法是对称边界上压力直接取为左单元压力值, 法向速度 $u_n = 0$. 于是对称边界处的数值通量变为 $\mathbf{F}_{\text{sym}} = (0, p, 0, 0)^T$.

2.1.2 伪单元方法

这种方法的目的为了在整个计算区域内采用一致的数值格式, 从而保证计算精度的一致性. 但是在边界处只有一侧有单元, 为了求解对应的 Riemann 问题, 需要在另一侧引入伪单元.

在对称边界处, 伪单元的密度、压力直接取为左单元的密度和压力值, 速度分量则关于边界对称, 于是速度分量 $u'_n = -u_n, v'_t = v_t$.

为了简便, 这里讨论图 3 所示的特殊情形, 其中 u 为垂直于对称边界的速度分量, v 为平行于对称边界的速度分量. 于是流场参数(即 Riemann 问题的初始条件) 为

$$\begin{aligned} \rho_L &= \rho, u_L = u, v_L = v, p_L = p \\ \rho_R &= \rho, u_R = -u, v_R = v, p_R = p \end{aligned}$$

这里只讨论 Jameson 格式和 AUSM+ 格式. 详细的推导表明常见的迎风格式都会得到与 AUSM+ 格式类似的结论.

1) Jameson 中心格式

中心格式的思路就是边界上的流场参数值直接由两侧单元中心的参数值代数平均得到, 于是

$$\rho_b = \rho, u_b = 0, v_b = v, p_b = p$$

根据数值通量的定义, 于是

$$\mathbf{F}_{\text{synr center}} = (0, p, 0, 0)^T$$

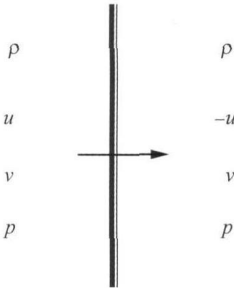


图 3 对称边界处的流场参数示意图
Fig. 3 Sketch of the field on the axis

2) AUSM+ 格式

AUSM+ 格式数值通量表达式为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} Ma_{\frac{1}{2}} a_{\frac{1}{2}} \rho_{L/R} \\ Ma_{\frac{1}{2}} a_{\frac{1}{2}} \left(\rho u \right)_{L/R} + p_{\frac{1}{2}} \\ Ma_{\frac{1}{2}} a_{\frac{1}{2}} \left(\rho v \right)_{L/R} \\ Ma_{\frac{1}{2}} a_{\frac{1}{2}} \left(\rho H \right)_{L/R} \end{bmatrix}$$

根据 $Ma_{\frac{1}{2}}$ 和 $p_{\frac{1}{2}}$ 的定义, 于是有

$$Ma_{\frac{1}{2}} = 0, p_{\frac{1}{2}} = p \left[\frac{1}{2} (Ma + 1)^2 (2 - Ma) \right]$$

此时对称边界上数值通量为

$$\mathbf{F}_{\text{synr AUSM+}} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \left[\frac{1}{2} (Ma + 1)^2 (2 - Ma) \right] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

图 4 给出了 Jameson 格式和 AUSM+ 格式在对称边界处法向动量项随法向马赫数的变化曲线, 图中横轴表示法向马赫数, 纵轴表示法向动量通量与左单元压力的比值.

根据上面的分析, 采用直接赋值的方法就相当于在边界处总是采用 Jameson 中心格式. 从流场区域内数值格式的一致性的角度看, 采用伪单元的方法应该可以保证更好的数值稳定性.

下面详细讨论轴对称激波诱导燃烧问题中对称边界处采用不同处理方法可能导致的问题. 这里讨论图 5 所示的特殊情形. 此时对称边界法矢为 $\mathbf{n} = (0, -1)$.

有限体积离散的 Euler 方程形式为

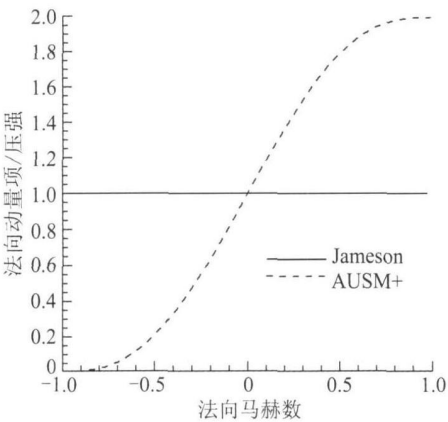


图 4 动量数值通量随马赫数的变化曲线
Fig. 4 Momentum flux versus Mach number

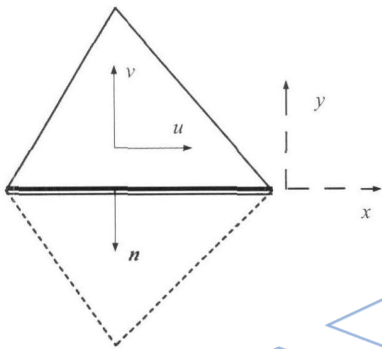


图 5 对称边界单元示意图
Fig. 5 Sketch of the cell on the axisymmetric boundary

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial \Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_x + \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}_y) dl = \mathbf{S} - \mathbf{H}$$

其中 Ω 为网格单元面积; n_x, n_y 为单元边法矢的两个分量. 根据 Euler 方程的旋转不变性, 在边界单元展开整理有

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\Omega} \int_{\partial \Omega_{sym}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho v u_n \\ \rho h u_n \end{bmatrix} dl + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_{sym} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S} - \mathbf{H}$$

其中 $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_x + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_y$, $v_t = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_y + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_x$. 所以 p_{sym} 对边界单元的速度分量 v 的增长起正面的影响, 即 p_{sym} 的增大将导致 v 的增加. 易知图 5 所示的对称边界处法向马赫数是负值. 根据图 4, 在内场采用迎风格式时, 若在边界处采用中心格式, 将使得 p_{sym} 估计值偏大, 于是导致速度分量 v 偏大. 由于多组分模拟时温度是通过总能、密

度及速度值迭代计算得到的, 于是此时得到的温度值将偏低, 在本文讨论的燃烧问题的模拟中就会导致模拟的燃烧滞后, 这在流场参数分布中直观的表现就是燃烧阵面位置偏后, 于是出现了扭曲, 即前文所提到的数值异常.

图 6 给出了 AUSM+ 格式采用两种边界处理方法得到的 H_2 密度分布. 结果表明采用伪单元方法可以避免数值异常的出现.

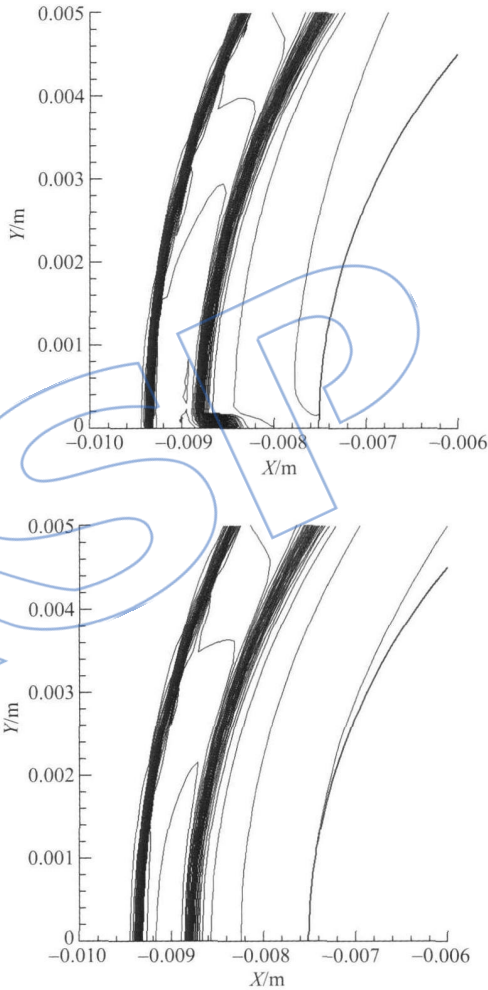


图 6 直接赋值方法和伪单元方法(AUSM+ 格式)
Fig. 6 Directly assignment and pseudocell (AUSM+ scheme)

2 2 计算格式的影响

这里选取 Jameson 中心格式、Van Leer 格式、AUSM+ 格式及 Roe 格式进行对比研究. 图 6 ~ 图 9 分别给出了 4 种格式采用两种边界处理方法时得到的 H_2 密度分布.

结果表明在采用直接赋值方法时, Jameson 中心格式以及 Van Leer 格式可以得到较好的计算结果; Roe 格式得到的燃烧阵面在对称轴附近

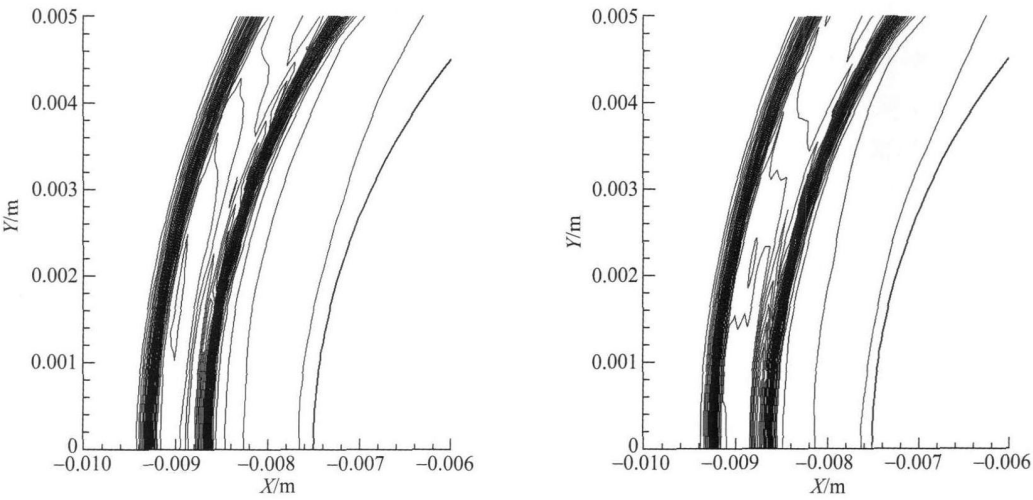


图 7 直接赋值方法和伪单元方法(Jameson 格式)

Fig. 7 Directly assignment and pseudo-cell (Jameson scheme)

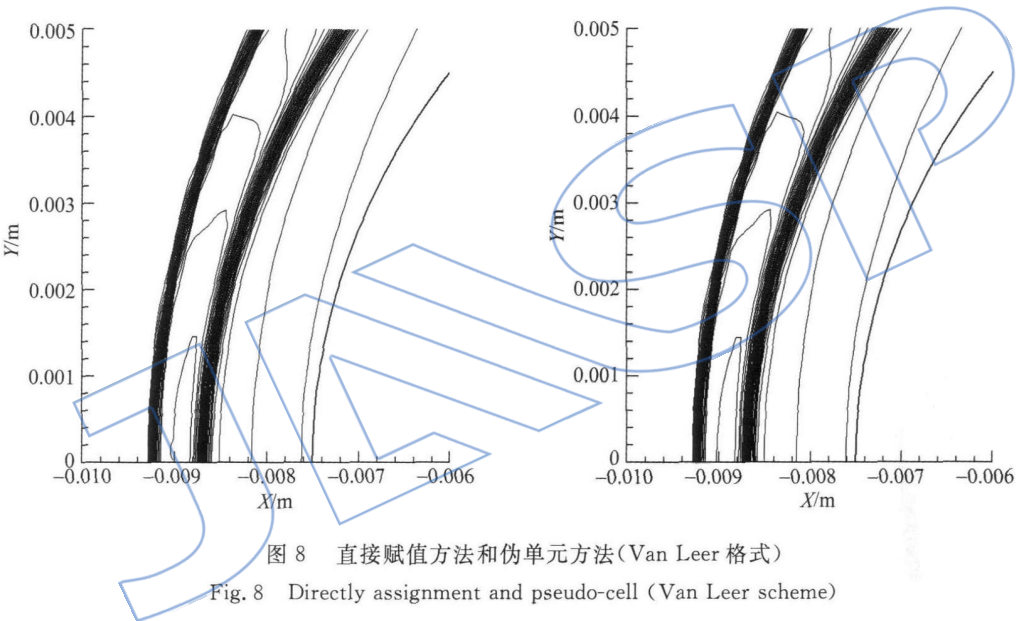


图 8 直接赋值方法和伪单元方法(Van Leer 格式)

Fig. 8 Directly assignment and pseudo-cell (Van Leer scheme)

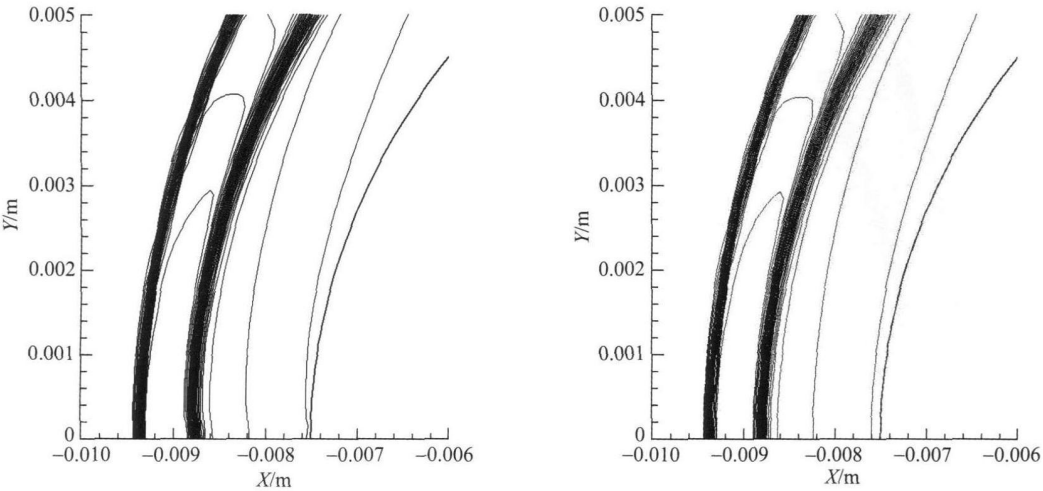


图 9 直接赋值方法和伪单元方法(Roe 格式)

Fig. 9 Directly assignment and pseudo-cell (Roe scheme)

曲率偏大, 与对称轴并不垂直; AUSM+ 格式得到的结果中燃烧阵面对称轴附近出现明显的扭曲. 采用伪单元方法时, Jameson 格式和 Van Leer 格式得到了与直接赋值方法类似的计算结果; 而 Roe 格式及 AUSM+ 格式的结果得到了明显的改善.

这表明如果格式本身的数值耗散足够大, 那么其数值耗散就足以抵消掉边界处理不合适导致的数值扰动, 所以 Jameson 中心格式及 Van Leer 格式在两种边界处理方法下得到了类似的结果.

2 3 化学反应机制的影响

这里选取常见的 3 种氢/氧反应机制对激波诱导燃烧算例进行对比研究, 此时边界处理都采用伪单元方法, 计算格式采用 Van Leer 格式. 3 种机制分别为 Shang^[7] 7 组分 7 反应、Wilson^[9] 13 组分 32 反应和 Jachimowski^[10] 13 组分 33 反应.

图 8 给出了 Shang 机制得到的 H₂ 密度分布图, 图 10 给出了后两种反应机制得到的结果. 结果表明不同的反应机制不但会导致不同的预燃延

迟和化学反应速率, 而且可能导致对称轴附近出现数值异常. 结果表明 Shang 和 Wilson 机制结果较为理想, 而 Jachimowski 机制会导致数值异常出现.

分析认为 Jachimowski 机制中所含中间反应较为敏感, 它对所采用的格式和网格的要求比较高. 在相同的计算条件下, 采用 Jameson 格式对 Jachimowski 机制进行了计算. 图 11 给出了得到的 H₂ 密度分布, 此时数值异常消失, 表明 Jameson 格式相比于 Van Leer 格式具有更强的适应性.

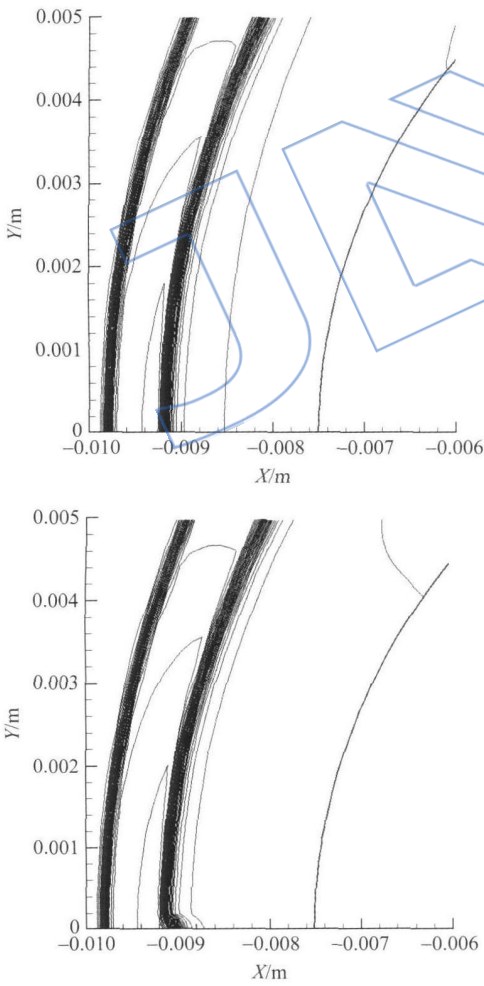


图 10 Wilson 机制和 Jachimowski 机制
Fig. 10 Wilson and Jachimowski mechanism

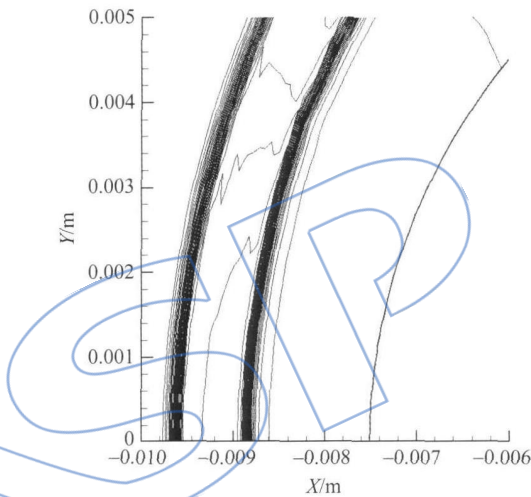


图 11 Jachimowski 反应机制(Jameson 格式)
Fig. 11 Jachimoski mechanism (Jameson scheme)

2 4 计算网格质量的影响

讨论两个问题: ①网格正交性是否会导致数值异常的出现? ②该数值异常与 Roe 等格式出现的粉刺问题(Carbuncle, 即强激波后出现非物理、不稳定的扰动) 是否存在某种相似?

这里边界处理均采用伪单元方法.

先讨论网格正交性的影响. 考虑两套网格, 唯一的差异是一个对称轴附近的网格线与对称轴正交(称为 A 网格), 而另一个网格线与对称轴不正交(称为 B 网格). 图 13 给出了 AUSM+ 格式在两种网格中得到的 H₂ 的密度分布. 结果表明网格不正交会导致对称轴附近燃烧阵面的异常.

研究表明^[11] 网格单元流向和径向尺度的比值不合适将会导致粉刺问题, 本文通过研究网格单元尺度对上述数值异常是否存在影响, 来研究其与粉刺问题是否存在相似性.

下面的计算采用 AUSMPW+ 格式. 基础网格为上面的 A 网格, 其中物面以 1.05 等比增长分布 80 个网格单元, 驻点单元长度取为 8×10^{-5} m; 流

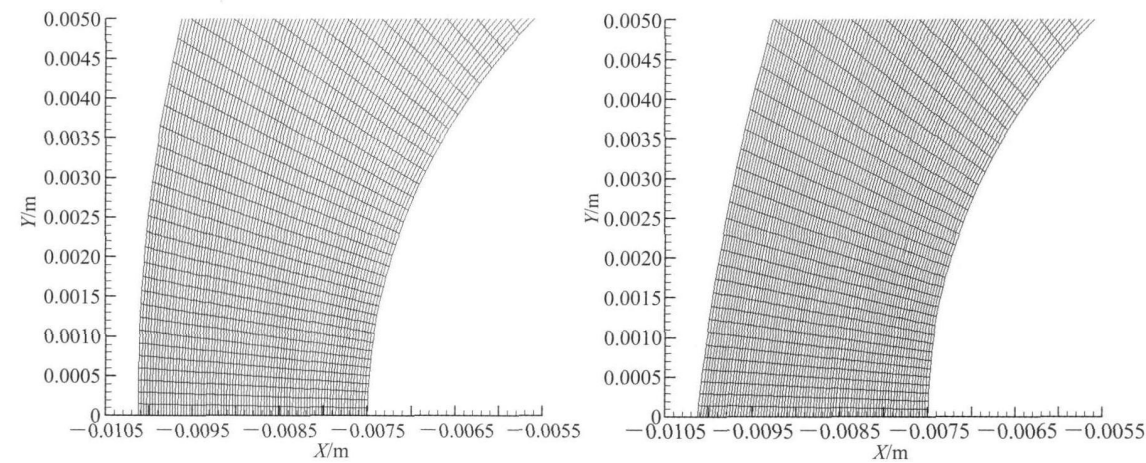


图 12 A 网格和 B 网格示意图
Fig. 12 Sketch of A grid and B grid

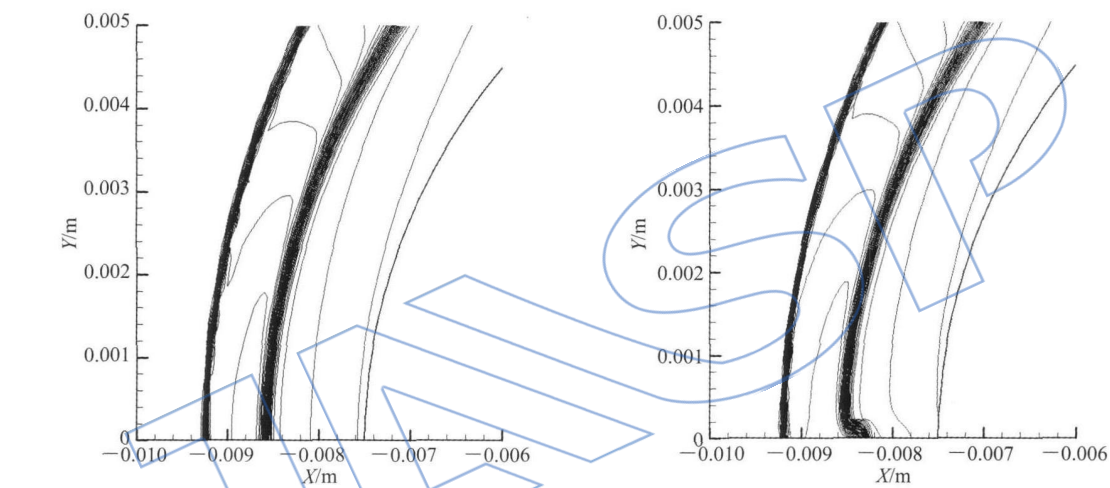


图 13 A 网格和 B 网格计算结果(AUSM+ 格式)
Fig. 13 Results on A grid and B grid (AUSM+ scheme)

向均匀分布 90 个单元, 单元长度 2.92×10^{-5} m. 下面分别讨论流向和径向网格尺度变化对计算结果的影响.

首先保持径向网格尺度不变, 即保持物面单元分布不变, 通过调整流向网格单元的数目控制流向网格尺度的变化. 图 14 ~ 图 15 分别给出了 50, 57, 58 和 60 个单元时的计算结果.

结果表明, 当单元数少于 57 时出现数值异常; 而当单元数超过 58 后, 数值异常消失, 此时驻点处网格单元径向、流向尺度比为 1.7676. 即网格的径向、流向尺度比大于该值时数值异常消失.

另外图 16 给出了流向取 50 个单元时采用 AUSM+ 格式计算得到的结果, 结果表明 AUSM+ 格式在该尺度网格上得到的结果中并没有出现数值异常. 这表明不同的格式对网格的要求是不同的, 数值算例表明 AUSMPW+ 格式对网格的要

求要高于 AUSM+ 格式.

然后保持流向单元尺度不变, 即保持流向均匀分布 90 个单元, 通过调整物面驻点处网格单元长度来控制径向网格尺度的变化. 图 17, 图 18 分别给出了驻点网格单元长度为 4.2×10^{-5} , 4.4×10^{-5} , 4.5×10^{-5} 和 5×10^{-5} m 时的计算结果.

结果表明驻点处单元径向长度很小时, 会出现很严重的数值异常. 当单元长度增大到 4.5×10^{-5} m 时数值异常消失. 此时驻点处的网格单元的径向、流向尺度比为 1.543, 即当网格的径向、流向尺度比大于该值时数值异常才消失.

对网格的研究表明, 为了保证不出现数值异常, 网格的正交性及网格单元径向、流向尺度比都要满足一定的要求. 数值实践表明边界处计算网格必须保持较好的正交性, 同时网格单元在驻点处的径向、流向尺度比值应达到 2.0 左

右. 数值实践还表明各种计算格式对网格的要求存在差异, 初步的研究表明 AUSMPW+ 格式对网格的要求较高, AUSM+ 格式要求相对较低.

上述关于网格的两个因素都跟粉刺问题密切相关, 而文献[12]认为 AUSMPW+ 格式不存在粉刺问题, 但实践表明此结论存在局限性. 下面采用文中算例的计算条件, 不考虑化学非平衡的影响, 考察 AUSMPW+ 格式. 图 19(a) 给出了采用流向 50 个单元、驻点单元径向长度 8×10^{-5} m 的网格时的计算结果, 可以发现在对称轴附近区域出现了微弱的数值异常; 图 19(b) 给出了采用流向 90 个单元、驻点单元径向长度 1×10^{-5} m 时的结果, 此时数值异常变得显著, AUSMPW+ 表现出严重的粉刺问题.

AUSMPW+ 最严重、AUSM+ 次之, Van Leer 格式未出现粉刺问题.

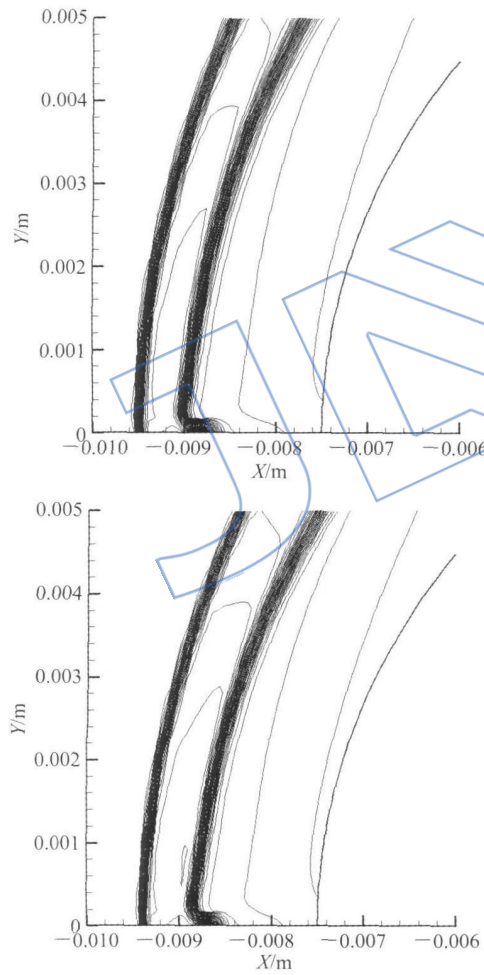


图 14 流向 50 和 57 个网格单元

Fig. 14 Fifty and fifty seven cells along the axis

对 Van Leer 格式、AUSM+ 格式也进行了相应的计算, 限于篇幅这里不再给出具体的结果. 计算结果反映了各种格式粉刺问题的强弱程度,

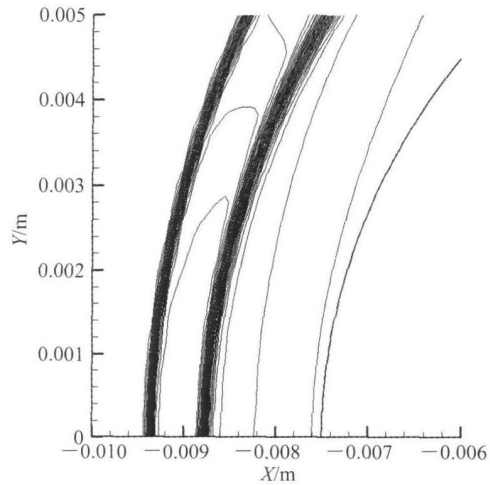


图 15 流向 58 和 60 个网格单元

Fig. 15 fifty-eight and sixty cells along the axis

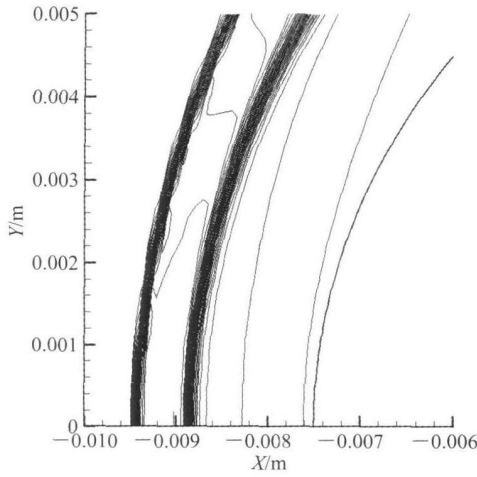


图 16 流向 50 个网格单元(AUSM+格式)

Fig. 16 Fifty cells along the axis (AUSM+ scheme)

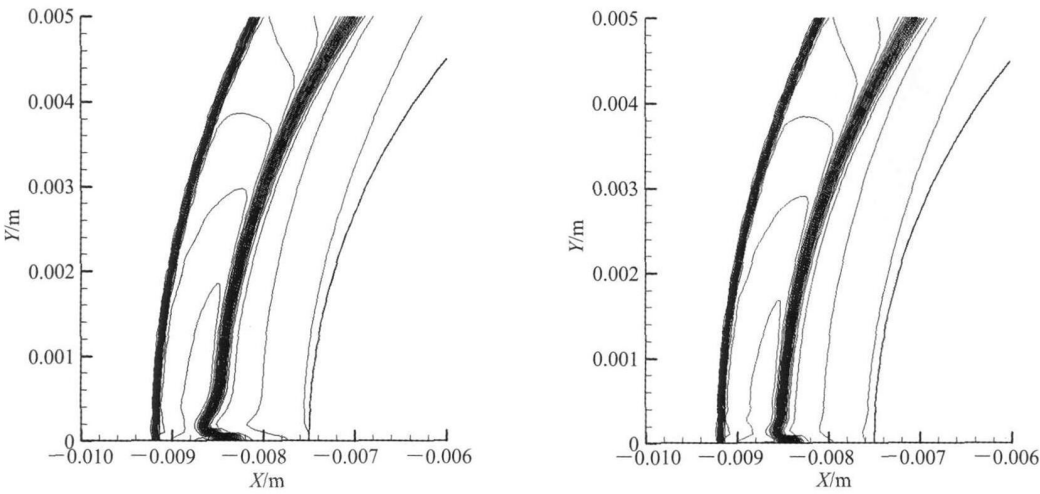


图 17 径向尺度 4.2×10^{-5} m 和 4.4×10^{-5} m
Fig. 17 In radial direction 4.2×10^{-5} m and 4.4×10^{-5} m

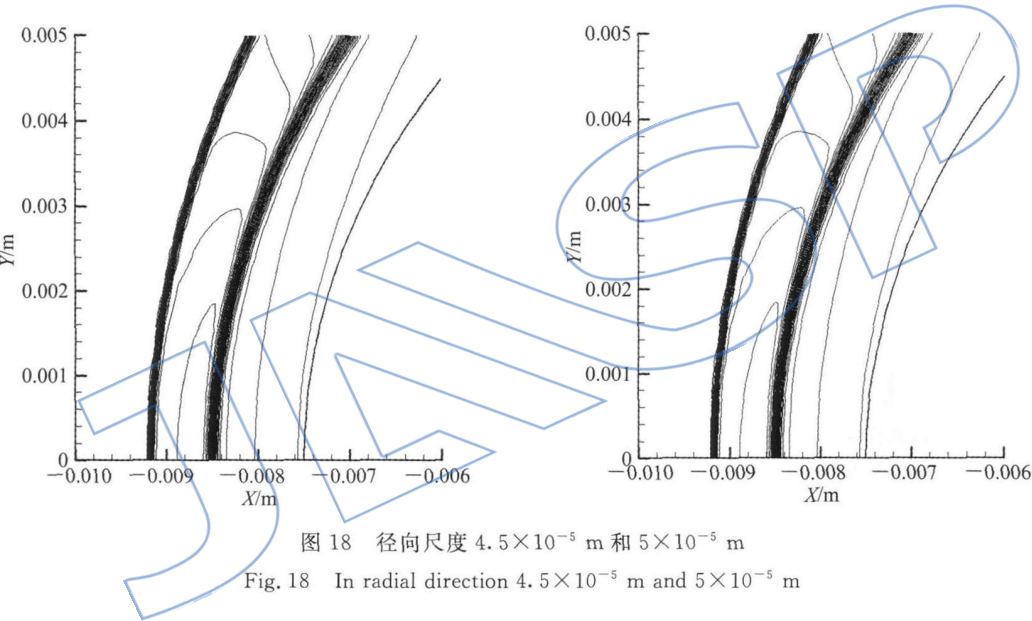


图 18 径向尺度 4.5×10^{-5} m 和 5×10^{-5} m
Fig. 18 In radial direction 4.5×10^{-5} m and 5×10^{-5} m

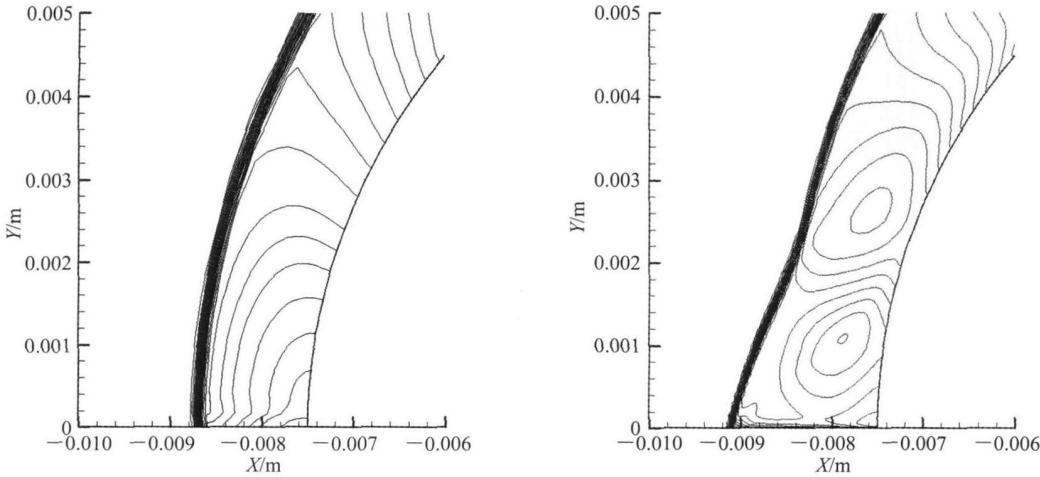


图 19 流向 50 个单元, 径向 8×10^{-5} m 以及流向 90 个单元, 径向 1×10^{-5} m
Fig. 19 Fifty cells along the axis, 8×10^{-5} m in radial direction and ninety cells along the axis, 1×10^{-5} m in radial direction

3 结 论

本文中详细讨论了轴对称激波诱导燃烧问题模拟中导致出现数值异常的 4 个因素: 边界处理方法、计算格式、化学反应机制及计算网格. 研究结果表明该数值异常应该类似于粉刺问题, 其根源是计算格式本身的缺陷, 而文中算例表明在各种情形下激波的捕捉并不存在问题, 因此燃烧阵面出现的数值异常要比粉刺问题更加复杂, 显然这是由于引入了化学非平衡的影响. 研究表明, 采取如下措施可以避免这种数值异常的出现

1) 边界处理应采用伪单元方法;

2) 不同计算格式对网格、反应机制的要求也不同, 研究表明 Jameson, Van Leer, AUSM+, AUSMPW+ 格式的要求依次提高. 数值模拟时应尽量采用对其他因素要求较低的计算格式;

3) 化学反应机制应采用经验证较为可靠的机制, 如 Shang 或 Wilson 反应机制;

4) 在保证网格单元尺度满足数值模拟精度要求的前提下, 应采用正交性较好的计算网格.

参考文献:

- [1] Yungster S, Eberhardt S, Bruckner A P. Numerical simulation of hypervelocity projectiles in detonable gases[J]. AIAA Journal, 1991, 29(2): 187-199
- [2] 张涵信, 陈坚强, 高树椿. H_2/O_2 燃烧的超声速非平衡流动的数值模拟[J]. 宇航学报, 1994, 15(2): 14-23
ZHANG Hanxin, CHEN Jianqiang, GAO Shuchun. Numerical simulation of supersonic nonequilibrium flows for H_2/O_2 combustions[J]. Journal of Astronautics, 1994, 15(2): 14-23 (in Chinese)
- [3] 刘君. 化学动力学模型对 H_2/Air 超燃模拟的影响[J]. 推进技术, 2003, 24(1): 67-70
LIU Jun. Numerical study on chemical mechanism in supersonic H_2/Air mixture gas flow[J]. Journal of Propulsion Technology, 2003, 24(1): 67-70 (in Chinese)
- [4] WU Yingchuan, WANG Lan, LE Jialing. A parallel, implicit, unstructured Euler/Navier Stokes solver for supersonic reacting flow[C]// East West High Speed Flow Field Conference 2005 Beijing: [s. n.], 2005: 97-103
- [5] WANG Jiangfeng, WU Yizhao. Parallelized upwind flux splitting scheme for supersonic reacting flows on unstructured hybrid meshes[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 24(3): 218-224
- [6] Lehr H F. Experiments on shock-induced combustion[J]. Astronautica Acta, 1972, 17(4): 589-597
- [7] Shang H M, Chen Y S, Liaw P, et al. Investigation of chemical kinetics integration algorithms for reacting flows[R]. AIAA-1995-0806
- [8] Vos J B, Leyland P, Kemenade V V, et al. NSMB handbook 4.5[M]. Stockholm: Dept. of Aeronautics KTH, 1999: 70-71
- [9] Wilson G J, McCormack R W. Modeling supersonic combustion using a fully implicit numerical method[J]. AIAA Journal, 1992, 30(4): 1008-1015
- [10] Jachimowski C J. An analysis study of the hydrogen-air reaction mechanism with application to scramjet combustion[R]. Hampton: NASA-TP-2791, 1988
- [11] Maurizio P, Domenic D A. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 166: 271-301
- [12] Kim H K, Kim C, Rho O H. Accurate computations of hypersonic flows using AUSMPW+ scheme and shock-aligned grid technique[R]. AIAA-1998-2442