

文章编号:1000-8055(2010)03-0610-07

随机振动响应方差的直接算法

孔宪仁, 廖 俊

(哈尔滨工业大学 航天学院 卫星技术研究所, 哈尔滨 150001)

摘 要: 将动力学方程经过系统扩阶和模态变换构成李雅普诺夫方程,可直接求得大型有限元结构的平稳随机振动响应方差.用等效线性化方法处理杜芬系统后,求解李雅普诺夫方程可以得到一套高效高精度求解杜芬系统随机振动响应方差的方法.仿真对误差进行了估计,结果验证了方法的高效和精确性.

关 键 词: Duffing 系统; 等效线性化方法; 方差; 有限元; 随机分析

中图分类号: O324

文献标识码: A

Direct algorithm for variance of random vibration response

KONG Xian-ren, LIAO Jun

(Research Center of Satellite Technology, School of Astronautics,
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: By using of extending order and modal transformation of dynamic equation, a Lyapunov equation was established, and the solution of the Lyapunov equation could be used to directly obtain stationary random vibration response variance of large-scale finite element structure. Duffing system was linearized by equivalent linearization method, and the Lyapunov equation was solved to get the variance of random vibration response of duffing system. The precision has been justified by simulation, showing that the presented method is efficient and precise.

Key words: Duffing system; equivalent linearization method; variance;
finite element; random analysis

随机振动是工程中常见的一种振动形式.在运载火箭升空的主动段,卫星受到火箭发动机的脉动推力、喷气噪声以及紊流边界层噪声等综合产生的随机振动激励.航空器飞行过程中受到发动机喷气噪声和气流影响而产生的随机激励.车辆在行驶中受到地面的随机激励.地震、风等对建筑会产生随机激励的作用.随机振动分析成为上述结构分析的一个必要的过程.

结构随机响应的一个重要的任务是获得关注点响应的方差和均方值.均值、均方值、方差三者知道其中两个量即可获得另一个,一般均值是较

容易获得,随机激励为白噪声时均值为零,均方值等于方差,对于线性系统,将激励去平均后计算得到的响应均方就等于方差值.除了少数简单的问题可以直接计算出响应方差以外,一般来说首先求出在一系列离散频率点上的结构响应功率谱的值,然后在整个频域上积分从而得到响应方差^[1].这样计算存在一些不足:求出的只是近似值,尤其对于多自由度宽频随机激励时,每个自由度的方差值都必须选取大量的频率点进行积分,否则精度将有所损失,这导致计算量的增大.每次积分只能求出一个自由度的方差值,这也为响应分析带

收稿日期:2009-02-23; 修订日期:2009-04-22

基金项目:长江学者和创新团队发展计划(IR T0520)

作者简介:孔宪仁(1961-),男,黑龙江哈尔滨人,教授、博导,硕士,研究方向为结构动力学、飞行器动力学与实验.

通讯作者:廖俊(1982-),男,湖南娄底人,博士,主要从事结构动力学、航天器结构随机振动研究. E-mail:liaojun404@126.com

来不便.直接求出随机响应协方差矩阵所满足的李雅普诺夫方程的办法能使计算效率和精度都得到提高,能够有效克服上述缺点,高效而高精度的得到随机响应的方差值.

1 解李雅普诺夫方程求随机响应方差

1.1 激励为白噪声

对于线性时不变系统可以写成如下状态方程的形式^[2]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= A_{ss} x_s + B_{sw} w \\ z &= C_{zs} x_s\end{aligned}\tag{1}$$

其中 x_s 为状态向量, w 为输入向量, z 为输出向量. A, B, C 为响应维数的常量矩阵, 下标 s, w, z 等表示矩阵维数.

假设输入为白噪声, 则输入的功率谱矩阵为对称正定的常量矩阵 W_{uu} . 状态变量的稳态协方差矩阵表示为

$$E(x_s x_s^T) = X_{ss}\tag{2}$$

容易证明式(2)满足李雅普诺夫方程

$$A_{ss} X_{ss} + X_{ss} A_{ss}^T + B_{su} W_{uu} B_{su}^T = 0\tag{3}$$

其中 w 为激励 w 的功率谱矩阵乘 2π .

对 A_{ss} 进行特征值分解

$$A_{ss} = E_{ss} \Lambda_{ss} E_{ss}^{-1}\tag{4}$$

其中 E_{ss} 为特征向量构成的矩阵, Λ_{ss} 为特征值构成的对角线矩阵.

经过矩阵推导求得李雅普诺夫方程的解的矩阵形式为

$$\begin{aligned}X_{ss} = & - E_{ss} [(E_{ss}^{-1} B_{su} W_{uu} B_{su}^T E_{ss}^{-*}) ./ \\ & (\Lambda_{ss} P + P^* \Lambda_{ss}^*)] E^*\end{aligned}\tag{5}$$

其中 P 矩阵为合适维数的矩阵元素全为 1 的矩阵, 符号“./”表示矩阵之间对应元素的相乘运算.

得到输出 z 的均方根(RMS)值为

$$z_{rms} = \sqrt{\text{diag}(C_{zs} X_{ss} C_{zs}^T) / 2}\tag{6}$$

这样仅通过计算式(5)和(6)矩阵运算即可以求得所有响应点均方根值(或方差). 该方法进行简单的扩阶就可以在满足给定功率谱密度(PSD)函数的平稳随机非白噪声激励下求随机响应方差值.

1.2 激励为非白噪声

对于大多数实际问题, 仅考虑白噪声输入是不够的, 对于满足给定 PSD 的非白噪声激励过程

同样可以通过解扩阶的李雅普诺夫方程来直接求得响应的方差值.

对于白噪声输入可以找到系统使得它的输出能够理论上满足任意精度要求的功率谱曲线. 即可以找到系统矩阵 $A_{nn}, B_{nw}, C_{wn}, D_{ww}$ ^[2] 使得输入为白噪声 w , 而输出为所需的 W_{psd} .

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= A_{nn} x_n + B_{nw} w \\ W_{psd} &= C_{wn} x_n + D_{ww} w\end{aligned}\tag{7}$$

文献[2]称这一系统为 PSD 形状系统(PS-DSS), 并给出了解析形式和分段形式的 PSD 曲线的系统矩阵的获得方法, 对于常用的解析形式给出了解答. 在工程随机振动分析用得较多的分段形式的 PSD 曲线, Matlab 中 Mur-Analysis Toolbox 里面的 fitmag 命令能够得到给定阶数的形状系统的解, 一般 5 阶左右就能满足精度要求, 这对计算量的影响是比较小的. 如图 1 所示, 考虑表 1 所定义的 PSD 曲线, 用 Matlab 中的 fitmag 命令分别获得 2, 3, 5 阶的 PSDSS 系统矩阵. 可以看到 5 阶系统得到的 PSD 曲线已经足够接近原 PSD 曲线, 而 5 阶对整个扩阶系统的计算效率的影响相对是很小的.

表 1 随机激励的功率谱密度

Table 1 PSD of random excitation

F/ Hz	20	30	100	500	1000
功率谱密度/ (N ² / Hz)	0.1	1.0	1.0	0.1	0.1

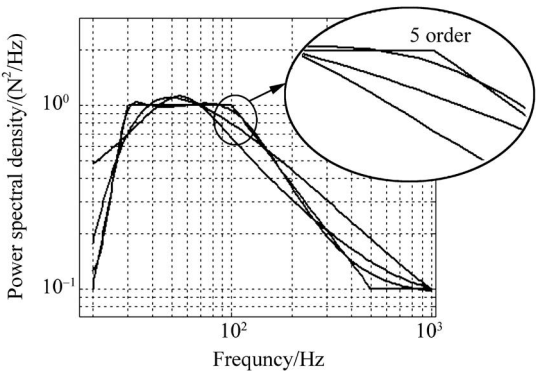


图 1 不同阶 PSDSS 计算功率谱密度的结果

Fig. 1 PSD profile by increasing order systems

下文中将认为 PSDSS 矩阵是已知的.

将式(1), (7)合在一起构成扩阶系统则可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= A_{ss} x_s + B_{sw} w \\ z &= C_{zs} x_s\end{aligned}\quad (8)$$

其中 $\dot{x}_s = \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$, $A_{ss} = \begin{bmatrix} A_{ss} & B_{sw} C_{wn} \\ 0_{ns} & A_{nn} \end{bmatrix}$,

$$B_{sw} = \begin{bmatrix} B_{sw} D_{wn} \\ B_{nw} \end{bmatrix}, \quad C_{zs} = \begin{bmatrix} C_{zs} & 0_{zn} \end{bmatrix}.$$

这样通过 PSDSS 可以将非白噪声的随机激励转换成白噪声随机激励,从而可以应用式(5)来解非白噪声随机激励方差问题。

1.3 线性结构随机响应分析

对于一般线性结构的动力方程

$$M_{nn} \ddot{y}_n + C_{nn} \dot{y}_n + K_{nn} y_n = f(t)_n \quad (9)$$

可令

$$\begin{aligned}x_s &= \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad A_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \\ w_n &= f(t)_n, \quad B_{sn} = \begin{bmatrix} 0_n \\ M^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (10)$$

将式(10)代入式(5),(6)即可很方便的得到随机激励作用下响应的方差.采用适当 C_{zs} 矩阵可以获得响应的位移,应力的方差值以及 von mises 屈服应力等.令 $C_{zs} = [I_{nm} \quad 0_m]$,可以得到响应位移的方差值.

上述过程也可以使用模态叠加方法进行缩减,再采用适当的 C_{zs} 将方差值从模态坐标返回到原坐标下.

将式(9)通过模态变换到模态坐标下^[3]

$$\ddot{u}_m + 2Z_{mm}\Omega_{mm}\dot{u}_m + \Omega_{mm}u_m = M_{mm}^{-1}\Phi_{nm}^T f(t)_n \quad (11)$$

其中 M_{mm} , Z_{mm} , Ω_{mm} , Φ_{nm} 分别为模态质量,模态阻尼比,固有频率和模态矩阵.经过推导可以得到模态坐标下的李雅普诺夫方程及其解法.

可令

$$\begin{aligned}A_{ss} &= \begin{bmatrix} 0_{mm} & I_{mm} \\ -\Omega_{mm} & -2Z_{mm}\Omega_{mm} \end{bmatrix}, \quad x_s = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, \\ B_{sw} &= \begin{bmatrix} 0_{mn} \\ M_{mm}^{-1}\Phi_{nm}^T \end{bmatrix}, \quad w_n = f(t)_n\end{aligned}\quad (12)$$

当 $C_{zs} = [\Phi_{nm} \quad 0_{nm}]$ 通过式(4),(5),(6)即可解出各自由度位移响应的方差值.

2 等效线性化方法^[4-5]

从非线性随机振动工程分析的角度来看,如果非线性程度不是太强,不考虑分叉,跳跃等本质

非线性现象,则等效线性化法已经取得了较大的进展,是相对有效且简单可行的方法,是工程实际中最具有应用潜质的预测非线性系统随机响应的近似方法^[6].其基本思想为用有精确解的线性系统代替给定的非线性系统,并使两方程之差在某种统计意义上为最小.文献[7]比较了以能量差为基础与以方程差为基础的等效线性化方法计算随机振动响应,认为以能量差为等效准则的方法效果要好.

考虑具有随机激励的单自由度非线性系统,其动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + g(x, \dot{x}) = F(t) \quad (13)$$

其中 $g(x, \dot{x})$ 为非线性项,建立等效的线性化方程

$$m\ddot{x} + c_e\dot{x} + k_e x = F(t) \quad (14)$$

其中 c_e , k_e 为等效的阻尼系数和刚度系数.以能量差最小为准则可求得 c_e , k_e 分别为

$$k_e = \frac{2E(x^2 U)}{E(x^4)}, \quad c_e = \frac{E\left[W \int_0^x \dot{x}^2 dt\right]}{E\left[\left[\int_0^x \dot{x}^2 dt\right]^2\right]} \quad (15)$$

其中 $U = \frac{1}{2}kx^2 + \int_0^x g(x, \dot{x}) dx$ 为势能,阻尼力做

的功为 $W = - \int_0^t [c\dot{x} + g(x, \dot{x})] \dot{x} dt$.

以方程差为基础的等效阻尼系数和刚度系数可通过下式获得^[8]

$$k_e' = E\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right], \quad c_e' = E\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right] \quad (16)$$

先设定 c_e , k_e 的一个初始值,求解式(13)得到 x 的某统计值,代入式(15),或式(16)求得新的等效系数.经过反复迭代后得到所求的值.一般式(13)的等效系数的结果化成 $E(x \cdot x^T)$ 的形式或其中的元素来表示,这正是式(2)得到的解,用它来参与迭代,效率和精度将得到很大的提高.只需通过式(10)或者式(12)转换成状态空间表示的运动方程,其协方差矩阵即可求得,并参与到等效线性化的迭代计算中.

3 算例

3.1 有限元板结构

在 MSC.patran 下建立一个一端完全固定的有限元板结构模型.结构尺寸为 500 mm ×

100 mm ×6 mm,弹性模量为 2×10^{11} Pa,泊松比为 0.3,密度为 7800 kg/m^3 ,模态阻尼为 0.1. 如图 2 所示在节点 44 的位置垂直向上作用如表 1 定义的随机激励力.

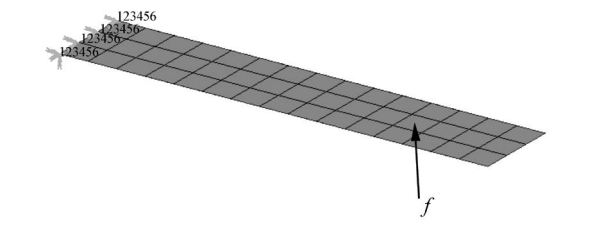


图 2 有限元板模型
Fig 2 Model of finite element method

用本文给出的扩阶的直接求方差值的方法 DVM (directly variance method) 和 Patran 计算的结果进行了比较列于表 2 中. 结果是令人满意的,两者的相对误差平均仅为百分之零点多. 这一误差可能为模型抽取时存在的误差以及 PSDSS 产生的误差所导致. 结果验证了方法在计算有限元结构受非白噪声平稳随机激励作用下的随机响应均方根值计算的有效性. 在奔腾 4 CPU 主频 1.6 GHz,内存 1 G 的主机上运行 Matlab 6.5 编制的程序,用 DVM 计算仅用了 0.5 s 即可获得全部 360 个自由度的均方根值. 而要获得同样的精度,在同一机器上用虚拟激励法^[9]计算响应功率

表 2 Patran 与 DVM 计算随机振动位移响应的均方根值结果比较

Table 2 Displacement response root mean square obtained by Patran and DVM

节点	Patran 均方根值/ 10^{-7}	DVM 均方根值/ 10^{-7}	Error/ %
Nodal 4	1. 811	1. 819 7	0. 480
Nodal 8	8. 512	8. 506 1	0. 069 4
Nodal 10	13. 01	12. 996	0. 106
Nodal 23	6. 549	6. 541 0	0. 123

表 3 EQU 方法($\varepsilon=0.01$)
Table 3 Method of EQU ($\varepsilon=0.01$)

c	FPK	ANA_2	Error 1/ %	R_K	Error 2/ %	SYM	Error 3/ %	DVM	Error 4/ %
0. 04	39. 745 6	37. 145 7	6. 54	37. 146 4	6. 54	37. 142 4	6. 55	37. 145 65	6. 54
0. 06	29. 933 3	28. 312 3	5. 42	28. 313 8	5. 41	28. 310 9	5. 42	28. 312 29	5. 42
0. 08	24. 289	23. 167 6	4. 62	23. 169 7	4. 61	23. 167 4	4. 62	23. 167 67	4. 62
0. 1	20. 558 3	19. 733 5	4. 01	19. 735 9	4. 0	19. 734	4. 01	19. 733 54	4. 01
0. 15	15. 020 8	14. 572 8	2. 98	14. 576 1	2. 96	14. 574 7	2. 97	14. 572 88	2. 98
0. 2	11. 92	11. 641 9	2. 33	11. 645 7	2. 3	11. 644 7	2. 31	11. 641 93	2. 33

谱然后积分仅求得表 2 中所示的 4 个节点垂直方向位移响应均方根值就要用去 3 min. 可见 DVM 在精度和效率上都有明显的优势.

3.2 求解单自由度杜芬系统随机响应

$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx + g(x, \dot{x}) = F(t)$ (17)

设激励力为白噪声过程,且已知其自谱密度为 S_0 ,系统非线性函数为 $g(x, \dot{x}) = \varepsilon kx^3$,由式 (15) 求得以能量差为基础的等效刚度系数^[7]

$k_e = k[1 + 2.5 \varepsilon E(x^2)], \quad c_e = c$ (18)

由式(5),(6),(10),(18)构成一个闭合的计算过程,通过反复迭代即可以求得杜芬系统的随机响应.对于以方程差为基础的等效线性化方法过程类似不做详述.

令 $m=1, c$ 分别为 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.15, 0.2, $k=1, \varepsilon$ 分别为 0.01, 0.1, 功率谱 $S_0=1$. 本文用求解李雅普诺夫方程直接求方差值的方法(DVM)分别对两种等效线性化方法处理过的杜芬系统进行了求解,并与文献[7]中的其他方法进行了比较.计算位移方差 σ 得到结果如表3~表6所示.

表3~表6中 c 表示阻尼系数,FPK 表示针对非线性问题用 FPK(福克-普朗克-柯尔莫哥罗夫)方法算出来方差的精确结果,EQU 方法是用以方程差为基础的等效线性化法计算,ENE 方法是用以能量差为基础的等效线性化法计算.针对线性化问题,ANA 表示系统线性化后,用解析的方法计算方差,R_K 表示用精细龙格库塔方法计算方差,SYM^[7] 表示用保辛方法计算方差,其中 R_K 方法和 SYM 方法都使用四阶格式. Error 1, Error 2, Error 3, Error 4 分别表示 ANA 方法、R_K 方法 SYM 和本文提供的 DVM 四种方法计算的结果相对 FPK 方程方法计算的精确解的误差.这里各个变量都进行了无量纲化处理.

表 4 ENE 方法($\varepsilon=0.01$)
Table 4 Method of ENE ($\varepsilon=0.01$)

c	FPK	ANA_2	Error 1/ %	R_K	Error 2/ %	SYM	Error 3/ %	DVM	Error 4/ %
0.04	39.7456	39.5113	0.59	39.5124	0.59	39.5082	0.6	39.51123	0.59
0.06	29.9333	29.9439	0.04	29.9457	0.04	29.9427	0.03	29.94391	0.04
0.08	24.289	24.3937	0.43	24.396	0.44	24.3936	0.43	24.39365	0.43
0.1	20.5583	20.7018	0.7	20.7045	0.71	20.7025	0.7	20.7018	0.7
0.15	15.0208	15.1818	1.07	15.1854	1.1	15.184	1.09	15.18178	1.07
0.2	11.92	12.0674	1.24	12.0716	1.27	12.0706	1.26	12.0674	1.24

表 5 EQU 方法($\varepsilon=0.1$)
Table 5 Method of EQU ($\varepsilon=0.1$)

c	FPK	ANA_2	Error 1/ %	R_K	Error 2/ %	SYM	Error 3/ %	DVM	Error 4/ %
0.04	16.4855	14.5991	11.44	14.6046	11.41	14.6029	11.42	14.59916	11.44
0.06	13.0619	11.6491	10.82	11.649	10.82	11.6466	10.83	11.64913	10.82
0.08	11.0327	9.8952	10.31	9.8952	10.31	9.8933	10.33	9.89523	10.31
0.1	9.65553	8.7014	9.88	8.7015	9.88	8.7	9.9	8.70143	9.88
0.15	7.53278	6.8534	9.02	6.1756	18.02	6.8526	9.03	6.85336	9.02
0.2	6.28314	5.7588	8.35	5.7592	8.34	5.7584	8.35	5.75881	8.35

表 6 ENE 方法($\varepsilon=0.1$)
Table 6 Method of ENE ($\varepsilon=0.1$)

c	FPK	ANA_2	Error 1/ %	R_K	Error 2/ %	SYM	Error 3/ %	DVM	Error 4/ %
0.04	16.4855	15.837	3.93	15.8365	3.94	15.834	3.95	15.83702	3.93
0.06	13.0619	12.6096	3.46	12.6095	3.46	12.607	3.48	12.60957	3.46
0.08	11.0327	10.6917	3.09	10.6917	3.09	10.6898	3.11	10.69172	3.09
0.1	9.65553	9.387	2.78	9.3871	2.78	9.3856	2.8	9.38699	2.78
0.15	7.53278	7.3689	2.18	7.3692	2.17	7.3682	2.18	7.36887	2.18
0.2	6.28314	6.1751	1.72	6.1756	1.71	6.1748	1.72	6.17508	1.72

图 3 为 $\varepsilon=0.1, c=0.08$ 时,刚度系数迭代过程量. EQU 方法是用以方程差为基础的等效线性化法计算,ENE 方法是用以能量差为基础的等效线性化法计算.总体上,收敛的速度是理想的,经两种等效方法处理后用 DVM 方法来计算一般能在 20 次迭代内达到收敛.相比下,ENE 方法在振荡幅度和收敛速度上都稍好于 EQU 方法.一般情况下 c 越大, ε 越小收敛速度越快.当 ε 很大时可能导致发散,这也是等效线性法只能适用于非线性强度不大的情况的弊端.

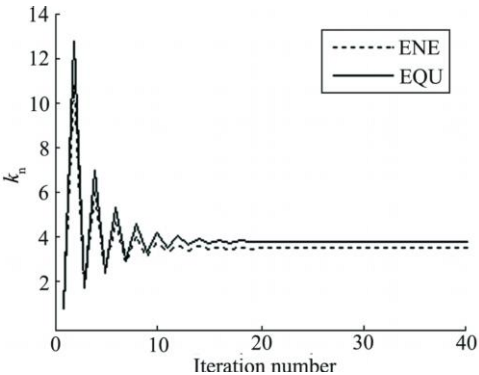


图 3 刚度系数的迭代过程($\varepsilon=0.1, c=0.08$)
Fig. 3 Stiffness coefficient on the iterative process
($\varepsilon=0.1, c=0.08$)

分析表 3~表 6 可以看到,以能量差为基础的等效线性化方法比方程差为基础的等效线性化方法计算的结果误差要小,这从表格中 ANA_2 方法的计算的结果中也能看出来,ANA_2 的误差就是等效线性化所产生的误差,本文提供的 DVM 方法避免了繁琐的积分过程,其计算精度与 ANA_2 的相对误差完全一致,因为 DVM 中间没有做其他的近似处理,误差也是仅来源于等效线性化过程,而 R_K 和 SYM 两种数值计算方法都是在离散的频率点进行积分得到的近似解。

在本例中,用积分来求方差的方法,迭代无疑会大量增加计算量,迭代一次就要重新计算一次积分,对于自由度数目较多情况下,每次计算的积分计算量已经不小.这样,在解决实际问题时导致因计算时间太长而不可接受,从而限制了等效线性化方法在工程上的应用,而本文提供的方法能有效克服这一问题。

3.3 两自由度剪切型多自由度 Duffing 系统

其运动微分方程为

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky + G = f(t) \tag{19}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} u_1 k_1 x_1^3 - u_2 k_2 x_2^3 \\ u_2 k_2 x_2^3 \end{bmatrix},$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix},$$
$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

平稳随机激励

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+T) \end{bmatrix}$$

$f_2(t)$ 比 $f_1(t)$ 滞后 $T=0.1\text{ s}$. 它们的自谱密度都是 $S_0=2.5\times10^{-3}\text{ kN}^2\cdot\text{s}$. 系统参数如下:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \text{ t},$$
$$C = \begin{bmatrix} 0.44 & -0.12 \\ -0.12 & 0.26 \end{bmatrix} \text{ t/s},$$
$$K = \begin{bmatrix} 250 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \text{ t/s}^2 \tag{21}$$

可以求得以能量差为基础的等效刚度系数为

$$K_e = K + 2.5 \begin{bmatrix} u_1 k_1 E(x_1^2) & -u_2 k_2 E(x_2^2) \\ -u_2 k_2 E(x_2^2) & u_2 k_2 E(x_2^2) \end{bmatrix} \tag{22}$$

其中

$$E(x_1^2) = E(y_1^2),$$
$$E(x_2^2) = E[(y_2 - y_1)^2] =$$
$$E(y_2^2) + E(y_1^2) - 2E(y_1 y_2).$$

$E(y_2^2), E(y_1^2), E(y_1 y_2)$ 可以通过计算式 (5) 中的 x_s 全部获得,然后通过迭代求得响应的方差值 σ

选取不同大小的 μ 的值,用能量等效线性化对式 (19) 进行线性化,用直接求方差方法分别进行迭代计算,然后用蒙特卡罗方法进行模拟,检验计算精度。

用直接求方差的方法计算结果与蒙特卡罗模拟结果在图 4、图 5 显示中吻合的很好,误差最大处为 2%,误差的主要来源为等效线性化的过程中用以能量差为基础的等效刚度来近似替代非线性项时所产生的误差.计算结果表明本文提供的方法在求解 Duffing 系统随机平稳响应方差的问题时能获得良好的效果,较其他方法具有更好的精度和效率。

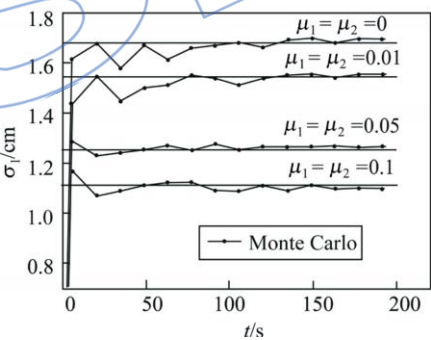


图 4 第一自由度位移方差值

Fig 4 Displacement variance of the 1st degree of freedom (DOF)

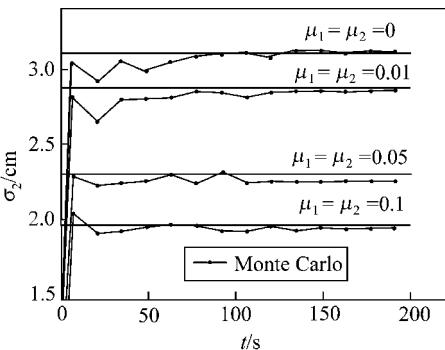


图 5 第二自由度位移方差值

Fig 5 Displacement variance of the 2nd DOF

4 结 论

解李雅普诺夫方程求解随机响应方差有精度高和效率高的优势. 通过扩阶和模态叠加就可以解决具有给定 PSD 的大型有限元结构的平稳随机振动问题. 通过与等效线性化方法的结合来求解杜芬系统的随机振动响应问题非常方便高效且精度高, 对杜芬系统随机振动响应分析有一定实用价值, 也对等效线性化方法向工程的进一步应用有一定帮助. 但对于本质非线性问题, 用等效线性化方法会出现较大误差, 因此, 还需要做更多的工作.

参考文献:

- [1] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 教育出版社, 1998: 158.
- [2] De la Fuente E. An efficient procedure to obtain exact solutions in random vibration analysis of linear structures [J]. Engineering Structures, 2008, 30(11): 2981-2990.
- [3] 傅志方. 振动模态分析与参数辨识[M]. 北京: 机械工业出

版社, 1990.

- [4] Elishakoff I, Zhang X. An appraisal of different stochastic linearization techniques[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 153(2): 370-375.
- [5] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992: 331-337.
- [6] 朱位秋. 非线性随机振动理论的近期进展[J]. 力学进展, 1994, 24(2): 163-173.
ZHU Weiqu. Recent developments in theory of nonlinear random vibration [J]. Advances in Mechanics, 1994, 24(2): 163-173. (in Chinese)
- [7] 罗务揆, 邢誉峰, 杨蓉. 辛算法在随机振动响应求解中的应用[J]. 航空动力学报, 2008, 23(1): 37-43.
LUO Wukui, XING Yufeng, YANG Rong. Application of symplectic geometry algorithm to the calculation of random response of the dynamic system[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(1): 37-43. (in Chinese)
- [8] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 218-219.
- [9] 钟万勰. 一个高效结构随机响应算法系列——虚拟激励法[J]. 自然科学进展——国家重点实验室通讯, 1996, 6(4): 394-401.