

文章编号: 1000-8055(2010)01-0142-06

定时截尾数据回归分析方法

傅惠民, 岳晓蕊

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 提出定时截尾数据回归分析方法, 建立定时截尾数据回归方程, 给出回归系数和标准差的最佳无偏整体估计、百分位值的点估计及其置信限估计. 详细讨论了工程中常见的极值分布、Weibull 分布、正态分布以及一般位置-尺度分布场合下定时截尾数据的回归分析问题. 该方法可以充分利用截尾时刻的试验信息, 并将各个状态下的定时截尾数据作为一个整体进行统计分析, 具有信息量大、精度高的特点, 从而可以在试验时间、经费等有限的情况下对产品进行高精度的寿命预测和可靠性评估.

关 键 词: 定时截尾数据; 回归分析; 极值分布; Weibull 分布; 正态分布; 位置-尺度分布; 可靠性评估

中图分类号: TB301; O211

文献标识码: A

Regression analysis method for type-I censored data

FU Hui-min, YUE Xiao-rui

(Research Center of Small Sample Technology,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Regression analysis method for type-I censored data was presented. The regression equation for type-I censored data was established. The best unbiased integral estimators of the regression coefficients and the standard deviation, the point estimators and confidence intervals of percentiles were given. The regression analysis methods for type-I censored data from extreme distribution, Weibull distribution, normal distribution and location-scale distribution were discussed in detail. As the experimental information at the censoring time and the cross information among test data in different states were fully exploited, the presented method could reach a high precision. The method provides a feasible and effective approach to life prediction and reliability estimation of products when the test time or expense are limited.

Key words: type-I censored data; regression analysis; extreme distribution; Weibull distribution; normal distribution; location-scale distribution; reliability estimation

回归分析在工程中有着广泛的应用, 但传统的回归分析方法只适用于来自正态分布的完全数据, 对于工程中常见的截尾数据情况却无法处理. 然而在高可靠性、长寿命产品的寿命试验中, 由于

受试验时间、经费等限制, 试验常常采取截尾处理, 得到的均为截尾数据. 为此, 文献[1]建立了定数截尾数据线性回归分析方法, 将传统的回归分析推广到定数截尾数据的情况. 文献[2]提出了单

收稿日期: 2009-09-30; **修订日期:** 2009-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(10472006); 北京市教育委员会共建项目(XK100060418)

作者简介: 傅惠民(1956-), 男, 浙江遂昌人, “长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究.

状态定时截尾数据最佳线性无偏估计方法. 本文进一步建立了定时截尾数据回归分析方法, 解决了上述难题.

1 极值分布定时截尾数据回归分析

极值分布是工程中常见的一种分布. 设 y 为服从极值分布的随机变量, 其分布函数为

$$F(y) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\frac{y - \mu(x)}{\sigma} \right] \right\} \quad (1)$$

式中 $\mu(x)$ 为状态 x 下的位置参数, $\sigma > 0$ 为尺度参数. 令 $y^0 = [y - \mu(x)] / \sigma$, 则 y^0 为标准极值分布随机变量. 设 $\mu(x)$ 与 x 之间成线性关系, 即

$$\mu(x) = a + bx \quad (2)$$

则随机变量 y 可表示为

$$y = a + bx + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \text{EV}(0, \sigma) \quad (3)$$

式中 a, b 和 σ 为不依赖于 x 的待定参数.

1.1 参数估计

设在状态 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 下有 n_i 个试样进行定时截尾试验, 到 y_i^* 时刻截止, 共有 $q_i (1 \leq q_i < n_i)$ 个试件失效, 得到定时截尾数据 $y_{i1} \leq y_{i2} \leq \dots \leq y_{iq_i}$, 它们可以看作来自极值分布大小为 n_i 的样本的前 q_i 个顺序统计量 $Y_{i1} \leq Y_{i2} \leq \dots \leq Y_{iq_i}$ 的一个取值. 根据文献[2-3]可知, $y_{i(q_i+1)} = y_i^*$ 可以看作该样本的第 q_i 个区间统计量 $Y_{i(q_i+1)}$ 的一个取值.

由式(3)可知

$$y_{ik} = a + bx_i + \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} \sim \text{EV}(0, \sigma) \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, q_i + 1 \quad (4)$$

根据文献[2-3], 令

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} (y_{ik} - a - bx_i - \sigma u_{ik}) v^{kl} (y_{i\bar{l}} - a - bx_i - \sigma u_{i\bar{l}}) \quad (5)$$

式中

$$[v^{kl}]_{(q_i+1) \times (q_i+1)} = [v_{kl}]_{(q_i+1) \times (q_i+1)}^{-1} \quad (6)$$

且 $u_{ik} (k = 1, 2, \dots, q_i)$ 为标准极值分布大小为 n_i 的样本的第 k 个顺序统计量的均值, $v_{kl} (k, l = 1, 2, \dots, q_i)$ 为标准极值分布大小为 n_i 的样本的第 k 个与第 l 个顺序统计量的协方差, $u_{i(q_i+1)}$ 为标准极值分布大小为 $n_i + 1$ 的样本的第 $q_i + 1$ 个顺序统计量的均值, $v_{k(q_i+1)} = v_{(q_i+1)k} (k = 1, 2, \dots, q_i + 1)$ 为标准极值分布大小为 $n_i + 1$ 的样本的第 k 个

与第 $q_i + 1$ 个顺序统计量的协方差, 均可通过公式计算或查表^[4]得到.

取式(5)中 Q 关于 a, b 和 σ 的偏导, 并令它们等于零, 求解可得参数 a, b 和 σ 的估计值为

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} - \hat{\sigma} \bar{u} \quad (7)$$

$$\hat{b} = \frac{L_{22} L_{1y} - L_{12} L_{2y}}{L_{11} L_{22} - L_{12}^2} \quad (8)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{L_{11} L_{2y} - L_{12} L_{1y}}{L_{11} L_{22} - L_{12}^2} \quad (9)$$

式中

$$\bar{y} = \frac{1}{n^*} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} y_{ik} \quad (10)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n^*} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} u_{ik} \quad (11)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n^*} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} x_i \quad (12)$$

$$n^* = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} \quad (13)$$

$$L_{1y} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} (x_i - \bar{x}) (y_{ik} - \bar{y}) \quad (14)$$

$$L_{2y} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} (u_{ik} - \bar{u}) (y_{i\bar{l}} - \bar{y}) \quad (15)$$

$$L_{11} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} (x_i - \bar{x})^2 \quad (16)$$

$$L_{12} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} (x_i - \bar{x}) (u_{ik} - \bar{u}) \quad (17)$$

$$L_{22} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{kl} (u_{ik} - \bar{u}) (u_{i\bar{l}} - \bar{u}) \quad (18)$$

可以证明, $\hat{a}, \hat{b}$ 和 $\hat{\sigma}$ 是参数 a, b 和 σ 的最佳无偏整体估计. 理论及 Monte Carlo 模拟表明, 当数据总量 $q = \sum_{i=1}^m (q_i + 1)$ 稍大时, 可认为它们近似服从正态分布.

1.2 位置参数与尺度参数的置信限估计

位置参数 $\mu(x) = a + bx$ 的点估计为

$$\hat{\mu}(x) = \hat{a} + \hat{b}x \quad (19)$$

其置信度为 γ 的单侧置信上、下限分别为

$$\mu_{\text{up}}(x) = \hat{a} + \hat{b}x + \frac{\hat{\sigma}_{uy}}{1 - u_{\gamma}^2 c_{33}} \left[u_{\gamma} (c_{13} + c_{23}x) + \sqrt{\omega} \right] \quad (20)$$

$$\mu_{\text{ow}}(x) = \hat{a} + \hat{b}_x + \frac{\hat{\sigma}_{uy}}{1 - u_y^2 C_{33}} \left[u_y (C_{13} + C_{23} x) - \sqrt{\omega} \right] \quad (21)$$

其中

$$\omega = u_y^2 (C_{13} + C_{23} x)^2 + (1 - C_{33} u_y^2) (C_{11} + 2C_{12} x + C_{22} x^2) \quad (22)$$

尺度参数 σ 置信度为 γ 的单侧置信上、下限分别为

$$\sigma_{\text{up}} = \frac{\hat{\sigma}}{1 - u_y \sqrt{C_{33}}} \quad (23)$$

$$\sigma_{\text{ow}} = \frac{\hat{\sigma}}{1 + u_y \sqrt{C_{33}}} \quad (24)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} X_i & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} u_{ik} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} X_i & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} X_i^2 & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} X_i u_{ik} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} u_{ik} & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} X_i u_{ik} & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i+1} v^{ikl} u_{ik} u_{il} \end{bmatrix}^{-1} \quad (25)$$

区间 $[\mu_{\text{ow}}(x), \mu_{\text{up}}(x)]$ 和 $[\sigma_{\text{ow}}, \sigma_{\text{up}}]$ 分别为 $\mu(x)$ 和 σ 置信度为 $2\gamma-1$ 的置信区间,即

$$P\{\mu_{\text{ow}}(x) \leq \mu(x) \leq \mu_{\text{up}}(x)\} = 2\gamma-1 \quad (26)$$

$$P\{\sigma_{\text{ow}} \leq \sigma \leq \sigma_{\text{up}}\} = 2\gamma-1 \quad (27)$$

1.3 百分位值点估计及其置信限估计

随机变量 y 概率为 P 的百分位值 $y_p = \mu(x) + \sigma \ln \ln \frac{1}{1-P}$ 的无偏估计为

$$\hat{y}_p = \hat{a} + \hat{b}_x + \hat{\sigma} \ln \ln \frac{1}{1-P} \quad (28)$$

其置信度为 γ 的单侧置信上、下限分别为

$$y_{\text{Pup}} = \hat{a} + \hat{b}_x + \frac{\hat{\sigma}}{1 - u_y^2 C_{33}} \left[\ln \ln \frac{1}{1-P} + u_y^2 (C_{13} + C_{23} x) + u_y \sqrt{\omega} \right] \quad (29)$$

$$y_{\text{Plow}} = \hat{a} + \hat{b}_x + \frac{\hat{\sigma}}{1 - u_y^2 C_{33}} \left[\ln \ln \frac{1}{1-P} + u_y^2 (C_{13} + C_{23} x) - u_y \sqrt{\omega} \right] \quad (30)$$

式中

$$\omega_p = \omega + C_{33} \left(\ln \ln \frac{1}{1-P} \right)^2 + 2(C_{13} + C_{23} x) \ln \ln \frac{1}{1-P} \quad (31)$$

区间 $[y_{\text{Plow}}, y_{\text{Pup}}]$ 为概率为 P 的百分位值 y_p 置信度为 $2\gamma-1$ 的置信区间,即

$$P\{y_{\text{Plow}} \leq y_p \leq y_{\text{Pup}}\} = 2\gamma-1 \quad (32)$$

2 Weibull 分布定时截尾数据回归分析

设随机变量 t 服从 Weibull 分布,分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t}{\eta(x)} \right]^m \right\}, \quad t > 0 \quad (33)$$

式中 $m > 0$ 为形状参数, $\eta(x) > 0$ 为特征寿命. 令 $y = \ln t$, 则 y 服从极值分布,分布函数见式(1),且

$$\begin{cases} \mu(x) = \ln \eta(x) \\ \sigma = \frac{1}{m} \end{cases} \quad (34)$$

此时, Weibull 分布定时截尾数据回归分析转化为极值分布定时截尾数据回归分析问题进行处理.

3 正态分布定时截尾数据回归分析

设随机变量 y 服从正态分布,分布函数为

$$F(y) = \Phi \left[\frac{y - \mu(x)}{\sigma} \right] \quad (35)$$

式中 $\mu(x)$ 为状态 x 下的均值, σ 为标准差, $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数.

当 $\mu(x)$ 与 x 之间成线性关系时,有

$$y = a + bx + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (36)$$

根据 1.1 节可得到参数 a, b 和 σ 的最佳无偏整体估计,由式(7)~(9)给出,此时, u_{ik}, v_{ikl} 分别表示标准正态分布下相应统计量的均值和协方差,可通过公式计算或查表得到^[5-6].

均值 $\mu(x)$ 和标准差 σ 的点估计及置信度为 γ 的置信限按 1.2 节方法计算. 随机变量 y 概率为 P 的百分位值的点估计及置信度为 γ 的置信限按 1.3 节方法计算,由式(28)~(30)给出,式中 $\ln \ln \frac{1}{1-P}$ 由 $\Phi^{-1}(P)$ 代替.

4 一般位置-尺度分布定时截尾数据回归分析

设随机变量 y 服从位置-尺度分布,分布函数为

$$F\left[\frac{y-\mu(x)}{\sigma}\right], \quad -\infty < y < +\infty \quad (37)$$

式中 $\mu(x)$ 为状态 x 下的位置参数, $\sigma > 0$ 为尺度参数, $F(\cdot)$ 表示位置-尺度分布函数.

当 $\mu(x)$ 与 x 之间成线性关系时,根据 1.1 节可得到待定参数的最佳无偏整体估计,由式(7)~(9)给出,此时, u_{ik}, v_{kl} 分别表示标准位置-尺度分布下相应统计量的均值和协方差.

位置参数 $\mu(x)$ 和尺度参数 σ 的点估计及置信度为 γ 的置信限按 1.2 节方法计算. 随机变量 y 概率为 P 的百分位值的点估计及置信度为 γ 的置信限按 1.3 节方法计算,由式(28)~(30)给出,式中 $\ln\ln\frac{1}{1-P}$ 由 $F^{-1}(P)$ 代替.

5 算 例

5.1 Monte Carlo 模拟算例

设某产品寿命 t 服从 Weibull 分布,形状参数 $m=2$,特征寿命 $\eta(T)$ 与绝对温度 T 有如下关系:

$$\ln \eta(T)=a+b / T$$

式中 $a=-10, b=6000$. 现采用 Monte Carlo 模拟方法在 4 个温度下对产品进行定时截尾试验,具体模拟条件和模拟数据列于表 1.

表 1 Monte Carlo 模拟数据
Table 1 Data of Monte Carlo simulation

序号 i	温度 T_i / K	样本量 n_i	截尾时刻 t_i^* / h	定时截尾数据 t_{ik} / h
1	343	6	1000	883
2	363	6	500	221, 490
3	383	6	300	72, 232, 246, 286
4	403	6	100	29

令 $y=\ln t$, 则 y 服从极值分布 $\text{EV}(\mu(T), \sigma)$, 且 $\mu(T)=\ln \eta(T), \sigma=1 / m$. 采用本文第 1 节方法对其进行回归分析,得到参数 a, b 和 σ 的最佳无偏整体估计分别为

$$\hat{a}=-8.8286, \hat{b}=5608.8130, \hat{\sigma}=0.4651.$$

因此,形状参数 $\mu(T)$ 的无偏估计为

$$\mu(T)=\ln \eta(T)=-8.8286+5608.8130 / T$$

其置信度为 $2\gamma-1=0.9$ 的区间估计列于表 2.

为了便于比较,本文还将表 1 中的定时截尾数据简单看成定数截尾数据,采用定数截尾数据回归分析方法进行分析,所得的 $\mu(T_i)$ 的置信区间估计结果也列于表 2.

由表 2 对比结果可以看出,两种方法所得的 $\mu(T_i)$ 的置信区间都包含其真值,但本文方法所得的各个温度下的置信区间长度都明显较短,也就是说,本文方法计算精度明显较高. 大量 Monte Carlo 模拟证明,在相同的样本量下,本文方法所得的置信区间长度与采用定数截尾数据回归分析所得结果相比,平均可以缩短 20%~40%,有效提高了定时截尾数据的回归分析精度.

表 2 $\mu(T_i)$ 置信区间估计的对比结果($2\gamma-1=0.9$)
Table 2 Comparison results of confidence intervals of $\mu(T_i)$ ($2\gamma-1=0.9$)

$\mu(T_i)$	真值	本文方法		定数截尾数据回归分析方法		区间长度相对差值 $\frac{d_2-d_1}{d_2} \times 100 \%$
		置信区间	区间长度 d_1	置信区间	区间长度 d_2	
$\mu(T_1)$	7.493	[7.0279, 8.3866]	1.3587	[7.0998, 9.2020]	2.1022	35.37
$\mu(T_2)$	6.529	[6.3346, 7.2055]	0.8709	[6.2784, 7.5268]	1.2484	30.24
$\mu(T_3)$	5.666	[5.5490, 6.3125]	0.7635	[5.2907, 6.2787]	0.9880	22.72
$\mu(T_4)$	4.888	[4.6574, 5.6921]	1.0347	[4.0613, 5.4942]	1.4329	27.79

5.2 工程算例

表 3 给出某产品在 4 个不同温度水平下的定时截尾寿命试验数据^[7],它们服从形状参数为 m 、

特征寿命为 $\eta(T)$ 的 Weibull 分布,大量工程经验表明 $\eta(T)$ 与绝对温度 T 有如下关系:

$$\ln \eta(T)=a+b / T$$

表 3 定时截尾寿命试验数据
Table 3 Type-I censored life test data

序号 <i>i</i>	<i>T</i> ₁ = 358 K 寿命/h	<i>T</i> ₂ = 398 K 寿命/h	<i>T</i> ₃ = 423 K 寿命/h	<i>T</i> ₄ = 448 K 寿命/h
1	465	150	41	2
2	776	167	44	3
3	1546	179	48	7
4	2490	192	51	7
5	3000	250	58	8
6	4241	251	69	10
7	5415	270	80	12
8	6107	305	83	13
9	7273	329	101	14
10	> 19930	341	105	16
11	> 19930	372	112	18
12	> 19930	391	129	21
13	> 19930	560	159	31
14	> 19930	630	161	34
15	> 19930	702	176	35
16	> 19930	707	184	40
17	> 19930	754	185	42
18	> 19930	823	190	43
19	> 19930	835	195	48
20	> 19930	> 1097	> 245	50
21	> 19930	> 1097	> 245	56
22	> 19930	> 1097	> 245	75
23	> 19930	> 1097	> 245	> 90
24	> 19930	> 1097	> 245	> 90
25	> 19930	> 1097	> 245	> 90

将表 3 中寿命试验数据进行对数变换,则变换后数据服从位置参数为 $\mu(T) = \ln \eta(T)$ 、尺度参数为 $\sigma = 1/m$ 的极值分布.采用本文第 1 节方法对其进行回归分析,得到参数 a, b 和 σ 的最佳无偏整体估计分别为

$\hat{a} = -22.2157, \hat{b} = 11593, \hat{\sigma} = 0.8543.$

其协方差矩阵为

$\text{Cov} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9700 & -810.5638 & -0.0335 \\ -810.5638 & 335261 & 14.0431 \\ -0.0335 & 14.0431 & 0.0081 \end{bmatrix}$

因此有

$\hat{\eta}(T) = \exp(-22.2157 + 11593/T)$

$\hat{m} = 1/\hat{\sigma} = 1.1705$

温度 T 下位置参数 $\mu(T)$ 和尺度参数 σ 置信度为 γ 的置信上、下限分别为

$\mu_{up}(x) = -22.2157 + 11593/T + \frac{0.8543u_{\gamma}}{1 - 0.0111u_{\gamma}^2} \cdot [u_{\gamma}(-0.0458 + 19.2404/T) + \sqrt{\omega}]$

$\mu_{ow}(x) = -22.2157 + 11593/T + \frac{0.8543u_{\gamma}}{1 - 0.0111u_{\gamma}^2} \cdot [u_{\gamma}(-0.0458 + 19.2404/T) - \sqrt{\omega}]$

$\sigma_{up} = \frac{0.8543}{1 - u_{\gamma} \sqrt{0.0111}}$

$\sigma_{ow} = \frac{0.8543}{1 + u_{\gamma} \sqrt{0.0111}}$

其中

$\omega = u_{\gamma}^2(-0.0458 + 19.2404/T)^2 + (1 - 0.0111u_{\gamma}^2)(2.6991 - 2221/T + 459343/T^2)$

温度 T 下置信度为 γ 、概率为 P 的对数寿命 y_P 的点估计及置信上限、下限分别为

$$\hat{y}_P = -22.2157 + 11593/T + 0.8543 \ln \ln \frac{1}{1-P}$$

$$y_{Pup} = -22.2157 + 11593/T + \frac{0.8543}{1 - 0.0111u_{\gamma}^2} \cdot \left[\ln \ln \frac{1}{1-P} + u_{\gamma}^2(-0.0458 + \frac{19.2404}{T}) + u_{\gamma} \sqrt{\omega_P} \right]$$

$$y_{Pow} = -22.2157 + 11593/T + \frac{0.8543}{1 - 0.0111u_{\gamma}^2} \cdot \left[\ln \ln \frac{1}{1-P} + u_{\gamma}^2(-0.0458 + \frac{19.2404}{T}) - u_{\gamma} \sqrt{\omega_P} \right]$$

式中

$\omega_P = \omega + 0.0111 \left(\ln \ln \frac{1}{1-P} \right)^2 + (-0.0916 + 38.4808/T) \ln \ln \frac{1}{1-P}$

- ### 6 结 论
- 1) 提出一种定时截尾数据回归分析方法,该方法可以充分利用截尾时刻的试验信息,并将各个状态下的定时截尾数据作为一个整体进行统计分析,全面开发利用各个状态下的试验信息,因此具有信息量大、精度高的特点.

2) 详细讨论了工程中常见的极值分布定时

截尾数据回归分析问题,给出回归系数和标准差的最佳无偏整体估计,以及百分位值的点估计及其置信限估计.

3) 建立适用于 Weibull 分布、正态分布以及一般位置-尺度分布的定时截尾数据回归分析方法.

4) 本文方法对个别状态下仅有一个失效数据的情况也能很好地进行处理.

参考文献:

[1] 黄伟,傅惠民. 截尾数据线性回归分析方法[J]. 航空动力学报,2003,18(4):465-469.
HUANG Wei, FU Huimin. Linear regression analysis method for censored data[J]. Journal of Aerospace Power, 2003,18(4):465-469. (in Chinese)

[2] 傅惠民,岳晓蕊. 定时截尾数据最佳线性无偏估计方法[J]. 机械强度,2009,31(6):905-909.
FU Huimin, YUE Xiaorui. Best linear unbiased estimate method for type I censored data[J]. Journal of Mechan-

ical Strength,2009,31(6):905-909. (in Chinese)

[3] 傅惠民. 区间统计量及其分布[J]. 机械强度,2005,27(6):752-757.
FU Huimin. Interval statistic and its distribution[J]. Journal of Mechanical Strength,2005,27(6):752-757. (in Chinese)

[4] Balakrishnan N, Chan P S. Order statistics from extreme value distribution: I - Table of means, variances and covariances[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation,1992,21(4):1199-1217.

[5] Parrish R S. Computing expected values of normal order statistics[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation,1992,21(1):57-70.

[6] Parrish R S. Computing variances and covariances of normal order statistics[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation,1992,21(1):71-101.

[7] 茆诗松,王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京:科学出版社,1997.
MAO Shisong, WANG Lingling. Accelerated life testing [M]. Beijing: Science Press,1997. (in Chinese)