

文章编号: 1000-8055(2010)09-1989-05

高温合金松弛过程回归分析方法

傅惠民, 吴 琼

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 基于线性过程回归分析理论, 建立了高温合金应力松弛过程回归分析方法, 给出了松弛过程的回归方程和高置信水平、高可靠度的单侧置信下限曲线。高温合金松弛过程回归分析方法可以将应力松弛过程作为一个整体进行回归分析, 充分利用了不同时刻剩余应力试验数据间的纵向信息, 具有信息量大、精度高的特点。而且当试样数量较少时, 传统方法得到的剩余应力置信下限曲线可能会发生畸变, 而该方法则可以避免这一现象的发生。工程应用表明, 在试样数相同的情况下, 该方法比传统方法具有更高的精度, 而在精度相同的情况下, 则可减少大量试样。

关 键 词: 高温合金; 应力松弛; 蠕变; 过程回归分析; 小样本; 可靠性

中图分类号: TG113; TB114

文献标识码: A

Regression analysis method for superalloy stress relaxation process

FU Huimin, WU Qiong

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on the linear process regression analysis theory, a regression analysis method for superalloy stress relaxation process was put forward. Then the residual stress regression equation and one-sided lower confidence limit curve with high confidence level and reliability were given. By this method, the stress relaxation process can be analyzed as an integration and the lengthwise information of the residual stresses at different test times is applied, therefore the presented method not only has higher precision but also provides reasonable estimates for small sample sizes. Furthermore, the proposed method can avoid distortion of the relaxation curve in the traditional method especially when the sample size is very small.

Key words: superalloy; stress relaxation; creep; process regression analysis; small sample; reliability

高温合金由于具有优良的高温性能, 广泛应用于航空发动机的热端部件。而应力松弛是紧固件、弹性件等热端部件的主要失效形式之一, 松弛性能是其设计和使用的基础和前提^[1-4]; 并且是否考虑应力松弛作用, 将会导致热端部件的寿命预测结果产生几倍甚至上百倍的差别^[5]。因此, 应力

松弛性能是影响发动机寿命和安全运行的重要因素。另一方面, 应力松弛和蠕变都是材料在高温状态下随时间发生的非弹性变形的积累过程, 是一个问题的两种不同表现形式, 因此, 也可以通过松弛试验来研究长期的蠕变问题^[6-8]。可见, 高温合金应力松弛研究具有重要的理论意义和工程

收稿日期: 2010-05-09; 修订日期: 2010-07-24

基金项目: 国家自然科学基金(10472006); 北京市教育委员会共建项目(XK100060418)

作者简介: 傅惠民(1956-), 男, 浙江遂昌人, “长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究。

价值.

本文通过对大量高温合金应力松弛试验数据的分析和研究,建立了高温合金松弛过程回归分析方法,并给出了高置信水平、高可靠度的单侧置信下限曲线.该方法可以将应力松弛过程作为一个整体进行统计分析,充分开发了不同时刻的剩余应力试验数据间的纵向信息,具有信息量大的特点,在精度相同的情况下可以节省大量试样,而在试验量相同的情况下可显著提高估计的精度.

1 高温合金松弛过程基本模型

高温应力松弛过程可分为两个阶段:第一阶段,在试验开始后的较短时间内,应力急剧下降;第二阶段,应力下降趋于缓慢,这一阶段持续时间较长.由于第一阶段时间较短,发动机热端部件所要求的寿命一般都设定在后一阶段,因此,工程中主要研究应力松弛第二阶段.

1.1 对数剩余应力均值的数学模型

基于全应变理论的 Hook-Norton 模型以应力松弛的第二阶段为研究对象,有着广泛的应用,是一种经典的松弛模型.根据 Hook-Norton 模型,经过一定时间之后,剩余应力 σ_r 与松弛时间 t 的关系可表示为^[1-2]

$$\sigma_r = A t^{-\alpha} \tag{1}$$

其中 A, α 均为常数.

另一种较为常见的应力松弛第二阶段的经验模型为^[3,9-10]

$$\sigma_r = A e^{-at} \tag{2}$$

即认为剩余应力随松弛时间按指数规律减小.

对式(1)取对数得

$$\ln \sigma_r = \ln A - \alpha \ln t \tag{3}$$

令

$$\begin{cases} y = \ln \sigma_r \\ x = \ln t \\ a = \ln A \\ b = -\alpha \end{cases} \tag{4}$$

则有

$$y = a + bx \tag{5}$$

对式(2)取对数,并令

$$\begin{cases} y = \ln \sigma_r \\ x = t \\ a = \ln A \\ b = -a \end{cases} \tag{6}$$

则同样可得到式(5).

可见,式(1)和式(2)分别在双对数坐标和半对数坐标中呈线性.

1.2 对数剩余应力方差的数学模型

通过对高温合金应力松弛试验数据的分析研究发现,在应力松弛的第二阶段,对数剩余应力的分散性一般随松弛时间的增加而增大.由于剩余应力在双对数坐标或半对数坐标中一般为直线,因此,对数剩余应力的方差具有二次函数的形式.

证明:设有 m 条样本函数,每条样本函数都可用直线式(5)近似描述,即对第 i 条样本函数有

$$y_i(x) = a_i + b_i x, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{7}$$

则在 x 时刻的样本方差为

$$s^2(x) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m [y_i(x) - \bar{y}(x)]^2 \tag{8}$$

由于

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i(x) = \bar{a} + \bar{b} x \tag{9}$$

所以

$$\begin{aligned} s^2(x) &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m [a_i - \bar{a} + (b_i - \bar{b})x]^2 = \\ &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (a_i - \bar{a})^2 + \\ &+ \frac{2}{m-1} \sum_{i=1}^m (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b})x + \\ &+ \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (b_i - \bar{b})^2 x^2 \end{aligned} \tag{10}$$

式中

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i \tag{11}$$

$$\bar{b} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_i \tag{12}$$

可见,该随机过程的方差可用二次函数描述.

因此,松弛过程对数剩余应力的方差可以表示为

$$\sigma^2(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 \tag{13}$$

式中 d_0, d_1, d_2 均为待定参数.

由此可知,无论用式(1)还是用式(2)描述应力松弛过程,对数剩余应力的均值和方差都可用式(5)和式(13)表示.

1.3 应力松弛过程回归模型

对数剩余应力一般服从正态分布,而且通过大量高温合金应力松弛试验数据的分析研究发现,同一试样不同时刻的剩余应力具有较强的相关性,但其对数增量相互独立.因此,高温合金应

力松弛过程属于文献[11]提出的线性过程。

根据文献[11]及式(5)、式(13), 高温合金应力松弛过程可表示为

$$y = a + bx + \varepsilon(x) \quad (14)$$

$$\varepsilon(x) \sim N(0, d_0 + d_1x + d_2x^2) \quad (15)$$

其中 a, b, d_0, d_1, d_2 均为待定参数, 且 $d_0 \geq 0, d_2 \geq 0$ 。

2 高温合金松弛过程回归分析方法

根据文献[11], 为了便于工程应用, 高温合金应力松弛过程式可写成如下形式:

$$y = a + bx + \varepsilon(x) \quad (16)$$

$$\varepsilon(x) \sim N(0, \sigma_1^2 + \Delta\sigma^2) \quad (17)$$

式中

$$\Delta\sigma^2 = (x - x_1)I\left[\frac{x + x_1}{2}\right]\sigma_0^2 \quad (18)$$

$$I(x) = 1 + \theta(x - \bar{x}) \quad (19)$$

其中 $a, b, \sigma_1 \geq 0, \theta \geq 0, \sigma_0 \geq 0$ 均为待定参数, $\bar{x}$ 和 x_1 为常数。

设共有 m 个高温合金试样进行应力松弛试验, 在 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 时刻测得第 i 个试样的剩余应力分别为 $\alpha_i(t_1), \alpha_i(t_2), \dots, \alpha_i(t_n), i = 1, 2, \dots, m$, 则通过式(4)或式(6), 可将其变换为双对数坐标或半对数坐标中的一组数据 $(x_j, y_{ij}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。根据文献[11]建立的线性过程回归分析方法, 可以求得 $a, b, \sigma_0^2, \sigma_1^2$ 和 θ 的估计量分别为

$$\hat{a} = \bar{y}_1 - \hat{b}x_1 \quad (20)$$

$$\hat{b} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \quad (21)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{v} \left(l_{yy} - \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}} \right) \quad (22)$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{i1} - \bar{y}_1)^2 \quad (23)$$

$$E(\theta) = 2 \frac{l_{xy}}{l_{xx}} l_{xy0} - \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}^2} l_{xx0} - l_{yy0} +$$

$$\frac{n^* + v - m(n-1)}{v} \left(l_{yy} - \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}} \right) = 0 \quad (24)$$

式中 v 为 $\hat{\sigma}_0^2$ 的自由度, 当 $\theta \neq 0$ 时, $v = m(n-1) - 2$, 当 $\theta = 0$ 时, $v = m(n-1) - 1$, 并且

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \quad (25)$$

$$\bar{x}_j = \frac{x_j + x_{j-1}}{2} \quad (26)$$

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \quad (27)$$

$$\Delta y_{ij} = y_{ij} - y_{i(j-1)} \quad (28)$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{i1} \quad (29)$$

$$\overline{\Delta y_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Delta y_{ij} \quad (30)$$

$$\overline{\Delta^2 y_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\Delta y_{ij})^2 \quad (31)$$

$$n^* = m \sum_{j=2}^n \frac{1}{I(\bar{x}_j)} \quad (32)$$

$$l_{xx} = m \sum_{j=2}^n \frac{\Delta x_j}{I(\bar{x}_j)} \quad (33)$$

$$l_{yy} = m \sum_{j=2}^n \frac{\overline{\Delta^2 y_j}}{\Delta x_j I(\bar{x}_j)} \quad (34)$$

$$l_{xy} = m \sum_{j=2}^n \frac{\overline{\Delta y_j}}{I(\bar{x}_j)} \quad (35)$$

$$l_{xx0} = m \sum_{j=2}^n \frac{\Delta x_j}{I^2(\bar{x}_j)} \quad (36)$$

$$l_{yy0} = m \sum_{j=2}^n \frac{\overline{\Delta^2 y_j}}{\Delta x_j I^2(\bar{x}_j)} \quad (37)$$

$$l_{xy0} = m \sum_{j=2}^n \frac{\overline{\Delta y_j}}{I^2(\bar{x}_j)} \quad (38)$$

求解时首先可由式(23)求得 $\hat{\sigma}_1^2$, 由式(24)求得 θ , 然后再由式(20)~式(22)得到估计值 $\hat{a}, \hat{b}$ 和 $\hat{\sigma}_0^2$ 。式(24)需迭代求解, 由于 $E(\theta)$ 具有如下性质, 设 θ_0 为 θ 的预估值, 则当 $\theta_0 < \theta$ 时, $E(\theta_0) > 0$, 当 $\theta_0 > \theta$ 时, $E(\theta_0) < 0$, 且

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{x - x_1} \quad (39)$$

所以, 可以方便地由二分法求得 θ 。

于是, 回归方程可由下式给出

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \quad (40)$$

方差的估计量为

$$\hat{\sigma}^2(x) = \hat{\sigma}_1^2 + \Delta\hat{\sigma}^2 \quad (41)$$

$$\Delta\hat{\sigma}^2 = (x - x_1)I\left[\frac{x + x_1}{2}\right]\hat{\sigma}_0^2 \quad (42)$$

线性相关系数为

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}(l_{yy} - \hat{l}_{yy})}} \quad (43)$$

式中

$$\hat{l}_{yy} = m \sum_{j=2}^n \frac{\overline{\Delta^2 y_j} - \overline{\Delta y_j}^2}{\Delta x_j I(\bar{x}_j)} \quad (44)$$

3 高温合金松弛过程的置信限曲线

根据文献[11]可知,高温合金应力松弛过程可靠度为 R 的对数剩余应力曲线由下式给出

$$\hat{y}_R(x) = \hat{a} + \hat{b}x - u_R \sqrt{c_1 x^2 + c_2 x + c_3} \tag{45}$$

式中

$$c_1 = \frac{1}{2} \theta \sigma_0^2 k^2(\nu) \tag{46}$$

$$c_2 = (1 - \theta \bar{x}) \hat{\sigma}_0^2 k^2(\nu) \tag{47}$$

$$c_3 = \hat{\sigma}_1^2 k^2(m - 1) - x_1 I(x_1/2) \hat{\sigma}_0^2 k^2(\nu) \tag{48}$$

$$k(\nu) = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \tag{49}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数,当 $\nu \geqslant 5$ 时, $k(\nu) \approx \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\nu}}$.

高温合金应力松弛过程置信水平为 γ 、可靠度为 R 的对数剩余应力单侧置信下限曲线由下式给出^[11]

$$y_{Plow}(x) = \hat{a} + \hat{b}x - k_R(x) \beta \hat{\sigma}(x) \tag{50}$$

式中

$$k_R(x) = \frac{u_R + u_\gamma}{1 - \frac{u_\gamma^2}{w}} \frac{\frac{1}{m^*} \left(1 - \frac{u_\gamma^2}{w} \right) + \frac{u_R^2}{w}}{\frac{1}{m^*} \left(1 - \frac{u_\gamma^2}{w} \right) + \frac{u_R^2}{w}} \tag{51}$$

$$\frac{1}{m^*} = \max \left\{ \frac{1}{m}, (x - x_1) I^1 \left(\frac{x + x_1}{2} \right) I_{xx}^1 \right\} \tag{52}$$

$$\frac{1}{w} = \beta^2 - 1 \tag{53}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2 k^2(m - 1) + \Delta \hat{\sigma}^2 k^2(\nu)}{\hat{\sigma}_1^2 + \Delta \hat{\sigma}^2}} \tag{54}$$

由于 $k_R^2(x) \beta^2 \hat{\sigma}^2(x)$ 可以很好地用二次函数 $\hat{c}_1 x^2 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3$ 拟合,其中的系数亦可直接采用 EXCEL 中的多项式拟合得到.因此,式(50)可近似表示为

$$y_{Plow}(x) = \hat{a} + \hat{b}x - \sqrt{\hat{c}_1 x^2 + \hat{c}_2 x + \hat{c}_3} \tag{55}$$

同样,文献[11]式(50)中的 $k_{1-P}^2(x) \beta^2 \hat{\sigma}^2(x)$ 也可以很好地用二次函数近似.

此外,高温合金应力松弛过程可靠寿命和可靠度的点估计和置信限曲线可根据文献[11]方法求得.

4 应用实例

GH145 合金是具有良好的高温性能的镍基合金,主要用于航空发动机的热端部件,表 1 给出了 GH145 合金的一组应力松弛数据^[12].

表 1 GH145 合金应力松弛试验数据
Table 1 Residual stress data for superalloy GH145

时间 t/h	剩余应力 σ_r/MPa				
	1	2	3	4	5
8	294	296	293	300	296
24	293	294	290	298	294
56	289	291	290	296	292
120	289	290	289	296	291
240	288	289	289	296	291
500	288	287	288	296	290
1000	287	288	288	296	289
2000	287	285	288	296	289
3000	287	283	287	295	288
5000	286	283	285	296	287
10000	285	278	284	295	286

采用本文方法对表 1 中数据进行处理,可以得到 GH145 合金应力松弛过程在双对数坐标中的回归方程为

$$\hat{y} = 5.7004 - 0.0052x$$

于是, GH145 合金的松弛曲线为

$$\hat{\sigma}_r(t) = 298.9807 t^{-0.0052}$$

根据式(41)和式(42), GH145 合金对数剩余应力方差的估计量为

$$\hat{\sigma}^2(t) = 6.0342 + 0.2837 \ln t + 0.1331 \ln^2 t$$

根据式(50)和式(55), GH145 合金置信水平为 90%、可靠度为 99% 的对数剩余应力单侧置信下限曲线可以近似表示为

$$y_{Plow}(t) = 5.7004 - 0.0052 \ln t - (1.9759 \times 10^{-5} \ln^2 t - 5.7226 \times 10^{-5} \ln t + 1.9044 \times 10^{-3})^{\frac{1}{2}}$$

如图 1 所示.同时,采用传统方法对表 1 中数据进行处理,可以得到各个试验时刻 GH145 合金对数剩余应力置信水平为 90%、可靠度为 99% 单侧置信下限值,亦在图 1 中给出.

从图 1 看出,除第一个测试点外,传统方法得到的单侧置信下限要小于本文方法计算结果,而且在 3 000 h 时传统方法得到的置信下限发生了

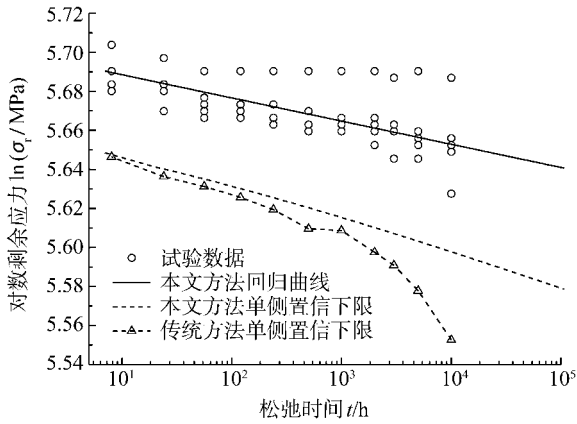


图1 GH 145 合金剩余应力随时间变化的
单侧置信下限

Fig.1 One sided lower confidence limits for residual
stress of superalloy GH 145

畸变。这是因为试样很少,传统方法的单侧容限系数 $|k_R|$ 较大,而且随着试验时间的增加,剩余应力逐渐减小,分散性逐渐增大,使得传统方法的单侧置信下限急剧下降。而本文方法由于充分利用了不同时刻应力松弛试验数据间的纵向信息,从而能够得到比较小的 $|k_R|$ 值,具有更高的精度。

5 结 论

1) 建立了高温合金应力松弛过程回归分析方法,该方法可以将所有测试时刻的剩余应力试验数据作为一个整体进行统计推断,充分利用了不同时刻剩余应力间的纵向信息,具有信息量大、精度高的特点。

2) 本文方法由于充分考虑了不同时刻剩余应力间的相关性,以及对数剩余应力方差的变化情况,因此,可以对高温合金的应力松弛过程进行很好的描述。

3) 建立了高温合金松弛过程的回归方程,给出了其高置信水平、高可靠度的单侧置信下限曲线,可以满足工程可靠性评估需求。

4) 本文方法能够有效避免传统方法因试样少而经常发生的剩余应力置信下限曲线畸变的情况。

5) 本文方法在精度相同的情况下,可以比传统方法减少大量试验工作量。

6) 本文方法适用于各个样本函数的测试时间均相同的情况,对于不完全相同的情况可按文献[11]方法处理。

参考文献:

[1] 平修二. 金属材料的高温强度理论·设计[M]. 郭廷玮, 李

安定, 徐介平, 译. 北京: 科学出版社, 1983.

- [2] 郭进全, 轩福贞, 何磊. 螺栓材料 1Cr10NiMoW2VNbN 的应力松弛行为及预测模型[J]. 核动力工程, 2008, 29(6): 119-124.
GUO Jinqun, XUAN Fuzhen, HE Lei. Stress relaxation performance and prediction models for bolt material of 1Cr10NiMoW2VNbN [J]. Nuclear Power Engineering, 2008, 29(6): 119-124. (in Chinese)
- [3] 金尧, 魏楠. 金属高温应力松弛行为研究[J]. 机械强度, 1997, 9(3): 57-63.
JIN Yao, WEI Nan. Research on stress relaxation of metals at elevated temperature [J]. Journal of Mechanical Strength, 1997, 9(3): 57-63. (in Chinese)
- [4] 高鹏, 陆山. 考虑应力松弛的涡轮盘蠕变持久寿命可靠性分析方法[J]. 机械科学与技术, 2007, 26(11): 1458-1461.
GAO Peng, LU Shan. A method for creep rupture life reliability analysis of a turbine disc with the influence of stress relaxation considered [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2007, 26(11): 1458-1461. (in Chinese)
- [5] 周柏卓, 丛佩红, 王维岩, 等. 考虑蠕变和应力松弛的发动机高温构件寿命分析方法[J]. 航空动力学报, 2003, 18(3): 378-382.
ZHOU Baizhuo, CONG Peihong, WANG Weiyan, et al. Life prediction considering creep and stress relaxation for gas turbine engine hot section [J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(3): 378-382. (in Chinese)
- [6] Woodford D A. Stress relaxation testing of service exposed IN738 for creep strength evaluation [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2000, 122(7): 451-456.
- [7] Bose S C, Kulvir S, Swaminathan J, et al. Prediction of creep life of X10CrMoVNbN-91 (P-91) steel through short term stress relaxation test methodology [J]. Materials Science and Technology, 2004, 20(5): 1290-1296.
- [8] 郭进全, 轩福贞, 王正东, 等. 基于短时应力松弛试验的蠕变行为预测方法[J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(11): 92-95.
GUO Jinqun, XUAN Fuzhen, WANG Zhengdong, et al. Creep performance prediction method through short term stress relaxation tests [J]. Proceedings of the CSEE, 2009, 29(11): 92-95. (in Chinese)
- [9] 杨宜科, 吴天禄, 江先美, 等. 金属高温强度及试验[M]. 上海: 上海科技出版社, 1986.
- [10] 姜伟之, 赵时熙. 工程材料的力学性能[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1991.
- [11] 傅惠民, 吴琼. 线性过程回归分析[J]. 机械强度, 2010, 32(4): 600-605.
FU Huimin, WU Qiong. Regression analysis method for linear process [J]. Journal of Mechanical Strength, 2010, 32(4): 600-605. (in Chinese)
- [12] 机械工程材料性能数据手册编委会. 机械工程材料性能数据手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 1994.