

文章编号: 1000-8055(2010)12-2728-20

基于小波奇异分析的流场计算方法及应用

王保国¹, 吴俊宏¹, 朱俊强^{1,2}

(1. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081;

2. 中国科学院 工程热物理研究所, 北京 100190)

摘 要: 首次将三维小波以及二维小波奇异性分析的思想引进三维以及二维复杂流场的数值计算, 发展了一种高效率、高精度、高分辨率的方法. 该算法的核心是获取流场中物理量在不同空间点的 Hölder 指数 α , 而该指数 α 的获取又依赖于小波变换以及高维(即二维或三维)小波分析技术. 在三维与二维欧氏空间中, 为进行小波多分辨分析, 需要在尺度空间与小波空间分别引进尺度基与小波基. 对二维问题, 尺度基与小波基的基底要由 1 个尺度函数与 3 个小波函数组成, 而三维时要由 1 个尺度函数和 7 个小波函数组成. 借助于小波奇异分析所找到的流场中奇异点区域与光滑区域, 便可分别选用高分辨率、高精度的 WENO(weighted essential non-oscillatory)格式与高精度中心差分格式进行流场的离散求解. 一系列二维(即, ①二维前台阶问题的 Euler 流; ②二维双马赫反射的 Euler 流; ③著名的二维 Riemann 问题; ④跨声速 RAE2822 翼型二维绕流; ⑤跨声速 VKI-LS 59 二维涡轮叶栅绕流)与三维(即, ⑥跨声速轴流压气机转子 NASA(National Aeronautics and Space Administration) Rotor 37 三维黏性绕流; ⑦跨声速风扇转子 NASA Rotor 67 三维黏性绕流)算例表明: 该方法的计算效率比传统的 WENO 格式有较大的提高, 大部分典型算例能够提高 3~5 倍, 而且可以获取复杂流场中高分辨率的激波结构以及涡系分布, 可以得到与有关实验数据较为吻合的数值结果.

关 键 词: 三维小波; 二维小波; 奇异分析; 多分辨分析;

高精度 WENO (weighted essential non-oscillatory) 格式

中图分类号: V231.3

文献标识码: A

Method based on wavelet singularity analysis for complicated flow and its application

WANG Bao-guo¹, WU Jun-hong¹, ZHU Jun-qiang^{1,2}

(1. School of Aerospace Engineering,

Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Institute of Engineering Thermophysics,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Three-dimensional and two-dimensional wavelet singularity analysis was introduced in complicated flow and a high-order, high-resolution numerical method was developed. The core of this new method is the analysis of Hölder exponent α of complicated flow. The Hölder exponent α depends on wavelet transform and multi-dimensional wavelet analysis. In order to complete the multi-resolution analysis in two-dimensional and three-dimensional Euclidean space, scale basis and wavelet basis have been introduced in scale space and wavelet space. For two-dimensional and three-dimensional cases, scale basis and wavelet basis were constructed by one scale function and by three wavelet functions and seven wavelet functions respectively. High-resolution, high-order WENO (weighted essential non-oscillatory) scheme and high-order central difference scheme can be chosen adaptively according

收稿日期: 2010-06-04; 修订日期: 2010-09-08

基金项目: 国家自然科学基金(50376004); 高等学校博士学科点专项基金(20030007028)

作者简介: 王保国(1947—), 男, 山东临清人, 教授、博士生导师, 博士, 研究领域为计算流体力学, 气动热力学.

to the results of wavelet singularity analysis. A series of examples in two-dimensional ((1) forward facing step problem, (2) double Mach reflection of a strong shock problem, (3) two-dimensional Riemann problem, (4) two-dimensional transonic flow past RAE2822 air-foil problem, (5) two-dimensional transonic VKI-LS 59 turbine cascade flow problem) and three-dimensional ((6) transonic axial compressor, NASA (National Aeronautics and Space Administration) Rotor 37 three-dimensional viscous flow and (7) NASA Rotor 67 three-dimensional viscous flow) were computed. The computation results have been compared with the experiment results in related references and showed that this new numerical method can not only improve the computation efficiency significantly (the efficiency can be increased by 3~5 times for most examples), but also capture the shock with high-resolution and vortices with an acceptable order.

Key words: three-dimensional wavelet; two-dimensional wavelet; singularity analysis; multi-resolution analysis; high-order WENO (weighted essential non-oscillatory) scheme

随着高性能高负荷叶轮机械以及各类飞行器的飞速发展,叶轮机内以及高速气流绕各类飞行器的三维流动愈来愈复杂,湍流与激波间的相互作用、各种涡系之间的相互作用愈来愈严重,多尺度物理流动问题已成为现代流场计算时必须考虑的主要因素之一. 对于流场中多尺度问题,近 20 年发展起来的小波分析方法^[1-2]具有独特的优势;对于捕捉激波间断以及滑移面问题,TVD(total variation diminishing),ENO(essential non-oscillatory),WENO(weighted essential non-oscillatory)等高分辨率格式^[3-6]已在复杂流场的计算中发挥了重要作用;对于湍流的计算问题^[7-8],则采用高精度格式显得格外重要^[6]. 然而,无论是采用高分辨率格式,还是采用高精度格式,计算时都会占用较多的 CPU(central processing unit)时间,因此如何提高计算效率便成为一个迫切要解决的难题. 本文提出了一种新的流场计算方法,它从小波多分辨奇异分析出发,将高阶 WENO 格式与高阶中心差分格式巧妙的结合起来,典型的 7 个数值算例都显示了本文所提出新方法的有效性与可行性.

1 小波多分辨奇异分析的理论基础

1.1 在多维空间中 Hölder 指数的计算

在复杂流场中,为了分析空间各点任意一个物理量的奇异性,常引进 Hölder 指数(也可用 Lipschitz 指数)的概念^[1]. 以二维空间为例,令流场中任意一物理量可以用函数 $f(x, y)$ 表达,并在 (x_0, y_0) 具有局部 Hölder 指数 α ,即

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)| \leq A(h^2+k^2)^{\alpha/2} \quad (1)$$

式中 $\sqrt{h^2+k^2}$ 是点 (x_0, y_0) 邻域内的一个小量, A 为常数. 注意到小波变换系数的模 $Mf(s, x, y)$ 与函数 $f(x, y)$ 的 Hölder 指数 α 间的关系

$$|Mf(s, x, y)| \leq Ks^\alpha \quad (2)$$

式中 $Mf(s, x, y)$ 为小波变换系数的模, s 为伸缩因子, $\tilde{K}$ 为常数. 这里应指出的是,直接利用式(2)去确定 Hölder 指数 α 并不是件容易的事,为此引进小波变换模极大值 $r_{i,j}^k$ 的概念,今以二进小波进行离散,即伸缩因子 s 取为 2^k , 并令 $x = i\Delta x, y = j\Delta y$, 为方便下文叙述,将离散后小波变换系数的模简记为 $Mf(2^k, i, j)$, 于是小波变换模极大值为

$$r_{i,j}^k = \max_{\substack{i-2^k \leq m \leq i+2^k \\ j-2^k \leq n \leq j+2^k}} |Mf(2^k, m, n)| \leq \tilde{K}2^{k\alpha} \quad (3)$$

或者

$$\log_2(r_{i,j}^k) \leq k\alpha + \log_2(\tilde{K}) \quad (4)$$

式中小写字母 k 代表与伸缩因子有关的参数, $[-p, q] \times [-p', q']$ 为母小波函数的紧支集. 这里式(4)便为本文所要计算的 Hölder 指数 α 的主要表达式.

1.2 二维张量积小波分析

在二维空间中考虑多分辨分析 $\{V_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 这里闭子空间 V_k^2 的分辨率为 2^k ; 由于 $V_k^2 \subset V_{k-1}^2$, 令 W_k^2 是 V_k^2 在 V_{k-1}^2 空间上的正交补空间, 于是二维张量积小波的多分辨分析便可由下面的张量积组成:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k^2 &= \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_k \\ \mathbf{W}_k^2 &= (\mathbf{V}_k \otimes \mathbf{W}_k) \oplus (\mathbf{W}_k \otimes \mathbf{V}_k) \oplus (\mathbf{W}_k \otimes \mathbf{W}_k) \end{aligned} \quad (5)$$

显然,式(5)表明了小波空间 $\mathbf{W}_k^2$ 是由如下3个小波基所构成,即

$$\begin{cases} \psi^1(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \\ \psi^2(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \\ \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y) \end{cases} \quad (6)$$

或者

$$\begin{cases} \psi_{i,j}^{1,k}(x, y) = 2^{-k}\varphi(2^{-k}x - i)\psi(2^{-k}y - j) \\ \psi_{i,j}^{2,k}(x, y) = 2^{-k}\psi(2^{-k}x - i)\varphi(2^{-k}y - j) \\ \psi_{i,j}^{3,k}(x, y) = 2^{-k}\psi(2^{-k}x - i)\psi(2^{-k}y - j) \end{cases} \quad (7)$$

这里, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别为一维空间中小波的尺度函数和小波函数,例如文献[9-10]给出了 Dau-

bechies 小波的构造形式. 令 ψ^1, ψ^2 和 ψ^3 分别代表相关的小波函数,如果令 $W^{\psi^1}f(s, x, y), W^{\psi^2}f(s, x, y)$ 和 $W^{\psi^3}f(s, x, y)$ 分别代表对函数 $f(x, y)$ 和相应的小波进行变换,其表达式为

$$\begin{cases} W^{\psi^1}f(s, x, y) \equiv (f * \psi_s^1) = \frac{1}{s} \iint f(\bar{u}, \bar{v}) \psi^1\left(\frac{x-\bar{u}}{s}, \frac{y-\bar{v}}{s}\right) d\bar{u}d\bar{v} \\ W^{\psi^2}f(s, x, y) \equiv (f * \psi_s^2) = \frac{1}{s} \iint f(\bar{u}, \bar{v}) \psi^2\left(\frac{x-\bar{u}}{s}, \frac{y-\bar{v}}{s}\right) d\bar{u}d\bar{v} \\ W^{\psi^3}f(s, x, y) \equiv (f * \psi_s^3) = \frac{1}{s} \iint f(\bar{u}, \bar{v}) \psi^3\left(\frac{x-\bar{u}}{s}, \frac{y-\bar{v}}{s}\right) d\bar{u}d\bar{v} \end{cases} \quad (8)$$

而这时上述小波变换系数的模为

$$Mf(s, x, y) \equiv \sqrt{|W^{\psi^1}f(s, x, y)|^2 + |W^{\psi^2}f(s, x, y)|^2 + |W^{\psi^3}f(s, x, y)|^2} \quad (9)$$

注意式(8)中符号 $f * \psi_s^1, f * \psi_s^2$ 和 $f * \psi_s^3$ 表示相应的卷积,而式(9)中 $|W^{\psi^1}f(s, x, y)|$ 表示 $W^{\psi^1}f(s, x, y)$ 的模. 将 s 取为 2^k , 以二进小波进行离散,并将离散后的小波变换系数和小波变换系数

的模分别简记为 $W^{\psi^1}f(2^k, i, j)$ 和 $Mf(2^k, i, j)$, 因此这时二维张量积小波变换系数的递推关系式以及小波变换系数模的表达式为

$$\begin{cases} W^{\Phi}f(2^k, i, j) = \sum_m \sum_n h_m h_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i + 2^{k-1}m, j + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^1}f(2^k, i, j) = \sum_m \sum_n h_m g_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i + 2^{k-1}m, j + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^2}f(2^k, i, j) = \sum_m \sum_n g_m h_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i + 2^{k-1}m, j + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^3}f(2^k, i, j) = \sum_m \sum_n g_m g_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i + 2^{k-1}m, j + 2^{k-1}n) \\ Mf(2^k, i, j) = \sqrt{|W^{\psi^1}f(2^k, i, j)|^2 + |W^{\psi^2}f(2^k, i, j)|^2 + |W^{\psi^3}f(2^k, i, j)|^2} \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\{h_m\}$ 和 $\{g_m\}$ 分别表示一维情况下的低通小波滤波器系数和高通小波滤波器系数;另外,这里 Φ 为二维空间中的尺度函数.

1.3 三维张量积小波分析

在三维空间中考虑多分辨率分析 $\{\mathbf{V}_k^3\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 这里闭子空间 $\mathbf{V}_k^3$ 的分辨率为 2^k ; 由于 $\mathbf{V}_k^3 \subset \mathbf{V}_{k-1}^3$, 令 $\mathbf{W}_k^3$ 是 $\mathbf{V}_k^3$ 在 $\mathbf{V}_{k-1}^3$ 空间上的正交补空间,于是三维张量积小波的多分辨率分析便可由下面的张量积组成:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k^3 &= \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_k \\ \mathbf{W}_k^3 &= (\mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{W}_k) \oplus (\mathbf{V}_k \otimes \mathbf{W}_k \otimes \mathbf{V}_k) \oplus \\ &(\mathbf{W}_k \otimes \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_k) \oplus (\mathbf{W}_k \otimes \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_k) \oplus \\ &(\mathbf{W}_k \otimes \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{W}_k) \oplus (\mathbf{W}_k \otimes \mathbf{W}_k \otimes \mathbf{V}_k) \oplus \\ &(\mathbf{W}_k \otimes \mathbf{W}_k \otimes \mathbf{W}_k) \end{aligned} \quad (11)$$

显然,式(11)表明了小波空间 $\mathbf{W}_k^3$ 是由如下7个小波基所构成,即

$$\begin{cases} \psi^1(x, y, z) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) \\ \psi^2(x, y, z) = \varphi(x)\psi(y)\varphi(z) \\ \psi^3(x, y, z) = \varphi(x)\psi(y)\psi(z) \\ \psi^4(x, y, z) = \psi(x)\varphi(y)\varphi(z) \\ \psi^5(x, y, z) = \psi(x)\varphi(y)\psi(z) \\ \psi^6(x, y, z) = \psi(x)\psi(y)\varphi(z) \\ \psi^7(x, y, z) = \psi(x)\psi(y)\psi(z) \end{cases} \quad (12)$$

或者

$$\begin{cases} \psi_{i_1, i_2, i_3}^{1, k}(x, y, z) = 2^{-3k/2} \varphi(2^{-k}x - i_1) \varphi(2^{-k}y - i_2) \psi(2^{-k}z - i_3) \\ \psi_{i_1, i_2, i_3}^{2, k}(x, y, z) = 2^{-3k/2} \varphi(2^{-k}x - i_1) \psi(2^{-k}y - i_2) \varphi(2^{-k}z - i_3) \\ \psi_{i_1, i_2, i_3}^{3, k}(x, y, z) = 2^{-3k/2} \varphi(2^{-k}x - i_1) \psi(2^{-k}y - i_2) \psi(2^{-k}z - i_3) \\ \psi_{i_1, i_2, i_3}^{4, k}(x, y, z) = 2^{-3k/2} \psi(2^{-k}x - i_1) \varphi(2^{-k}y - i_2) \varphi(2^{-k}z - i_3) \\ \psi_{i_1, i_2, i_3}^{5, k}(x, y, z) = 2^{-3k/2} \psi(2^{-k}x - i_1) \varphi(2^{-k}y - i_2) \psi(2^{-k}z - i_3) \\ \psi_{i_1, i_2, i_3}^{6, k}(x, y, z) = 2^{-3k/2} \psi(2^{-k}x - i_1) \psi(2^{-k}y - i_2) \varphi(2^{-k}z - i_3) \\ \psi_{i_1, i_2, i_3}^{7, k}(x, y, z) = 2^{-3k/2} \psi(2^{-k}x - i_1) \psi(2^{-k}y - i_2) \psi(2^{-k}z - i_3) \end{cases} \quad (13)$$

这里, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别为一维空间中小波的尺度函数和小波函数, 例如文献[9-10]给出了 Daubechies 小波的构造形式. 令 $\psi^1, \dots, \psi^7$ 分别代表相关的小波函数, $W^{\psi^1}f(s, x, y, z), \dots, W^{\psi^7}f(s, x, y, z)$ 分别代表对函数 $f(x, y, z)$ 和相应的小波进行变换, 其表达式为

$$\begin{aligned} W^{\psi^1}f(s, x, y, z) &\equiv (f * \psi_s^1) = \\ &\frac{1}{s^{3/2}} \iint f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{t}) \psi^1 \left(\frac{x-\tilde{u}}{s}, \frac{y-\tilde{v}}{s}, \frac{z-\tilde{t}}{s} \right) d\tilde{u} d\tilde{v} d\tilde{t} \\ W^{\psi^2}f(s, x, y, z) &\equiv (f * \psi_s^2) = \\ &\frac{1}{s^{3/2}} \iint f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{t}) \psi^2 \left(\frac{x-\tilde{u}}{s}, \frac{y-\tilde{v}}{s}, \frac{z-\tilde{t}}{s} \right) d\tilde{u} d\tilde{v} d\tilde{t} \\ W^{\psi^3}f(s, x, y, z) &\equiv (f * \psi_s^3) = \\ &\frac{1}{s^{3/2}} \iint f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{t}) \psi^3 \left(\frac{x-\tilde{u}}{s}, \frac{y-\tilde{v}}{s}, \frac{z-\tilde{t}}{s} \right) d\tilde{u} d\tilde{v} d\tilde{t} \\ W^{\psi^4}f(s, x, y, z) &\equiv (f * \psi_s^4) = \\ &\frac{1}{s^{3/2}} \iint f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{t}) \psi^4 \left(\frac{x-\tilde{u}}{s}, \frac{y-\tilde{v}}{s}, \frac{z-\tilde{t}}{s} \right) d\tilde{u} d\tilde{v} d\tilde{t} \\ W^{\psi^5}f(s, x, y, z) &\equiv (f * \psi_s^5) = \\ &\frac{1}{s^{3/2}} \iint f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{t}) \psi^5 \left(\frac{x-\tilde{u}}{s}, \frac{y-\tilde{v}}{s}, \frac{z-\tilde{t}}{s} \right) d\tilde{u} d\tilde{v} d\tilde{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{\psi^6}f(s, x, y, z) &\equiv (f * \psi_s^6) = \\ &\frac{1}{s^{3/2}} \iint f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{t}) \psi^6 \left(\frac{x-\tilde{u}}{s}, \frac{y-\tilde{v}}{s}, \frac{z-\tilde{t}}{s} \right) d\tilde{u} d\tilde{v} d\tilde{t} \\ W^{\psi^7}f(s, x, y, z) &\equiv (f * \psi_s^7) = \\ &\frac{1}{s^{3/2}} \iint f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{t}) \psi^7 \left(\frac{x-\tilde{u}}{s}, \frac{y-\tilde{v}}{s}, \frac{z-\tilde{t}}{s} \right) d\tilde{u} d\tilde{v} d\tilde{t} \end{aligned} \quad (14)$$

同二维情况类似, 这时小波变换系数的模为

$$Mf(s, x, y, z) \equiv \sqrt{|W^{\psi^1}f(s, x, y, z)|^2 + \dots + |W^{\psi^7}f(s, x, y, z)|^2} \quad (15)$$

注意式(14)中符号 $f * \psi_s^1, \dots, f * \psi_s^7$ 表示卷积, 而式(15)中 $|W^{\psi^1}f(s, x, y, z)|$ 表示 $W^{\psi^1}f(s, x, y, z)$ 的模. 仍然以二进小波进行离散, 即伸缩因子 s 取为 2^k , 并令 $x = i_1 \Delta x, y = i_2 \Delta y, z = i_3 \Delta z$, 为方便下文叙述, 仍然将 $W^{\psi^1}f(s, x, y, z)$ 简记为 $W^{\psi^1}f(2^k, i_1, i_2, i_3)$, $Mf(s, x, y, z)$ 简记为 $Mf(2^k, i_1, i_2, i_3)$, 此时三维张量积小波变换系数的递推关系式以及小波变换系数模的表达式为

$$\begin{cases} W^{\Phi}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n h_l h_m h_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^1}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n h_l h_m g_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^2}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n h_l g_m h_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^3}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n h_l g_m g_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^4}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n g_l h_m h_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^5}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n g_l h_m g_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^6}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n g_l g_m h_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ W^{\psi^7}f(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sum_l \sum_m \sum_n g_l g_m g_n W^{\Phi}f(2^{k-1}, i_1 + 2^{k-1}l, i_2 + 2^{k-1}m, i_3 + 2^{k-1}n) \\ Mf(2^k, i_1, i_2, i_3) = \sqrt{|W^{\psi^1}f(2^k, i_1, i_2, i_3)|^2 + \dots + |W^{\psi^7}f(2^k, i_1, i_2, i_3)|^2} \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\{h_m\}$ 和 $\{g_m\}$ 分别表示一维情况下的低通小波滤波器系数和高通小波滤波器系数;另外,这里 Φ 为三维空间中的尺度函数.

1.4 Hölder 指数计算的具体实施过程

以二维空间中的函数 $f(x, y)$ 为例,这里扼要给出 Hölder 指数 α 的具体实施步骤,在下面叙述中,以二进小波进行离散,即伸缩因子 s 取为 2^k ,并令 $x = i\Delta x, y = j\Delta y$,为方便下文叙述,将 $f(x, y)$ 简记为 $f(i, j)$;另外离散后的小波变换系数和小波变换系数的模分别简记为 $W^\psi f(2^k, i, j)$ 和 $Mf(2^k, i, j)$. 此时 Hölder 指数 α 的具体实施步骤为:

1) 输入离散函数值

$$\{f(0,0), f(0,1), \dots, f(Nx, Ny)\}$$

2) 借助于式(10)分别计算出离散后的3个小波变换系数,即

$$\{W^{\psi^1} f(2^k, 0, 0), W^{\psi^1} f(2^k, 0, 1), \dots,$$

$$W^{\psi^1} f(2^k, Nx, Ny)\},$$

$$\{W^{\psi^2} f(2^k, 0, 0), W^{\psi^2} f(2^k, 0, 1), \dots,$$

$$W^{\psi^2} f(2^k, Nx, Ny)\},$$

$$\{W^{\psi^3} f(2^k, 0, 0), W^{\psi^3} f(2^k, 0, 1), \dots,$$

$$W^{\psi^3} f(2^k, Nx, Ny)\}$$

$$(k=1, 2, 3)$$

3) 借助于式(9)计算小波变换系数的模

$$Mf(2^k, i, j);$$

4) 借助于式(3)确定小波变换模极大值 $r_{i,j}^k$;

5) 借助于式(4),便可以获得在 (i, j) 点处关于 Hölder 指数 $\alpha_{i,j}$ 的近似表达式,即

$$\alpha_{i,j} \approx [\log_2(r_{i,j}^3/r_{i,j}^1)]/2,$$

$$(0 \leq i \leq Nx, 0 \leq j \leq Ny) \quad (17)$$

为了校验上述计算 Hölder 指数 $\alpha_{i,j}$ 方法的有效性,这里选取1个典型一维函数进行小波多分辨奇异分析.该一维函数的表达式如下:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{e^{-30(x+3/4)} + 1} & -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ 0 & 2 < x < 3 \\ e^{-30(x-7/2)} & 3 \leq x < 4 \\ 0 & x \geq 4 \end{cases} \quad (18)$$

分别用二次样条小波和 Daubechies 小波编制了相应的程序,计算域取 $[-2, 5]$,计算网格取为 700,本文计算结果如图1所示.图1(a)为本文采用样条小波的多分辨奇异分析结果,图1(b)为本文采用消失矩 N 取为 2 的 Daubechies 小波时所

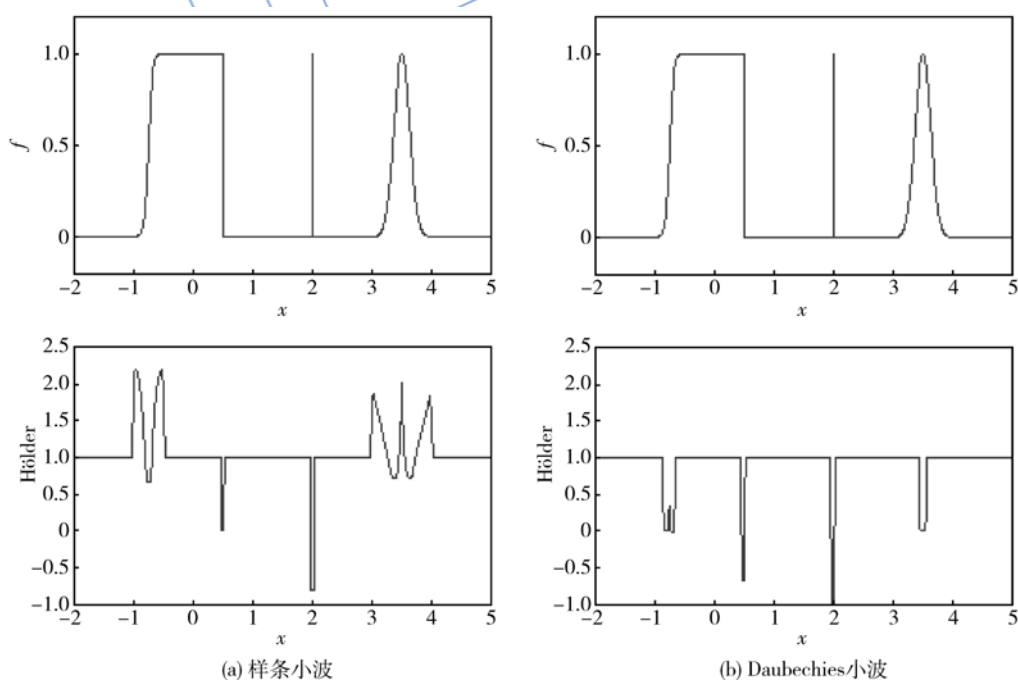


图1 典型信号小波多分辨的奇异分析结果

Fig.1 Results of singularity analysis for testing function

得的多分辨奇异分析结果. 由计算结果可以看出, 样条小波和 Daubechies 小波分析都能准确地探测出函数的奇异点位置, 在本算例中, 函数在 $x=1/2$ 处有一阶跃型间断, 在 $x=2.0$ 处有一脉冲型间断, 这两处的 Hölder 指数分别为 0 和 -1, 而在 $x=-1.0$ 和 $x=-1/2$, 以及 $x=3.0$ 和 $x=4.0$ 处, 也存在一定程度的奇异性, 显然这里由小波多分辨奇异分析所获得的结果是合理的、准确的.

2 小波多分辨奇异分析的流场计算新方法

为了实施本文的小波多分辨奇异分析的流场计算新方法, 这里首先要利用小波多分辨分析技术对计算结果(这里指计算过程中每一次迭代的中间结果)进行分析, 得到整个计算域中当前解的奇异性, 然后进行下一个时间步迭代时便可利用上一步的小波分析的结果, 去选择合适的差分格式, 以便构造出一种计算效率高而且能够保证计算精度的混合算法. 应指出, 这里新方法能够很方便地加入到原有的计算程序中, 加入小波多分辨奇异分析后的程序总框图如图 2.

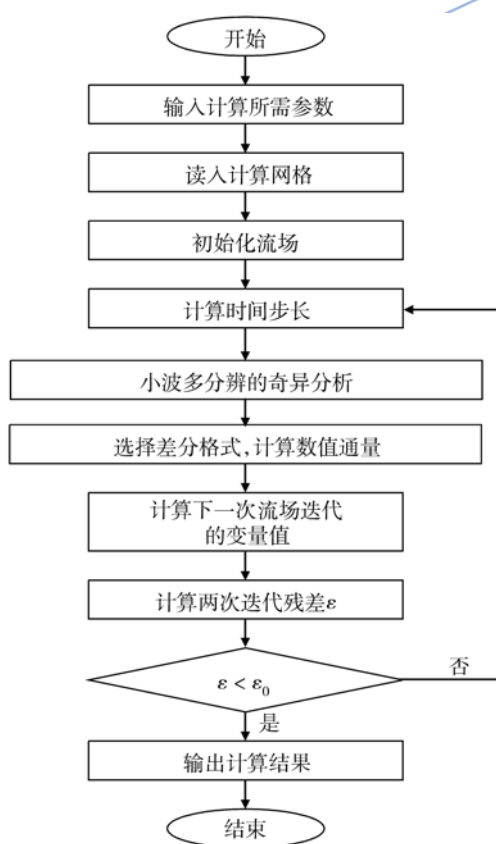


图 2 加入小波多分辨奇异分析后的求解过程图

Fig. 2 Flowchart of adding wavelet singularity analysis

为了保证时间积分的精度, 采用具有 TVD

性质的三步 Runge-Kutta 方法(下文简记为 R-K), 并将空间导数离散, 于是控制方程便可半离散化为

$$\mathbf{U}_t = L(\mathbf{U}) \quad (19)$$

式中 $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$ 为守恒变量, 相应时间积分的 TVD 三步 Runge-Kutta 格式为

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t L(\mathbf{U}^n)$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\mathbf{U}^{(1)})$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\mathbf{U}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\mathbf{U}^{(2)}) \quad (20)$$

今对任一物理变量 ξ 进行小波多分辨的奇异分析, 则小波分析的加入方法有两种, 如图 3: 一种方法是在一个完整的时间步后进行一次小波多分辨奇异分析, 并将分析的结果用于下一个时间步的每一个 Runge-Kutta 步数值通量的计算, 这种方法的示意图如图 3(b); 另一种方法则是在每完成一个 R-K 步后就进行小波分析, 并将分析的结果用于下一个 R-K 步的计算, 这种方法的示意图如图 3(a). 当利用小波多分辨奇异分析结果后, 便可有效地选择差分格式去计算数值通量, 例如在光滑区域采用无耗散的中心差分格式(其数值通常记作 $\hat{\mathbf{F}}^{\text{ctr}}$), 在奇异区域采用无振荡的 TVD 格式(其数值通常记作 $\hat{\mathbf{F}}^{\text{tvd}}$), 该过程见示意图 4, 其中 $\hat{\mathbf{F}}$ 为无黏数值通量.

3 典型的 7 个算例及分析

本文提出的新方法可以方便地加入到原有的 CFD(computational fluid dynamics)源程序中, 在已有 CFD 源程序^[11-16]的基础上, 给出了本文方法的具体实施过程, 并对典型算例进行了计算. 在下文进行小波奇异分析的过程中, 采用了消失矩 N 为 2 的 Daubechies 小波进行计算; 另外, 在对流场控制方程的离散过程中, 光滑区域采用 4 阶中心差分格式, 奇异区域采用 Harten-Yee 的二阶迎风型 TVD 格式或 5 阶 WENO 格式; 此外, 在对式(20)求解的过程中, 每完成一个 R-K 步后便进行小波多分辨奇异分析(计算过程如图 3(a)所示), 下面扼要给出本文 7 个典型算例.

3.1 二维前台阶算例的 Euler 流

进口马赫数为 3 的前台阶算例是一个检验激波捕捉高分辨率格式的一个常用算例. 计算采用二维 Euler 方程模型, 相关输入数据见文献[4, 17]. 计算中采用 480×160 网格进行计算, 取 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy)为 0.8, $\epsilon=1.0 \times$



图 3 两种加入小波多分辨奇异分析方法的示意图

Fig. 3 Subroutine flowchart of adding wavelet singularity analysis

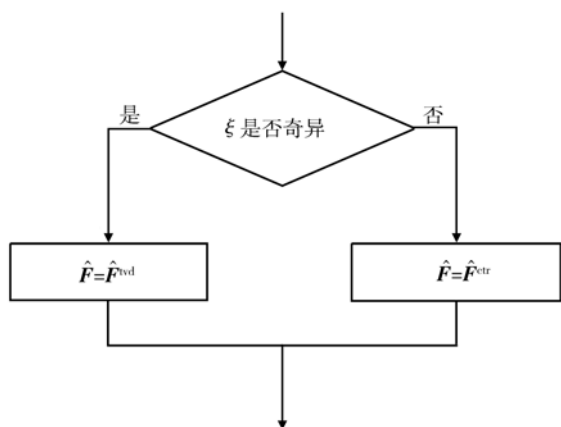


图 4 小波多分辨奇异分析自适应选择数值通量示意图

Fig. 4 Subroutine flowchart of choosing numerical flux by wavelet singularity analysis

10^{-3} , 选用气体的密度作为小波多分辨奇异分析时的变量, 并将分析后得到的奇异点分布区域采用 Harten-Yee 的二阶迎风型 TVD 格式。

为了排除计算机本身性能所带来的计算时间的不同, 这里引入压缩比 μ 作为衡量小波多分辨奇异分析数值方法的计算效率, 其定义为

$$\mu = \frac{N_{\text{tol}}}{N_{\text{reg}}} \quad (21)$$

其中 N_{tol} 为计算总网格, N_{reg} 为奇异点所在的网格数。可以看出, 压缩比越大, 奇异点所在的网格占的比例就越小, 计算效率提高得就越多。

该算例最终会变成一个稳态流动, 那时流场的结构相对来讲比较简单。而当时间 $t=4.0$ 时刻时流动处于非稳定阶段, 此时在前台阶附近形成一道脱体弓形激波, 这道激波与上壁面相交形成反射波, 当激波比较强时, 形成 λ 波 (即马赫杆), 由上壁面反射出来的波再次碰到前台阶的上表面, 于是又产生了新的一道反射波。随着时间的逐渐增长, 整个流场复杂激波系也逐渐变化, 最终形成一个基本稳定的脱体激波流场, 当 $t=15$ 以后流场基本达到稳定。图 5 为 480×160 网格下不同时刻 (即 $t=0.5 \sim 10.0$) 时密度等值线的分布图, 图中的密度是相对值 (无单位); 图 6 给出了上述不同时刻时对密度进行小波多分辨奇异分析后得到的奇异点所在网格分布图。由图中可以清晰地看到, 在不同时刻小波多分辨奇异分析都能较为准确地分析出各种间断的位置, 从而可以较为合理地选择数值通量的计算方法。表 1 给出了不同时刻下对密度进行小波多分辨奇异分析时所得到的奇异点网格数 (这里用 N_{weno} 表示对奇异点的网格均采用 WENO 格式时网格的个数), 由表中可以看出, 随着计算时间的增加, 压缩比 μ 先减小然后又增加, 这是由于流场结构先变复杂, 最后趋于稳定, 因此流场结构又变得相对简单的缘故。

3.2 二维双马赫反射的 Euler 流动

所谓马赫反射问题, 原始模型是模拟激波

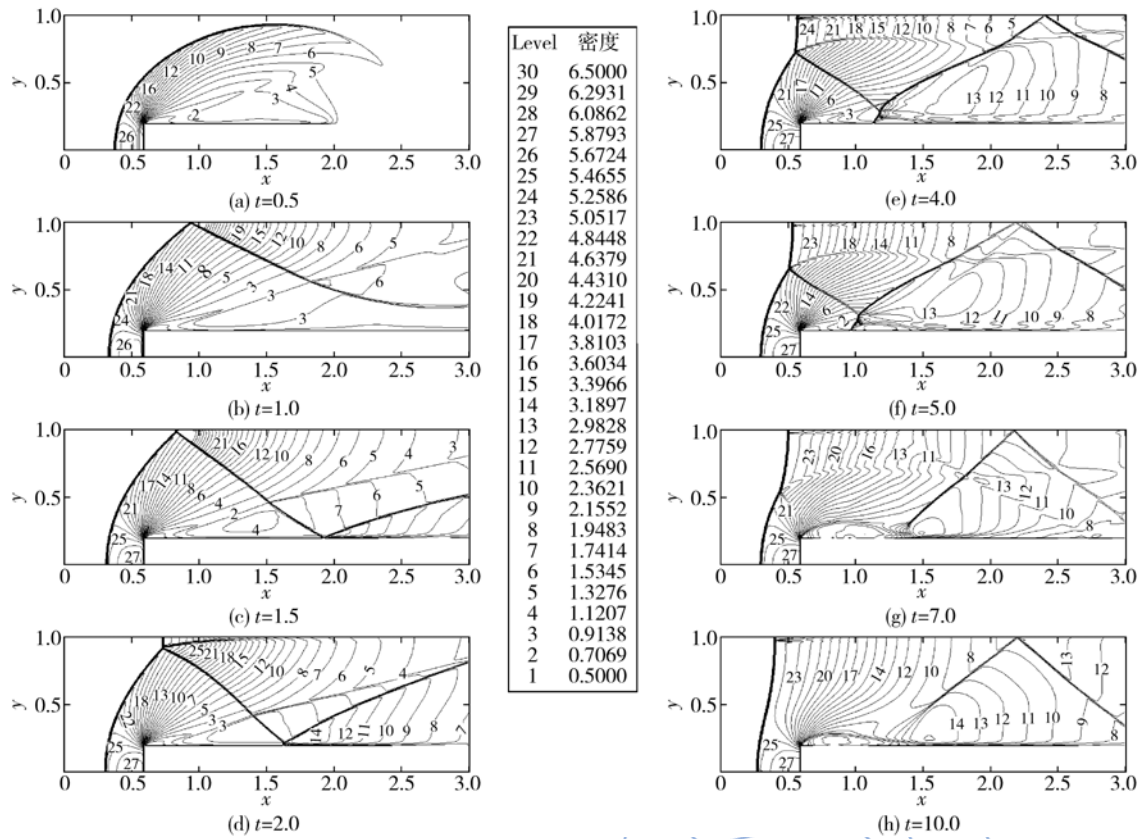


图 5 前台阶算例不同时刻等密度线分布

Fig. 5 Density contours at different time for forward facing step problem

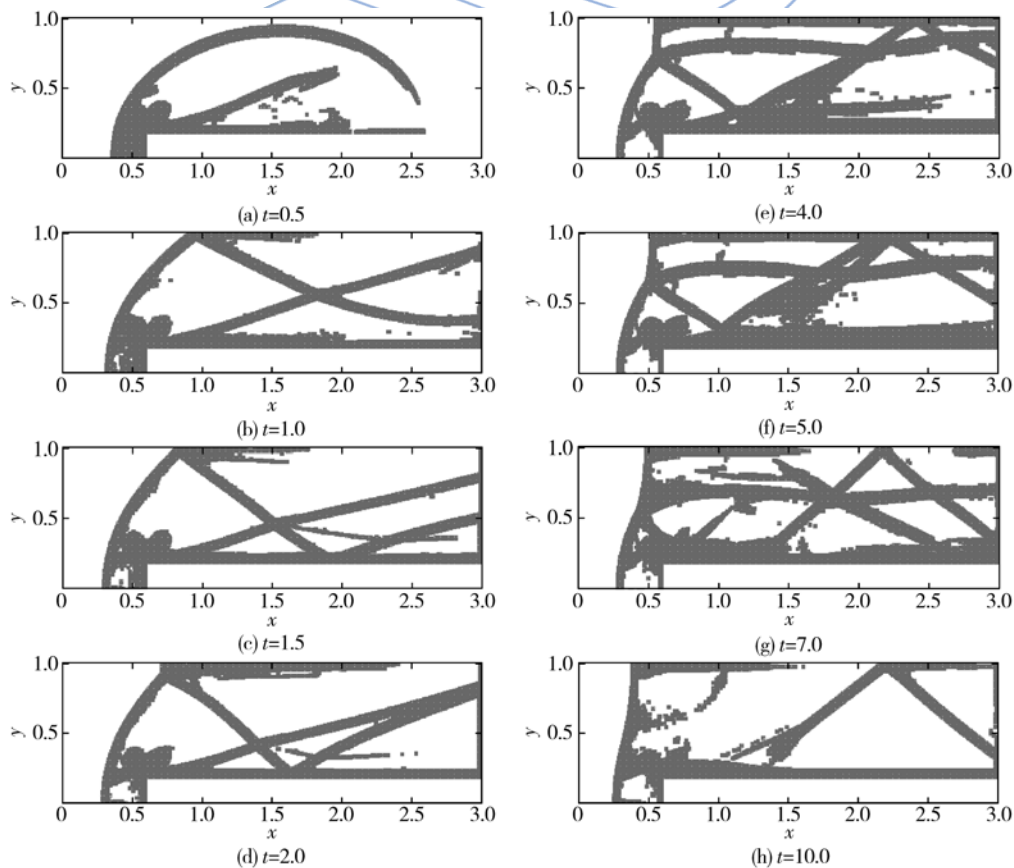


图 6 对密度进行小波奇异分析所得的奇异点网格分布

Fig. 6 Results of singularity analysis for density at different time for forward facing step problem

表 1 前台阶算例对密度进行小波多分辨奇异分析的结果

Table 1 Results of singularity analysis for density at different time for forward facing step problem

t	N_{weno}	μ	t	N_{weno}	μ
0.5	14 598	5.26	8.0	25 899	2.97
1.0	19 921	3.86	8.5	23 864	3.22
1.5	20 355	3.77	9.0	21 930	3.50
2.0	21 911	3.51	9.5	20 919	3.67
2.5	24 960	3.08	10.0	19 140	4.01
3.0	26 567	2.89	10.5	18 208	4.22
3.5	28 937	2.65	11.0	20 186	3.80
4.0	30 674	2.50	11.5	18 790	4.09
4.5	32 085	2.39	12.0	18 031	4.26
5.0	32 510	2.36	12.5	18 951	4.05
5.5	32 953	2.33	13.0	19 102	4.02
6.0	33 277	2.31	13.5	18 929	4.06
6.5	34 314	2.24	14.0	18 707	4.11
7.0	30 489	2.52	14.5	18 273	4.20
7.5	28 297	2.71	15.0	18 985	4.05

在斜面上的反射问题,如图 7(a).一个平面正激波从左至右运动,该激波运动到 D 点以后,与楔形边 DC 相互作用,楔形边 DC 为固壁面,在 DC 壁面上出现反射波,在反射波区域附近流场结构十分复杂,根据来流 Mach 数的不同,一般可以分为马赫反射和双马赫反射.当来流 Mach 数比较小时,在楔形边 DC 上形成一个马赫杆(即 λ 波)和一个接触间断,随着来流 Mach 数逐渐增大,在楔形边 DC 的反射区附近将形成两个马赫杆和两个接触间断,称为双马赫反射.该算例也是一个检验激波捕捉高分辨率格式常用算例之一.

在模拟图 7(a)双马赫反射问题时,计算域是不规则的,为了简化模型,本算例将计算域设定在规则的矩形区域,即以 D 点为坐标原点,DC 为 x 轴建立坐标系,这时计算模型如图 7(b),取 1 个单位宽和 4 个单位长,计算域大小为: $[0,4] \times [0,1]$,反射壁面处于计算域的底部 DC,一个 Mach 数为 10 的斜强激波放置在 $x=1/6, y=0$ 处,并与 x 轴成 60° ,计算域记为 $O'A'B'CO'$,其中 $O', A', A'B', B'C, CO'$ 为计算边界,相关的计算参数见文献[17].

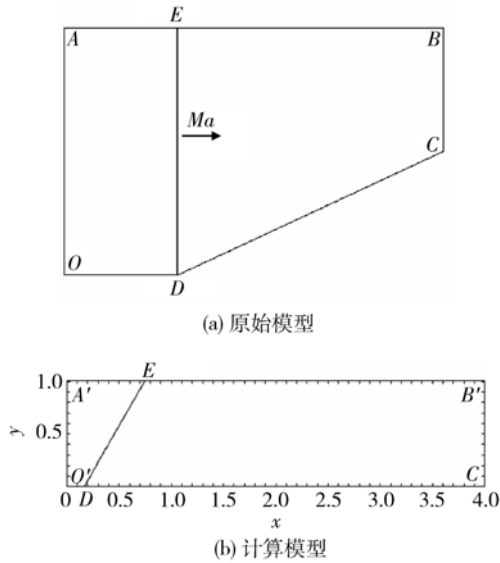


图 7 双马赫反射算例计算域示意图

Fig. 7 Computational domain of double Mach reflection

计算中采用 $640 \times 160, 1280 \times 320$ 和 1920×480 三种不同网格进行计算,取 CFL 数为 0.8, $\epsilon=0.001$,仍然选用密度进行小波多分辨奇异分析,得到流场的 Hölder 指数 α ;因此在方程离散中,光滑区域采用 4 阶中心差分格式,奇异区域采用 5 阶 WENO 格式,计算的最终时间 t 取为 0.2;另外,对压缩比 μ 仍用式(21)算出.

图 8(a)~(c)分别为 $t=0.2$ 时 $640 \times 160, 1280 \times 320$ 以及 1920×480 网格下计算所得的等密度线分布图,而图 8(d)~(f)分别为 $640 \times 160, 1280 \times 320$ 以及 1920×480 网格下对密度进行小波多分辨奇异分析时所获得的奇异点所在网格的分布图(图中的密度是相对值,无单位),表 2 给出了在不同网格下,不同计算时刻对密度进行小波多分辨奇异分析时得到的奇异点所在网格数以及相应的压缩比 μ . 分析所得到的计算结果可以发现:当 $t=0.2$ 时的流场结构是较为复杂的,在斜激波与下壁面的反射点附近的流动区域内形成了两个马赫杆(或 λ 波)和两个滑移线(即接触间断),尤其是第二个滑移线,它很靠近下壁面,在网格比较粗的时候,格式很难捕捉到,只有当网格比较细的时候,该滑移线才比较明显.从计算结果来看,网格较粗时,滑移线上的剪切涡完全被抹掉了,只有当网格比较细的时候,滑移线上的剪切涡才能被捕捉到,这种现象应值得我们关注.总的看来,小波多分辨奇异分析数值新方法保持了 WENO 格式对激波捕捉的高分辨率特性,而且没有

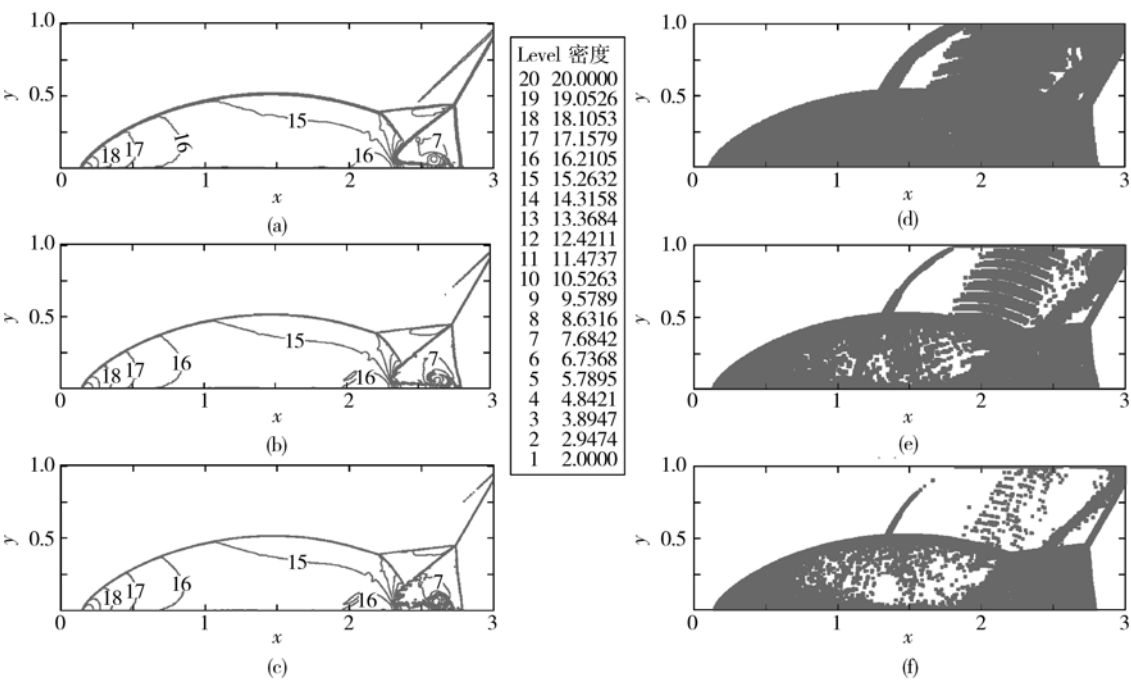


图 8 双马赫反射算例在不同网格下的计算结果
Fig. 8 Results of double Mach reflection problem

表 2 双马赫反射算例小波多分辨奇异分析的结果

t	640×160		1 280×320		1 920×480	
	N _{weno}	μ	N _{weno}	μ	N _{weno}	μ
0.02	6 378	16.06	20 452	20.03	42 103	21.89
0.04	10 437	9.81	36 405	11.25	74 223	12.42
0.06	14 695	6.97	51 250	7.99	97 843	9.42
0.08	19 085	5.37	63 201	6.48	120 784	7.63
0.10	23 532	4.35	76 080	5.38	139 499	6.61
0.12	27 781	3.69	89 800	4.56	152 574	6.04
0.14	32 009	3.20	101 574	4.03	162 225	5.68
0.16	36 588	2.80	111 606	3.67	164 332	5.61
0.18	41 726	2.45	120 841	3.39	166 616	5.53
0.20	47 049	2.18	130 804	3.13	181 136	5.09

出现振荡,格式也基本上是稳定的.再来分析计算效率,图 8(d)~(f)给出了不同网格下对密度进行小波多分辨奇异分析时所获得的奇异点所在网格的分布图;表 2 给出了不同时刻下压缩比的变化情况.显然,由于这时流场结构非常复杂,因此采用较密的网格是需要的.

3.3 著名的二维 Riemann 初值问题

二维 Riemann 初值问题的计算情况十分复杂,计算仍然采用二维 Euler 方程,计算域如图 9,初始时刻四个区域 1,2,3,4 内气体的状态各不相同

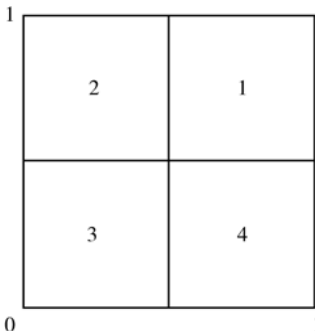


图 9 二维 Riemann 初值问题示意图
Fig. 9 Computational domain of two-dimensional Riemann problem

同,根据初始状态的差异可以出现很多复杂的现象,包括运动激波、稀疏波、滑移线(接触间断)等基本现象。

对于多变气体,Lax 等将二维 Riemann 初值问题划分为 6 大类 19 种情况^[18],即四稀疏波结构 2 种情况、四激波结构 2 种情况、四滑移线结构 2 种情况、双滑移线双稀疏波结构 4 种情况、双滑移线双激波结构 4 种情况以及双滑移线单稀疏波单激波结构 5 种情况。本文仅选取了其中的 3 个典型算例进行计算,相应的初值条件见表 3(表中物理参数均为相对值,无单位)。

计算中在光滑区域采用 4 阶中心差分格式,奇异区域采用 5 阶 WENO 格式进行离散,需要说明的是,由于有些情况的初始时刻密度是连续的,而压力或速度出现了间断,为了确保计算能够进行,计算中,对二维流动式(19)中的守恒量分别进行小波奇异性分析,得到对应于各个守恒量的相应的 Hölder 指数 α ,其表达式为

$$\alpha_{i,j} = \min[\alpha_{i,j}(\rho), \alpha_{i,j}(\rho u), \alpha_{i,j}(\rho v), \alpha_{i,j}(e)]$$

(22)

表 3 二维 Riemann 初值问题的 3 个典型算例以及初始状态
Table 3 Initial conditions of 3 examples for two-dimensional Riemann problems

	$[\rho_1, u_1, v_1, p_1]$	$[\rho_2, u_2, v_2, p_2]$	$[\rho_3, u_3, v_3, p_3]$	$[\rho_4, u_4, v_4, p_4]$
算例 1	(1.0000,0.7500, -0.5000,1.0000)	(2.0000,0.7500, 0.5000,1.0000)	(1.0000,-0.7500, 0.5000,1.0000)	(3.0000,-0.7500, -0.5000,1.0000)
算例 2	(1.0000,0.1000, 0.0000,1.0000)	(0.5313,0.8276, 0.0000,0.4000)	(0.8000,0.1000, 0.0000,0.4000)	(0.5313,0.1000, 0.7276,0.4000)
算例 3	(0.5313,0.1000, 0.1000,0.4000)	(1.0222,-0.6179, 0.1000,1.0000)	(0.8000,0.1000, 0.1000,1.0000)	(1.0000,0.1000, 0.8276,1.0000)

表 4 二维 Riemann 初值问题的 3 个典型算例
奇异分析的结果

Table 4 Results of singularity analysis for 3 examples
of two-dimensional Riemann problems

	t	N_{isd}	μ	N_{weno}	μ
算例 1	0.10	46386	4.97	51110	4.51
	0.20	55925	4.12	51348	4.48
算例 2	0.15	16163	14.25	16774	13.74
	0.30	23217	9.92	21131	10.90
算例 3	0.10	17757	12.98	19512	11.81
	0.20	24005	9.60	18362	12.55

计算中采用 480×480 计算网格,小波多分辨奇异分析的截断阈值 $\epsilon=1.0 \times 10^{-3}$ 。

3 个算例的计算结果见图 10,算例 1 在 4 个子区域间断面上形成 4 个滑移线,算例 2 在 4 个子区域间断面上形成 2 个滑移线和 2 个激波,算例 3 在 4 个子区域间断面上形成 2 个滑移线、1 个稀疏波和 1 个激波,具体分析可参考文献[18]。图 10 为 3 个典型算例在奇异区域采用 5 阶 WENO 格式的计算结果,图 10(a)为算例 1 在 $t=0.2$ 时刻等密度线分布图,图 10(b)为算例 1 在 $t=0.2$ 时刻对流场进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点网格分布图,图 10(c)为算例 2 在 $t=0.3$ 时刻等密度线分布图,图 10(d)为算例 2 在 $t=0.3$ 时刻对流场进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点网格分布图,图 10(e)为算例 3 在 $t=0.2$ 时刻等密度线分布图,图 10(f)为算例 3 在 $t=0.2$ 时刻对流场进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点网格分布图(图中密度是相对值,无单位)。表 4 列出了 3 个算例不同时刻对流场小波多分辨奇异分析得到的奇异点网格数以及压缩比。

3.4 跨声速 RAE2822 翼型的二维绕流问题

RAE2822 是一个典型的二维跨声速绕流流动的经典算例,文献[19]给出了该翼型的具体尺寸以及相关实验数据,计算的参数设置如下:来流马赫数为 0.729,攻角为 2.31° ,基于弦长的雷诺数为 6.5×10^6 。

计算时采用 C 型网格,网格数为 369×65 。计算过程中对 Mach 数进行小波多分辨奇异分析,截断阈值取 $\epsilon=1.0 \times 10^{-2}$;在方程离散中,对奇异区域采用 5 阶 WENO 格式计算无黏数值通量,在光滑区域则采用 4 阶中心差分格式计算无黏数值通量,黏性项采用 2 阶或者 4 阶中心差分

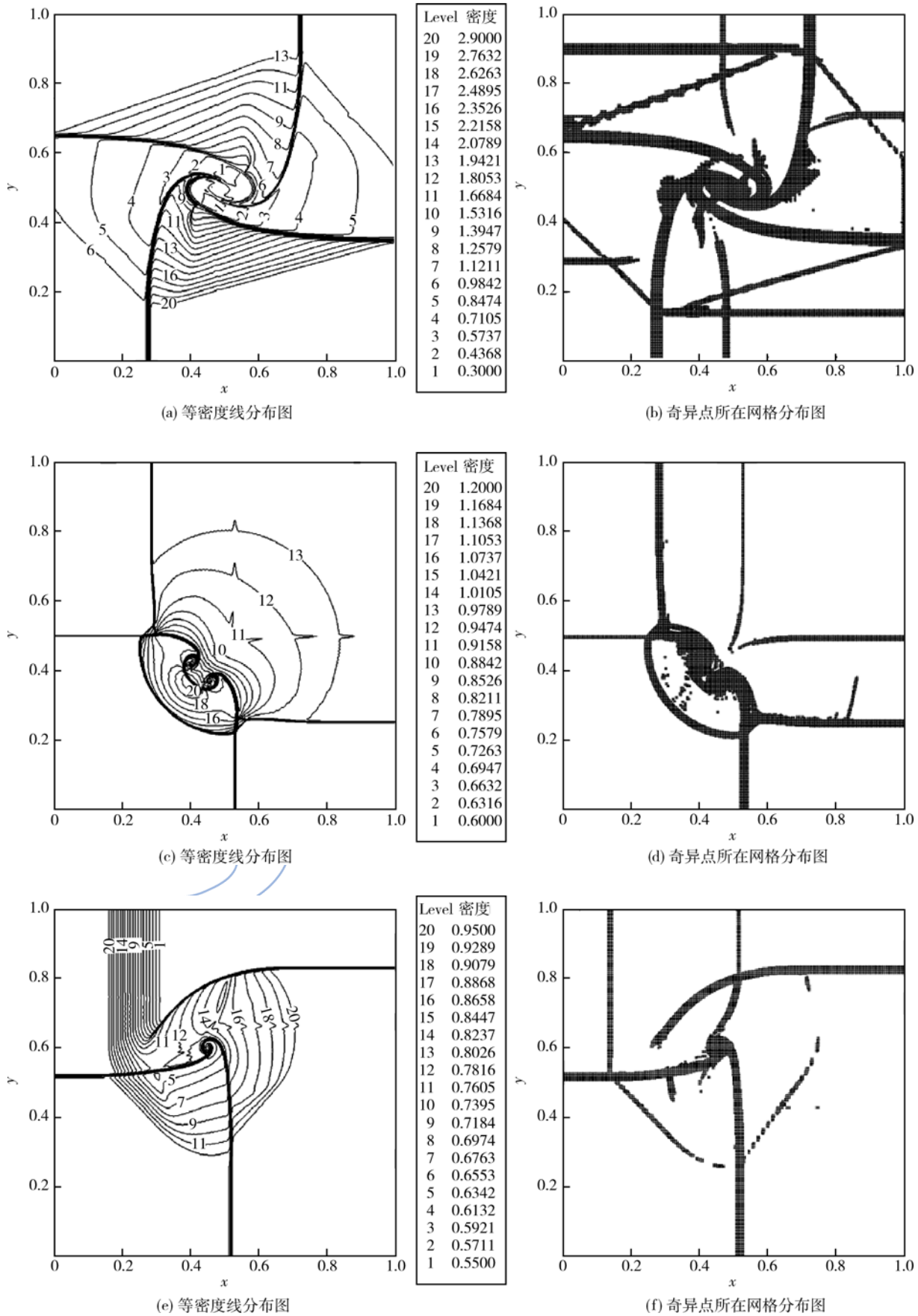
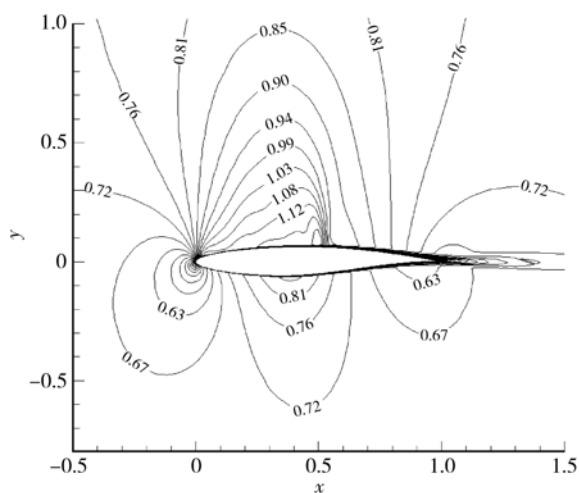


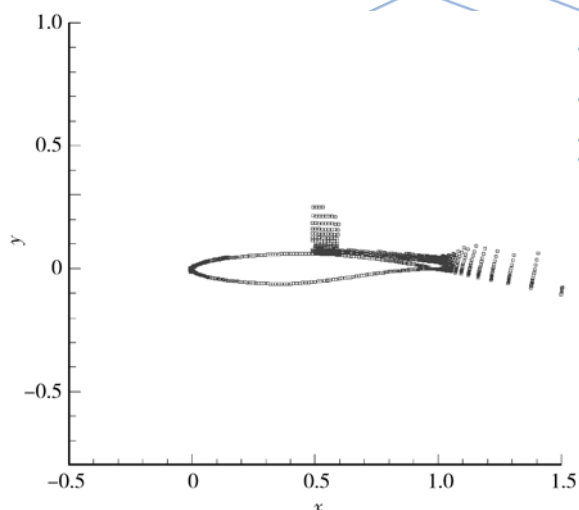
图 10 二维 Riemann 初值问题 3 个典型算例的计算结果

Fig. 10 Results of 3 examples for two-dimensional Riemann problems

离散. 计算所得的表面压力系数分布与实验值吻合较好. 图 11(a) 给出了等马赫线分布图, 图 11(b) 给出了对马赫数进行小波多分辨奇异分析时得到的奇异点所在网格的分布图. 从计算结果可以看出, 小波多分辨奇异分析能够准确的捕捉到上表面的激波, 新方法所得的计算结果是令人满意的, 而该算例在趋于收敛时奇异网格点数为 2988, 压缩比为 8.03.



(a) 等马赫数分布图



(b) 奇异点所在网格分布图

图 11 RAE2822 二维跨声速绕流流动算例计算结果

Fig. 11 Results of two-dimensional transonic flow past RAE2822 airfoil problem

3.5 二维跨声速 VKI-LS 59 涡轮叶栅的绕流计算

VKI-LS 59 叶栅是个大头、大弯曲、有攻角的平面涡轮叶栅, 文献[20]给出了叶型参数及相关实验数据, 计算的参数设置如下: 进口总压为 $2.3 \times$

10^5 Pa, 进口总温为 280 K, 进口气流角 30° , 出口静压为 1.2×10^5 Pa.

计算网格取为 160×32 , 计算过程中对 Mach 数进行小波多分辨奇异分析, 截断阈值取 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-2}$; 在方程离散中, 在奇异区域采用 5 阶 WENO 格式计算无黏数值通量, 在光滑区域则采用 4 阶中心差分格式计算无黏数值通量, 黏性项采用 2 阶或者 4 阶中心差分离散.

图 12(a) 为叶栅通道内的等马赫线分布图, 图 12(b) 为对马赫数小波奇异分析的奇异点网格分布图, 图中可以看到新格式能很好地捕捉到斜切口(叶栅喉部以后的通道区域)处的激波, 小波奇异分析也能够很好地捕捉到该激波的位置, 图 13(a) 为叶栅通道内的等熵线分布图, 图 13(b) 为等压强线分布图. 该算例在趋于收敛时奇异网格点数为 471, 压缩比为 10.87.

3.6 NASA (National Aeronautics and Space Administration) Rotor 37 跨声速轴流压气机转子三维流场的黏性计算

NASA Rotor 37 是著名的跨声速轴流压气机算例之一, 文献[21-22]给出了它的叶型参数及相关实验数据, 其主要气动设计参数为: 总压比 2.106, 总温比 1.27, 绝热效率 0.877, 转子转速 17188.7 r/min, 叶尖速度 454.136 m/s, 径高比 0.7, 展弦比 1.19, 转子叶片数 36, 设计流量为 20.19 kg/s, 轴向进气. 本文计算采用的进出口参数为: 进口总压为 101325 Pa; 进口总温为 288.2 K; 出口静压为 90000 Pa.

计算采用 $160 \times 64 \times 48$ 的 H 型网格, 计算过程中对 Mach 数进行小波多分辨奇异分析, 截断阈值取 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-2}$; 在方程离散中, 奇异区域采用 5 阶 WENO 格式计算无黏数值通量, 光滑区域则采用 4 阶中心差分格式计算无黏数值通量, 黏性项采用 2 阶或者 4 阶中心差分离散.

图 14 为 30% 叶高处 S_1 流面上的计算结果, 图 14(a) 为相对马赫数等值线分布图, 图 14(b) 为对相对马赫数进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点所在网格的分布图, 图 14(c) 为奇异点所在网格的三维轴测图.

图 15 为 70% 叶高处 S_1 流面上的计算结果, 图 15(a) 为相对马赫数等值线分布图, 图 15(b) 为对相对马赫数进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点所在网格的分布图, 图 15(c) 为奇异点所在网格的三维轴测图.

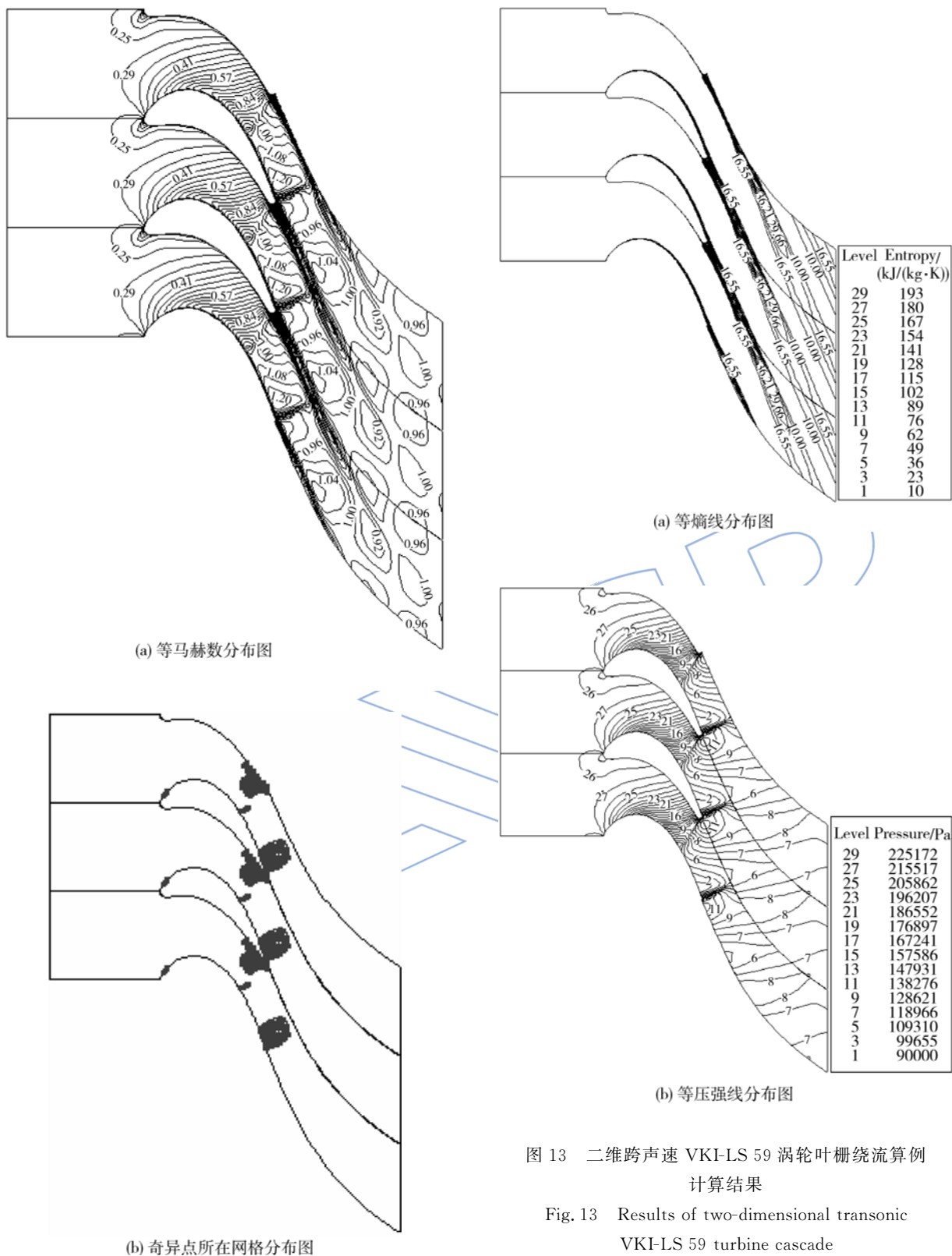


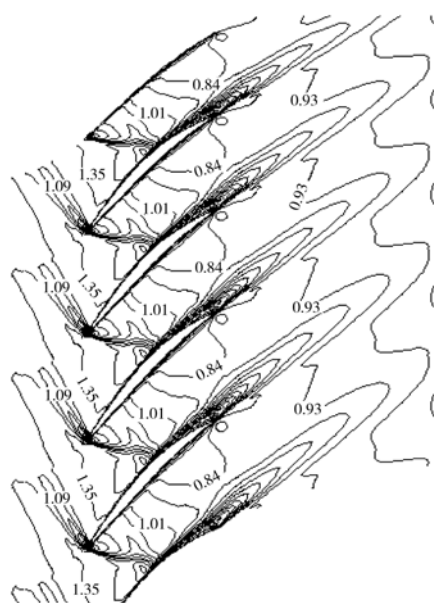
图 12 二维跨声速 VKI-LS 59 涡轮叶栅绕流算例
计算结果

Fig. 12 Results of two-dimensional transonic
VKI-LS 59 turbine cascade
flow problem

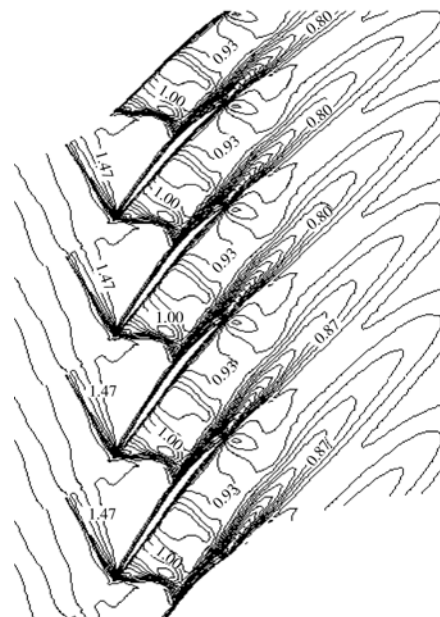
图 13 二维跨声速 VKI-LS 59 涡轮叶栅绕流算例
计算结果

Fig. 13 Results of two-dimensional transonic
VKI-LS 59 turbine cascade
flow problem

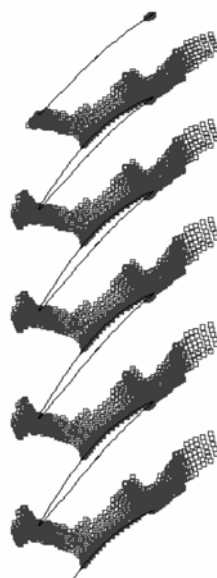
图 16 为压力面附近 S_2 流面上的计算结果, 图 16(a)为相对马赫数等值线分布图, 图 16(b)为对相对马赫数进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点所在网格的分布图, 图 16(c)为奇异点所在网格的三维轴测图, 紧靠叶片的第一层网格的 y^+



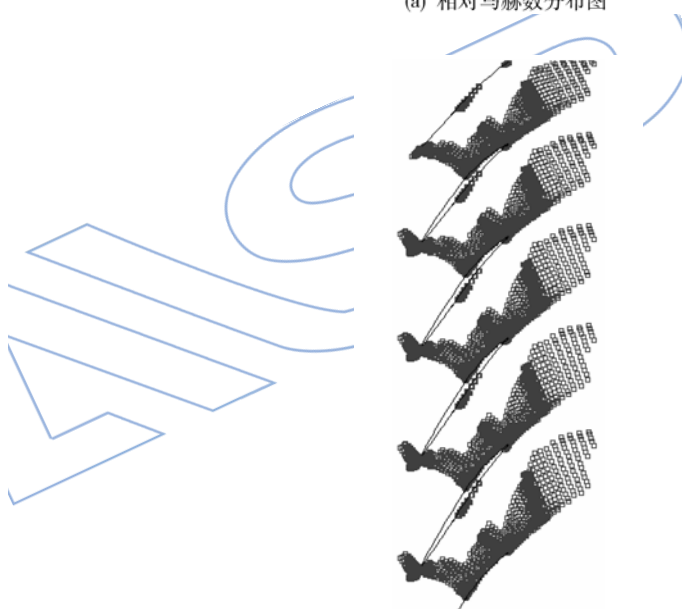
(a) 相对马赫数分布图



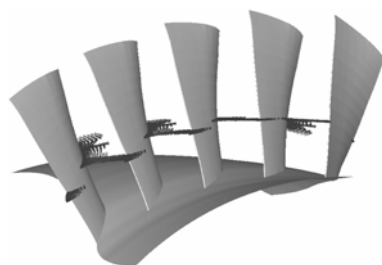
(a) 相对马赫数分布图



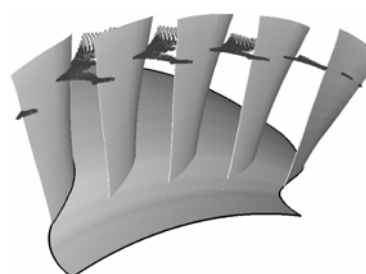
(b) 奇异点所在网格分布图



(b) 奇异点所在网格分布图



(c) 奇异点所在网格的三维轴测图



(c) 奇异点所在网格的三维轴测图

图 14 NASA Rotor 37 跨声速轴流压气机转子算例
30%叶高 S_t 流面计算结果

Fig. 14 Results of S_t stream surface
(30% span from the shroud)

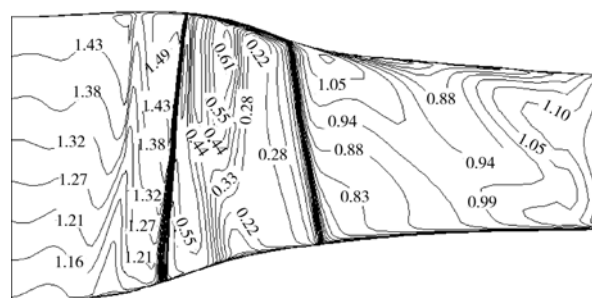
for NASA Rotor 37 transonic axial compressor

图 15 NASA Rotor 37 跨声速轴流压气机转子算例
70%叶高 S_t 流面计算结果

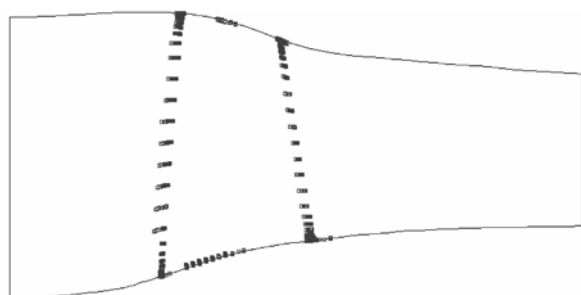
Fig. 15 Results of S_t stream surface
(70% span from the shroud)

for NASA Rotor 37 transonic axial compressor

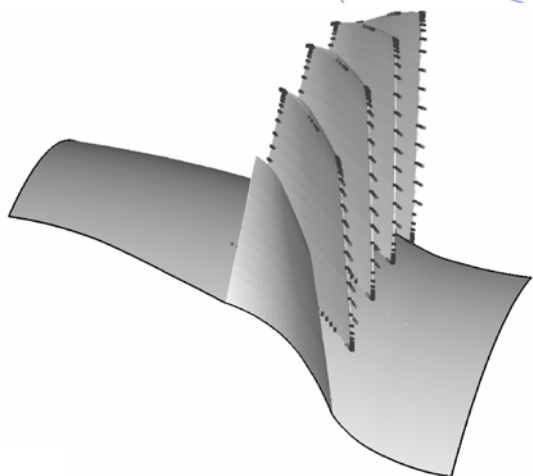
在 2~29 的范围内,图 16 中取的是靠近压力面的第 5 层网格(y^+ 的定义见文献[23]).



(a) 相对马赫数等值线分布图



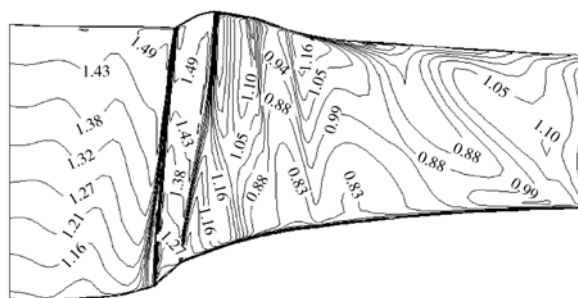
(b) 奇异点所在网格分布图



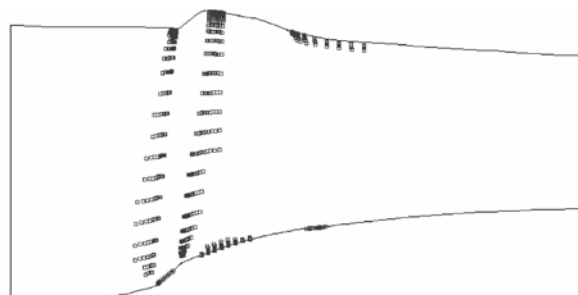
(c) 奇异点所在网格的三维轴测图

图 16 NASA Rotor 37 跨声速轴流压气机转子算例
压力面附近 S_2 流面计算结果
Fig. 16 Results of S_2 stream surface
(near pressure surface)
for NASA Rotor 37 transonic
axial compressor

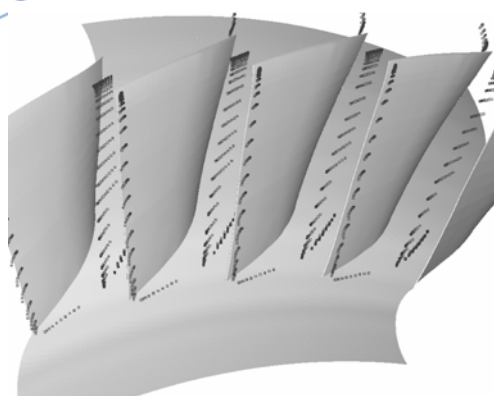
对马赫数进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点所在网格的分布图,图 17(c)为奇异点所在网格的三维轴测图.



(a) 相对马赫数等值线分布图



(b) 奇异点所在网格分布图



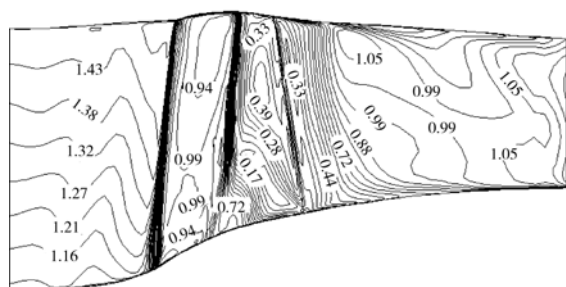
(c) 奇异点所在网格的三维轴测图

图 17 NASA Rotor 37 跨声速轴流压气机转子算例
中心 S_2 流面计算结果
Fig. 17 Results of central S_2 stream surface for
NASA Rotor 37 transonic
axial compressor

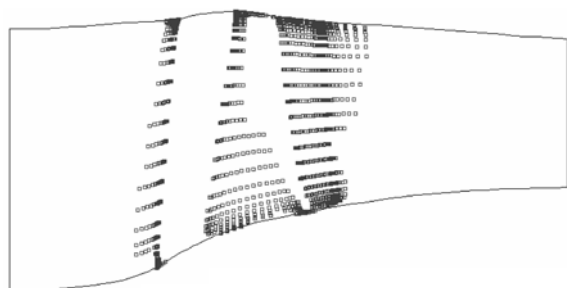
图 17 为中心 S_2 流面上的计算结果,图 17 (a)为相对马赫数等值线分布图,图 17(b)为对相

图 18 为吸力面附近 S_2 流面上的计算结果,图 18(a)为相对马赫数等值线分布图,图 18(b)为对相对马赫数进行小波多分辨奇异分析得到的奇

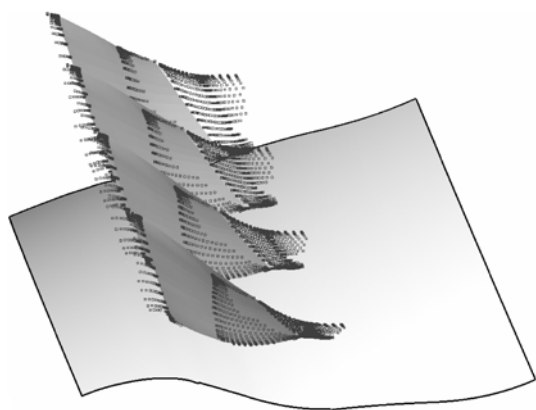
异点所在网格的分布图,图 18(c)为奇异点所在网格的三维轴测图,紧靠叶片的第一层网格的 y^+ 在 2~32 的范围内,图 18 中取的是靠近吸力面的第 5 层网格。



(a) 相对马赫数等值线分布图



(b) 奇异点所在网格分布图



(c) 奇异点所在网格的三维轴测图

图 18 NASA Rotor 37 跨声速轴流压气机转子算例
吸力面附近 S_2 流面计算结果
Fig. 18 Results of S_2 stream surface
(near suction surface)
for NASA Rotor 37 transonic
axial compressor

对于跨声速压气机的计算来讲,能否准确地捕捉到流场的激波形状与分布是有效地进行气动

设计的重要依据,由图 14~图 18 可以清楚地看到采用本文的方法有利于捕捉到这些复杂波系的位置.该算例在趋于计算收敛时所得到的奇异点所在网格数为 71 945,这时的压缩比为 6.83,显然这对提高计算效率是非常有利的。

3.7 NASA Rotor 67 跨声速风扇转子三维流场的黏性计算

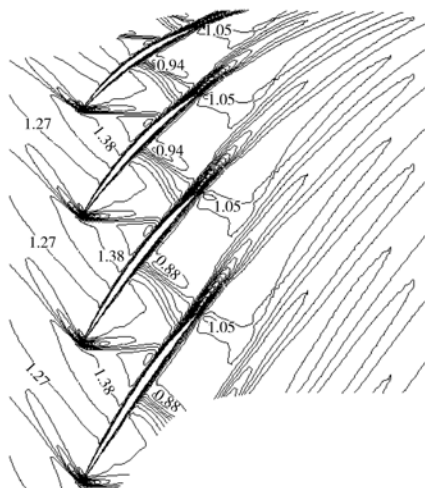
Rotor 67 是 NASA 公布的又一著名的跨声速轴流风扇算例,文献[24]给出了它的叶型参数及相关实验数据,其主要气动设计参数为:设计压比是 1.63,设计流量是 33.25 kg/s.叶尖相对马赫数为 1.38,相应速度是 429 m/s,设计转速 16 043 r/min.整个转子共有 22 个叶片,叶片的展弦比为 1.58,轴向进气.本文计算采用的进出口参数为:进口总压为 101 325 Pa,进口总温为 288.2 K,出口静压为 100 000 Pa.

针对进口区,叶片区与出口区的特点,文中采用了 HOH 型网格,这 3 个区的网格数分别为 $16 \times 64 \times 64$, $256 \times 64 \times 24$ 和 $40 \times 64 \times 64$;计算过程中对 Mach 数进行小波多分辨奇异分析,截断阈值取 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-2}$,在方程的离散中,在奇异区域采用 5 阶 WENO 格式计算无黏数值通量,在光滑区域则采用 4 阶中心差分格式计算无黏数值通量,黏性项采用 2 阶或者 4 阶中心差分离散。

图 19 为 70% 叶高处 S_1 流面上的计算结果,图 19(a)为相对马赫数等值线分布图,图 19(b)为文献[22]中实验值,图 19(c)为对相对马赫数进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点所在网格的分布图,图 19(d)为奇异点所在网格的三维轴测图。

图 20 为吸力面附近 S_2 流面上的计算结果,图 20(a)为相对马赫数等值线分布图,图 20(b)为对相对马赫数进行小波多分辨奇异分析得到的奇异点网格分布图,图 20(c)为奇异点所在网格分布的三维轴测图,紧靠叶片的第一层网格的 y^+ 在 2.5~25 的范围内,图 20 中取的是靠近吸力面的第 5 层网格。

由图 19~20 可以清楚地看到叶片通道中存在着复杂的激波结构与涡系分布,使用本文的方法能够有效地捕捉到这些流场信息.该算例在趋于计算收敛时奇异点所在网格数为 72 901,这时的压缩比为 8.54,显然使用本文方法对提高整个流场的计算效率是非常有利的。



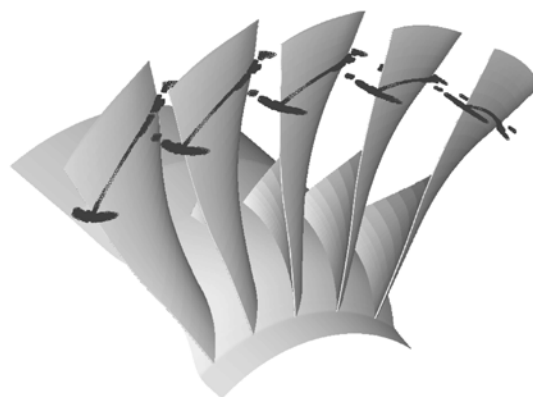
(a) 相对马赫数等值线分布图



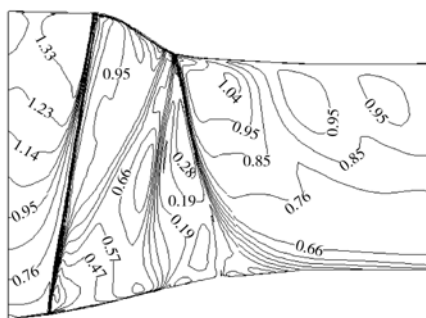
(b) 实验值



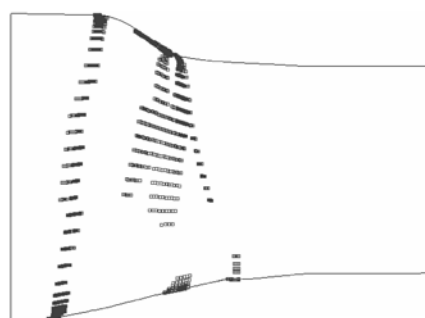
(c) 奇异点所在网格分布图



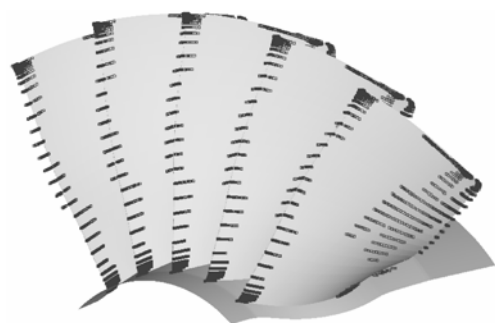
(d) 奇异点所在网格的三维轴测图

图 19 NASA Rotor 67 跨声速轴流风扇算例 70% 叶高处 S_t 流面计算结果Fig. 19 Results of S_t stream surface (70% span from the shroud)
for NASA Rotor 67 transonic axial fan

(a) 相对马赫数等值线分布图



(b) 奇异点所在网格分布图



(c) 奇异点所在网格的三维轴测图

图 20 NASA Rotor 67 跨声速轴流风扇算例吸力面附近 S_2 流面计算结果
Fig. 20 Results of S_2 stream surface
(near suction surface)
for NASA Rotor 67 transonic axial fan

4 结 论

1) 在课题组已有的 CFD 源程序^[11-16]的基础上,本文完成了二维与三维小波多分辨奇异分析数值新方法的源程序编写工作,并使用该程序对前台阶问题、双马赫反射问题、二维 Riemann 初值问题、跨声速 RAE 2822 翼型的二维绕流问题、VKI-LS 59 涡轮二维叶栅的跨声速绕流问题、NASA Rotor 37 与 NASA Rotor 67 的三维黏性流场进行计算,典型的 7 个算例初步显示了本文所编程序的可行性与有效性。

2) 7 个典型算例的数值结果表明:小波多分辨奇异分析可以准确地捕捉到流场中的激波、滑移线以及稀疏波(稀疏波只在波头和波尾的局部区域判断为间断);新方法能够有效地对各种内外流场进行数值计算,能捕捉到流场中的各种间断以及复杂的涡系结构,计算结果中并没有出现振荡现象。

3) 本文大量数值结果还表明:小波多分辨奇异分析数值新方法既能保持 TVD, WENO 格式在间断上的高分辨率性质,又能较大程度地提高流场计算的效率,从文中完成的前台阶问题、双马赫反射问题以及二维 Riemann 初值问题上都说明这一点。另外,新格式的计算效率比传统的 TVD 格式或 WENO 格式有较大的提高(能够提高 3~5 倍),这可以从本文完成的 RAE 2822 翼型绕流问题、VKI-LS 59 涡轮叶栅的绕流问题、NASA Rotor 37 与 NASA Rotor 67 的三维黏性流场算例去说明这点,当上述 4 个算例的流场在趋于计算收敛时,其相应的压缩比 μ 分别为 8.03,

10.87, 6.83 和 8.54, 显然压缩比越高,对提高流场的计算效率越有利,因此它充分显示了新算法的高效率。

4) 借助于小波奇异分析技术,将流场的奇异点区域与光滑区域分开,因此便可以在流场的奇异点区域采用高精度的 WENO 格式(例如本文的 7 个算例均采用了 5 阶的 WENO 格式进行计算),在流场的光滑区域采用高精度的中心差分格式(例如本文的 7 个算例均采用了 4 阶的中心差分格式;如果流场计算需要的话,还可以采用更高阶的强紧致格式^[6,14]以便更细致地刻画与分析流场的涡系结构)。大量数值计算的实验表明:提高格式精度可以放宽对网格雷诺数的限制,而且采用高精度格式,对于刻画与分析流场的细致涡系结构是非常必要的,它要比常规的二阶精度流场计算给出更多、更丰富、更细致、更准确的流场信息。在保证局部网格雷诺数应该满足的限制条件下,可以有效地降低网格划分的数量^[6]。高精度格式的上述这些特点,对高超声速飞行器复杂绕流问题中的热防护分析^[15-16]、对叶轮机械中跨声速复杂流场的计算^[14]以及跨声速压气机转子叶尖间隙流动的分析^[4]都显得格外重要。

参考文献:

- [1] Jaffard S, Meyer Y, Ryan R D. Wavelets: tools for science & technology[M]. Philadelphia: SIAM, 2001.
- [2] Mallat S G. A Wavelet tour of image processing[M]. New York: Academic Press, 1998.
- [3] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III [J]. Journal of Computational Physics, 1987, 71(2): 231-303.
- [4] 王保国, 黄虹宾. 叶轮机械跨声速及亚声速流场的计算方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [5] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[R]. NASA/CR-97-206253, ICASE Report No. 97-65, 1997.
- [6] 王保国, 刘淑艳, 黄伟光. 气体动力学[M]. 北京: 国防科工委所属五所院校(北京理工大学、北京航空航天大学、西北工业大学、哈尔滨工程大学、哈尔滨工业大学)出版社, 2005.
- [7] Farge M, Hunt J C R, Vassilicos J C. Wavelet, fractals, and Fourier transforms[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1993.
- [8] Antoniadis A, Oppenheim G. Wavelets and statistics[M]. Lecture Notes in Statistics 103. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [9] WANG Baoguo, WU Junhong. Construction of daubechies wavelet and its application in shock capturing[R]. Gyeo-

- ngJu:9th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (ISAIF), 2009-3D-1, 2009.
- [10] WU Junhong, WANG Baoguo. A new numerical method based on wavelet detection and its application[R]. GyeongJu:9th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (ISAIF), 2009-2D-3, 2009.
- [11] 王保国, 卞荫贵. 转动坐标系中跨声速欧拉流的有限体积-TVD 格式[J]. 空气动力学学报, 1992, 10(4): 472-481.
WANG Baoguo, BIAN Yingui. Finite volume-TVD scheme for 3-D Euler transonic flows computations in rotating curvilinear coordinates[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 1992, 10(4): 472-481. (in Chinese)
- [12] WANG Baoguo, CHEN Naixing. An improved SIP scheme for numerical solutions of transonic stream-function equation[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1990, 10(5): 591-602.
- [13] 王保国, 沈孟育. 高速粘性内流的高分辨率高精度迎风型杂交格式[J]. 空气动力学学报, 1995, 13(4): 365-373.
WANG Baoguo, SHEN Mengyu. High resolution and high order accurate upwind TVD algorithm of high speed viscous internal flows[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 1995, 13(4): 365-373. (in Chinese)
- [14] 王保国, 刘淑艳, 张雅, 等. 双时间步长加权 ENO-强紧致高分辨率格式及在叶轮机械非定常流动中的应用[J]. 航空动力学报, 2005, 20(4): 534-539.
WANG Baoguo, LIU Shuyan, ZHANG Ya, et al. Pseudo-time method of weighted ENO-strongly compact high resolution schemes and its application to turbomachinery unsteady flow[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(4): 534-539. (in Chinese)
- [15] 王保国, 李翔. 多工况下高超声速飞行器再入时流场的计算[J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(1): 71-76.
WANG Baoguo, LI Xiang. CFD prediction of hypersonic vehicle reentry flowfield of multiple cases[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2010, 44(1): 71-76. (in Chinese)
- [16] 王保国, 李翔, 黄伟光. 激波后高温高速流场中的传热特性研究[J]. 航空动力学报, 2010, 25(5): 963-980.
WANG Baoguo, LI Xiang, HUANG Weiguang. Analytical study of heat transfer of high-temperature and high-velocity flow field behind shock waves[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(5): 963-980. (in Chinese)
- [17] Woodward P R, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(1): 115-173.
- [18] Lax P D, Liu X D. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes[J]. SIAM J Scientific Computing, 1998, 19(2): 319-340.
- [19] Tatum K E, Slater J H. The validation archive of the NPARC alliance[R]. AIAA Paper 99-0747, 1999.
- [20] Deconinck H, Hirsch C H. Finite element methods for transonic blade-to-blade calculation in turbomachines [J]. ASME Journal of Engineering for Power, 1981, 103: 665-677.
- [21] Reid L, Moore R D. Performance of a single-stage axial-flow transonic compressor with rotor and stator aspect ratios of 1.19 and 1.26, respectively, and with design pressure ratio of 1.82[R]. NASA/TP-1338, 1978.
- [22] CHEN Naixing. Aerothermodynamics of turbomachinery: analysis and design[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2010.
- [23] 陈懋章. 粘性流体动力学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 282-312.
- [24] Strazisar A J, Wood J R, Hathaway M D, et al. Laser anemometer measurements in a transonic axial-flow fan rotor [R]. NASA/TP-2879, 1989.