

文章编号: 100028055(2010) 0621284-07

# 应用 $C_2Re_H$ 湍流模型和 PSE 方法研究 高超声速流动

颜培刚, 董学智, 韩万金  
(哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 采用考虑转捩的  $C_2Re_H$  湍流模型研究了高超声速复杂流动, 结合 PSE (parabolic stability equation) 稳定性分析方法和  $e_2N$  方法, 通过给出边界层最不稳定点的参数, 用以控制  $C_2Re_H$  的转捩经验关联式, 减少对经验参数的依赖. 计算了锥体高超声速流场, 得到的壁面换热量和边界层转捩位置与实验吻合较好. 计算了平板激波/边界层干扰和高超声速拐角压缩流场, 得到了准确的波系结构、压力分布和分离区的大小. 结果表明, 该方法与传统湍流模型相比具有较大的优越性.

**关 键 词:** 高超声速; parabolic stability equation (PSE) 稳定性方程; 转捩; 激波; 边界层

**中图分类号:** V231.1.3      **文献标识码:** A

## Investigation on supersonic flow with $C_2Re_H$ turbulence model and PSE method investigation on supersonic flow

YAN Peigang, DONG Xuexhi, HAN Wanjin  
(School of Energy Science and Engineering,  
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The  $C_2Re_H$  turbulence model involved with empirical correlation for transition was adopted to investigate the typical hypersonic flows. Parabolic stability equation (PSE) stability analysis and  $e_2N$  prediction methods were combined to find the most unstable point of boundary layer, showing that the transition empirical correlation parameters were more appropriate, with less dependency on design experiences. The hypersonic flow field of a blunt cone was simulated, and the computational wall heat flux and boundary layer transition position were consistent well with the experimental results. The shock wave/flat plate interaction and the flow across a compression corner were computed. The analysis of shock wave structure and separated flow shows that the model is also applicable for simulation of complicated flow with shock wave/boundary layer interaction. The results show that the method of this paper is superior to the traditional turbulence models.

**Key words:** hypersonic flow; parabolic stability equation (PSE) stability equation; transition; shock wave; boundary layer

湍流是流体动力学中的一个重要现象. 在空气动力设计中的一个主要难点是如何模拟复杂湍流. 湍流直接数值模拟 (DNS) 和大涡模拟 (LES) 具有很好的理论根据和广泛的适用性, 但限于当前的计算条件, 尚不具备工程应用价值. 因此湍流模式仍然是当前解决工程湍流问题最有效和最实

际的选择. 高超声速流动涉及复杂的流动现象, 例如大的逆压梯度、流动分离与再附以及较强的可压缩性效应. 在流动转捩区, 飞行器表面热流率及表面摩擦系数等急剧增加, 因此准确预估转捩起始点位置及转捩区长度是工程设计, 特别是热防护系统设计的关键. 应用湍流模式进行计算时, 若直接将转捩位置按经验公式给出, 显然是不合理的<sup>[122]</sup>. 目前一般认为三维物体高超声速流动失稳转捩机制有三种: 第二模态(second mode)机制、横流(crossflow)机制和 bypass 机制<sup>[3]</sup>. 为了研究各机制, 研究者已经开展了大量的研究工作. 但由于流动的复杂性, 各种机制未能辨别的很清楚, 数值模结果与实验有较大的偏差.

当前使用最为普遍的理论预估方法是基于线性稳定性理论的  $e2N$  方法来计算扰动的发展, 给出转捩位置, 从而揭示转捩的机理, 但其局限性很大, 不能完全应用于工程设计当中<sup>[46]</sup>. Langtry/Menter 以 Menter 的 shear stress transport (SST) 模型为基础, 提出了能够关联转捩起始点和转捩区长度的  $C2Re_H$  模型<sup>[7]</sup>, 对前人提出模型的很多缺点作了较大的改进, 但它需要经验关系式来确定转捩起始点雷诺数, 增加了计算的不确定性.

本文提出一种方法, 将两者联合起来, 利用  $e2N$  方法预估边界层失稳位置, 计算出转捩起始点动量厚度雷诺数, 可以有针对性地修正转捩模型当中的经验关系式, 提供可以直接用于流场计算的经验系数, 减少对设计者经验的依赖. 结果表明, 这一方法可以更为准确地模拟转捩过程和激波/边界层干扰造成的分离流动, 转捩区和分离区的壁面压力和热流量与实验吻合较好, 这对于准确模拟超声速/高超声速多波系复杂的流动、转捩流动以及气动加热等特点都是十分有意义的.

## 1 $C2Re_H$ 转捩模型

为准确求解高超声速流动, 对时间平均的 Navier-Stokes (N2S) 方程进行空间推进求解, 求

$$Re_H = \left[ 1173.51 - 589.428T_u + \frac{0.2196}{T_u^2} \right] \# F(K_t) \quad (T_u \leq 1.3) \tag{3a}$$

$$Re_H = 331.5 \# (T_u - 0.5658)^{-0.671} \# F(K_t) \quad (T_u > 1.3) \tag{3b}$$

$$F(K_t) = 1 - (-12.986K_t - 123.66K_t^2 - 405.689K_t^3) \# e^{-(T_u/0.5)} \quad (K_t > 0) \tag{3c}$$

$$T_u = 100 \frac{\sqrt{2k/3}}{U}, \quad K_t = \frac{Q^2}{L} \frac{dU}{ds} \tag{3c}$$

解器采用 Fluent 软件的三阶精度迎风格式和隐式时间推进格式.

在激波/边界层干扰区域流场变化剧烈, 湍流在这里是非平衡的, 尤其在强的激波/边界层干扰中, 非平衡性更加突出. 而湍流模式是将湍流脉动统计量和平均量分别对待, 并通过平均量来模拟脉动统计量. 一般的湍流模型不能很好的反映非平衡特征, 也就是没有恰当地反映脉动统计量对平均量依赖关系从非平衡到平衡这一过程<sup>[8]</sup>, 过强的预报了湍流通过激波后得到增强这一物理特征, 因而高估了热流. 本文采用改进的  $C2Re_H$  双方程湍流模型, 并利用 Fluent 的 user defined function (UDF) 功能, 控制转捩模型中的实验关联公式, 较好地解决了这一问题.

Langtry/Menter 以 Menter 的 SST 模型为基础, 提出了能够关联转捩起始点和转捩区长度的  $C2Re_H$  模型, 即增加了转捩因子和转捩起始厚度雷诺数两个参数的输运方程.

### 1) 间歇因子输运方程

$$\frac{5(\overline{C_i})}{5t} + \frac{5(\overline{C_i})}{5x_j} = P_{C_i} - E_{C_i} + \frac{5}{5x_j} \left[ \left( L + \frac{L_i}{R} \right) \frac{5C_i}{5x_j} \right] \tag{1}$$

### 2) 转捩动量厚度雷诺数输运方程

$$\frac{5(\overline{QRe_H})}{5t} + \frac{5(\overline{QRe_H})}{5x_j} = P_H + \frac{5}{5x_j} \left[ R_i \left( L + L_i \right) \frac{5\overline{Re_H}}{5x_j} \right] \tag{2}$$

在转捩源项当中,  $Re_H = f(\overline{Re_H})$ , 用来关联转捩起始点;  $F_{length} = f(\overline{Re_H})$  用来关联转捩长度.

$Re_H$  为转捩起始雷诺数, 在 Fluent 求解器中由实验数据关联公式给出.  $F_H$  为混合函数, 用以关掉边界层源项以及控制输运项  $\overline{Re_H}$ .

本文参考文献[6], 根据湍动度的不同, 定义不同的转捩起始雷诺数的经验关联

文献[8]采用转捩起始雷诺数关联经验公式求解  $Re_{it}$  和  $F_{length}$  来封闭转捩模型, 本文利用边界层 PSE(parabolic stability equation) 稳定性分析方法来处理.

2 PSE 稳定性方程

非线性 PSE 方程以小扰动假设为基础, 可直接用于三维问题求解, 计算中考虑到压力、密度、温度、黏度、导热系数等物理量的波动<sup>[7]</sup>. 通过引入半经验的  $\epsilon_{2N}$  模型等手段, 以适应实际转捩预测的需要. 正交曲线坐标系下的非线性 PSE 方程如下:

$$\varphi = q(s, n) \exp \left\{ i \left[ \int_{s_0}^s A(s) ds + B\# z + X\# t \right] \right\} \quad (4)$$

$\varphi = [Q, u, v, w, T]^T$  为扰动量;  $A$  和  $B$  分别为流向和展项的波数,  $X$  为扰动频率,  $s$  为流向的曲线坐标.  $q(s, n)$  为扰动幅值.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_s \frac{\partial \varphi}{\partial s} + V_n \frac{\partial \varphi}{\partial n} + V_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + V_{qc} = \\ & V_{ss} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + V_{nn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + V_{rr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \\ & V_{sn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial n} + V_{sr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial r} + V_{nr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial r} \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $V, V_i$  和  $V_{ij}$  均为  $5 \times 5$  算子矩阵.

$$\left[ A_2 \frac{d^2}{dn^2} + A_1 \frac{d}{dn} + A_0 \right] \varphi = \frac{B}{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{V_{ss}}{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{V_{sn}}{Re} \frac{d^2 \varphi}{dx ds dn} \quad (6)$$

这是一个特征值问题, 可以通过数值离散法求解. 方程的边界条件为

$$\begin{aligned} u = v = w = T = 0, y = 0; \\ u = v = w = T = 0, y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

为了精确求解边界层方程, 需要在边界层计算区域内布置足够多的网格点数. 本文方法可以在壁面法向方向布置 200~ 300 个点, 采用高精度谱方法对边界层扰动方程进行离散求解. 在非线性 PSE 推进求解过程中同时更新求解变量  $A_N$  和

$$A^{new} = A^{old} - \frac{i}{E} Q \left( u^* \frac{\partial u}{\partial n} + v^* \frac{\partial v}{\partial n} + w^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (7)$$

上式引入能量守恒条件来消除对  $n$  的相关性, 即

$$E = Q \left( |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 \right) \quad (8)$$

方程中上标  $*$  表示复数的共轭.

因此转捩预测可以通过将扰动增长率沿流向累积, 其积分形式如下:

$$N(X, s) = \int_{s_0}^s \left[ -\text{Im}(A) + \frac{1}{2E} \frac{dE}{ds} \right] ds \quad (9)$$

其中  $s_0$  为在给定频率下的第一个中性点位置. 这样, 通过  $N$  值大小可以预测转捩的发生.

上述方程详细的推导过程以及本文 PSE 计算方法的可靠性验证过程参见文献[9].

3 计算及讨论

3.1 PSE 扰动方程的应用

本文在求解的过程中, 首先采用 Fluent 对模型进行初步计算, 转捩模型采用通用的经验系数. 然后, 将计算得到的边界层外援参数传递给 PSE 求解器, 对边界层流动进行稳定性分析. 在这一步, 最重要的就是利用边界层分析的得到的起始不稳定点和转捩点位置的参数来修正临界转捩雷诺数  $Re_{it}$  和转捩起始雷诺数  $Re_{tr}$ , 也就是利用这一步来代替 Fluent 转捩模型的经验系数对转捩模型的封闭. 最后, 利用 UDF 功能, 将修正的转捩关联公式代入到 Fluent 的转捩因子和动量厚度雷诺数的输运方程中对流场继续进行求解, 直至收敛. 图 1 表示求解过程示意图.

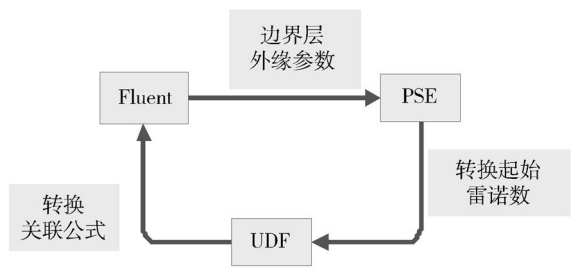


图 1 求解过程示意图

Fig. 1 Sketch of the solution process

3.2 算例 1<sup>[10]</sup>

如图 2 所示, 锥角为  $7^\circ$ , 锥长为 2.35 m, 头部半径  $R = 5\text{ mm}$ ,  $Ma_1 = 7.15$ ,  $p_1 = 7722\text{ Pa}$  (零压力梯度),  $T_1 = 214\text{ K}$ , 壁面温度  $T_w = 300\text{ K}$ . 采用二维轴对称计算方法, 网格数为  $300 \times 200$ , 壁面  $y^+ < 0.5$ . 进口  $T_u = 0.01\%$ .

研究表明<sup>[3]</sup>, 当来流马赫数小于 4 时, 流动失稳的主控模态是一阶模态(T2S 模态), 当来流马赫数大于 4, 转捩过程主控于二阶模态扰动. 对于锥体高超声速流动模型, 由于锥体弓形激波后的

流场流速相对较低, 找到的不稳定的第二模式是比较困难的, 因此为了研究边界层流动的不稳定性, 本文利用 PSE 方程针对初始扰动频率为  $200\text{ kHz}$  下对第一模态扰动波(T2S 波)进行了计算, 得到流向波数沿流向的分布(图 3), 确定起始不稳定点的位置在  $x=0.35$ , 最不稳定点的位置在  $x=0.65$  处, 在该处本文的计算结果为  $N=7.2$ (图 4). 根据公式(3)计算这两个位置上的转捩临界雷诺数  $Re_{Ht}$  和转捩起始雷诺数  $Re_H$ , 并最终确定  $F_{length}$ , 这样就可以将这 3 个参数重新带入输运方程, 通过 DUF 进行编译处理之后, 继续对整个流场求解区域迭代求解, 得到图 5 中所示的壁面热流量分布. 可以看到, 传统的计算方法对转捩过程的模拟存在着严重的不足, 而直接采用转捩模型, 对转捩区长度以及转捩过程壁面热流量的预测偏差较大, 转捩过渡区偏小, 热流量明显偏高, 需要不断调整转捩模型的经验参数. 当采用本文转捩关联修正的方法, 由于能够给定较为准确的转捩起始雷诺数, 使得转捩过程的发生及发展更趋于合理化, 转捩过渡区的长度和转捩后的热流量都更趋于实验结果, 这对于模拟高超声速复杂波系结构、附面层分离流动以及气动加热现象都是非常有益的.

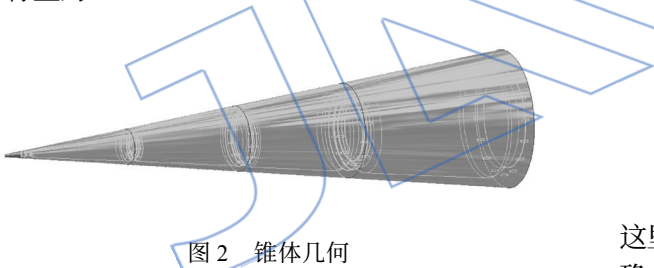


图 2 锥体几何  
Fig. 2 Geometry of the cone

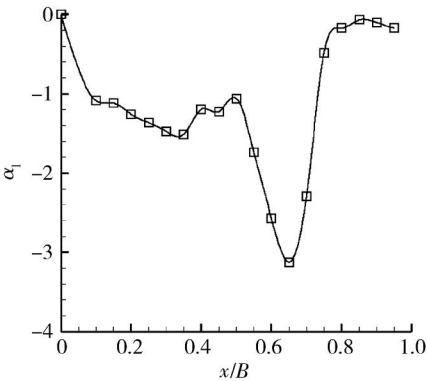


图 3 锥体表面沿流向波数分布  
Fig. 3 Distribution of streamwise wave number on surface of cone

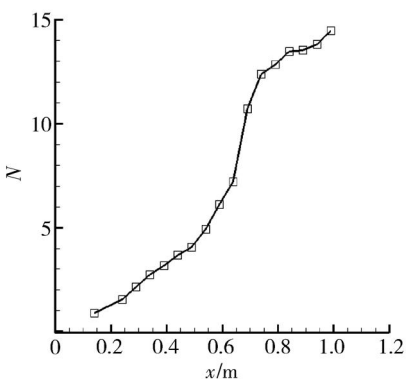


图 4 锥体壁面  $N$  值分布  
Fig. 4 Distribution of factor  $N$  on surface of cone

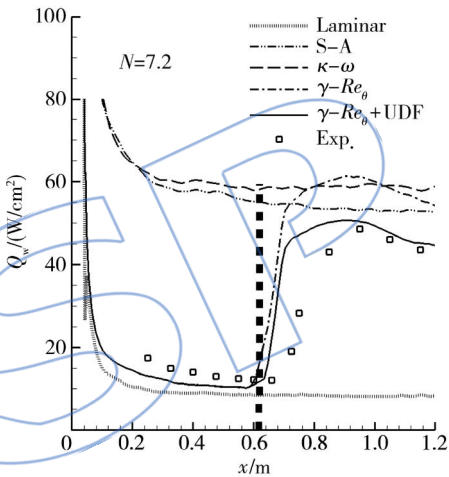


图 5 锥体壁面热流密度分布  
Fig. 5 Distribution of heat flux density on the cone surface

这里需要指出, 本文采用的  $N$  值只要能够尽量准确, 即得到的转捩动量厚度雷诺数只要能够更准确一些, 对转捩过程的计算就能够有所改善, 这样就大大降低了设计者对经验参数的依赖程度. 目前存在的问题之一是 PSE 分析过程需要在不同疏密程度的网格下, 通过打靶法求出特征矩阵的特征值, 找出特征值虚部最小且在不同网格下重合的特征值, 以此表示流场中的最不稳定点, 因此当网格点增加  $n$  倍, 矩阵大小成  $n^2$  倍增长, 计算时间就会增长  $n^2$  倍, 本文 PSE 实际耗费的时间大致相当于一次流场计算的时间. 提高 PSE 求解速度是本文下一步要解决的问题.

3.3 算例 2<sup>[11]</sup>

超声速气流流经一块斜板, 经压缩产生激波, 该激波入射到平板附面层, 产生激波/附面层干扰, 其斜面长度为  $8.89 \times 10^{-2}\text{ m}$ , 平板长度  $L$  为  $30.48 \times 10^{-2}\text{ m}$ . 斜板角度  $A$  与对应的斜板前缘  $C$

坐标值如图 6 和表 1 所示. 进口条件为雷诺数  $Re = 1.5 \times 10^5$  Pa, 马赫数  $Ma = 2.96$ , 总温  $T^* = 247$  K, 总压  $p^* = 4.07 \times 10^5$ , 壁面绝热. 计算网格数为  $200 \times 200$ , 壁面  $y^+ < 1$ .

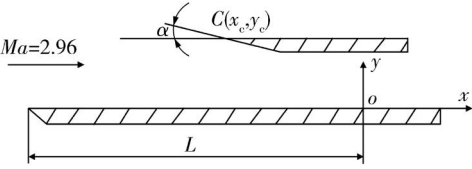


图 6 计算模型  
Fig. 6 Computational model

表 1 斜板角度 A 和前缘坐标 (xc, yc)

| Table 1 Angle A of flat slope and coordinate (xc, yc) at leading edge |                       |                       |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| A/(b)                                                                 | xc/10 <sup>-2</sup> m | yc/10 <sup>-2</sup> m |
| 9.39                                                                  | - 9.144               | 4.674                 |
| 12.27                                                                 | - 9.500               | 5.436                 |

从图 7 所示的壁面压力的计算结果与实验比较来看, 由于气流通过激波时, 压强突越上升, 激波之后气流通过边界层内的亚声速区域逆主流前传, 使激波入射点附近上游的压力升高, 于是出现了激波入射点附近的边界层分离现象. 针对这种激波与边界层干扰造成的分离流动, 本文采用 Fluent 的 C2ReH 湍流模型能够得到准确的激波后压力的升高值, 但是对于分离区的分离点和再附点的位置以及分离区长度的模拟仍有一定的偏差. 特别是对于  $A = 12.27^\circ$  的激波入射角度, 预报的分离区偏大, 分离点的位置明显提前. 本文采用上述方法, 对边界层流场进行稳定性分析, 选取  $N = 8.0$ , 得到边界层失稳点处的转捩起始雷诺数, 采用 Fluent 经过修正的 C2ReH 湍流模型, 得到了准确的压力升高值 ( $A = 9.39^\circ$  时,  $p/p_0 = 3.85$ ,  $A = 12.27^\circ$  时,  $p/p_0 = 4.9$ ), 对分离区的分离点和再附点的位置以及分离区长度的计算结果与实验吻合的很好, 特别是压力出现突增的位置、压力平台的压力值、平台区的大小以及之后的压力稳定值, 本文采用对 C2ReH 模型修正的计算结果都要好于传统湍流模型. 从文献[8]和图 8 干扰区密度实验和计算结果的比较来看, 本文计算方法准确地计算出了激波入射到平板上的层流边界层后的激波反射、膨胀、再压缩的激波反射结构, 计算与实验结果吻合较好.

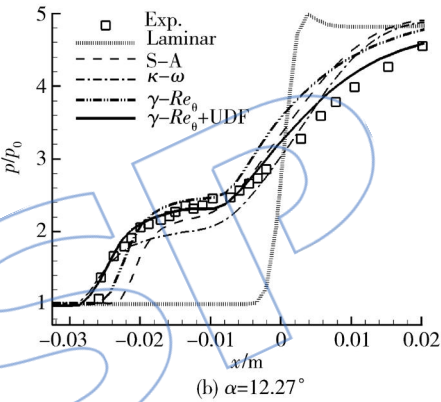
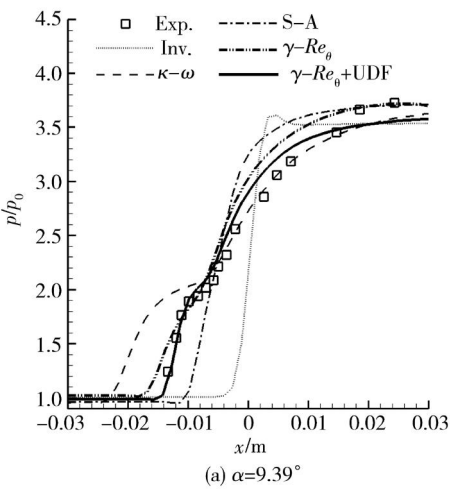


图 7 平板壁面压力分布  
Fig. 7 Distribution of pressure on flat wall surface

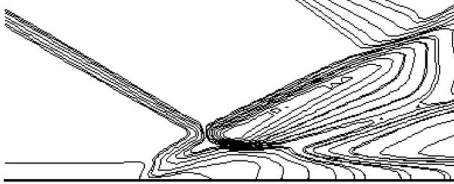


图 8 干扰区密度分布计算结果  
Fig. 8 Computational result of density distribution within interaction region

3.4 算例 3<sup>[12]</sup>

带裙部的高超声速轴对称压缩拐角流动是验证计算流体动力学 (CFD) 预测高超声速流动物面压力和热流能力的典型例子. 来流条件及物面条件为:  $T_w = 311$  K,  $Ma_1 = 7.05$ ,  $p_1 = 576.0$  Pa,  $T_1 = 81.2$  K; 裙部的倾角为  $35^\circ$ , 来流边界层厚度在拐角分离点前为 2 cm. 采用二维轴对称计算方法, 计算网格数为  $200 \times 200$ , 壁面  $y^+ < 0.5$ .

图 9 是典型的高超声速流动拐角压缩流动模型. 在 PSE 边界层稳定性计算中选  $N = 8.0$ , 联合流场求解得到了图 10 所示的壁面压力和图 11 所示

的壁面热流密度分布图, 并与实验结果以及没有采用 PSE 进行转捩模型修正的结果进行了对比分析. 比较可以看到, 应用 PSE 对转捩关联进行修正后, 得到了更为准确的压力分布和热流峰值, 特别是对于峰值位置的预测更为准确, 同时对峰值后压力(热流)的过冲现象描述也更为清晰, 与

没有进行修正的转捩模型相比具有明显的优越性, 这对于高超飞行器的热防护设计来说是非常有意义的.

4 结 论

针对高超声速的转捩流动现象, 将 PSE 扰动方程与 N2S 方程联合求解, 结合半经验的  $e2N$  方法找出边界层最不稳定点的位置, 修正 Fluent 软件  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  湍流模型中的转捩关联公式的转捩起始动量厚度雷诺数、临界雷诺数以及转捩区长度函数, 在对高超声速转捩流动进行数值模拟的过程中减小了对实验和经验的依赖. 对于高超声速流场中锥体表面转捩流动以及由激波/边界层强烈的相互干扰所导致的复杂流动, 应用  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  湍流模型和转捩准则关联都能得到更为准确的超声速和高超声速流动计算结果.

参考文献:

[ 1 ] 董明, 周恒. BL 模式在超声速湍流边界层中应用的检验 [J]. 空气动力学报, 2009, 27(1): 102-107.  
DONG Ming, ZHOU Heng. Examination of the application of BL-model in supersonic turbulent boundary layers [J]. Acta Aerodynamic Sinica, 2009, 27(1): 102-107. (in Chinese)

[ 2 ] Papp J L, Dash S M. A rapid engineering approach to modeling hypersonic laminar to turbulent transitional flows for 2D and 3D geometries [R]. AIAA Paper 2008-22600, 2008.

[ 3 ] 袁湘江, 周恒, 赵耕夫. 超声速高超声速球锥绕流的边界层稳定性特点初探 [J]. 空气动力学报, 1999, 17(1): 98-104.  
YUAN Xiangjiang, ZHOU Heng, ZHAO Gengfu. Stability characteristics of the boundary layer of an axisymmetric blunt nosed cone in the supersonic and hypersonic flow [J]. Acta Aerodynamic Sinica, 1999, 17(1): 98-104. (in Chinese)

[ 4 ] 杨云军, 马汉东, 周传江. 高超声速流动转捩的数值研究 [J]. 宇航学报, 2006, 27(1): 82-88.  
YANG Yunjun, MA Handong, ZHOU Chuanjiang. Numerical research on supersonic flow transition [J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(1): 82-88. (in Chinese)

[ 5 ] 蔡巧言, 谭慧俊. 前体边界层状态对高超声速进气道流动结构及性能的影响 [J]. 航空动力学报, 2008, 23(4): 6992-705.  
CAI Qiaoyan, TAN Huijun. Effects of the forebody boundary layer state on flow structure and performance of hypersonic inlets [J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(4): 6992-705. (in Chinese)

[ 6 ] 董昊, 王成鹏, 程克明. 喇叭式高超进气道流动特性及性能分析 [J]. 航空动力学报, 2009, 24(11): 2422-2435.  
DONG Hao, WANG Chengpeng, CHENG Keming. Investigation of flow characteristic and performance on the

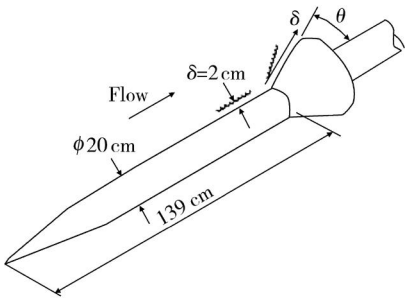


图 9 高超流动拐角压缩几何模型

Fig. 9 Geometry model of hypersonic compression corner

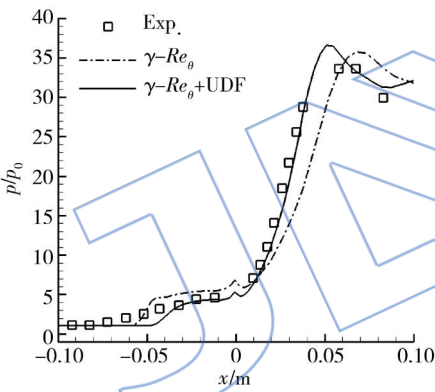


图 10 壁面压力

Fig. 10 Pressure on wall surface

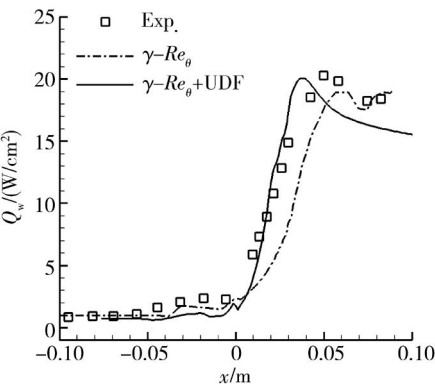


图 11 壁面热流密度

Fig. 11 Heat flux density on wall surface

- "Jaws" hypersonic inlet[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(11): 2422-2435. (in Chinese)
- [ 7 ] Roy C J, Blottner F G. Assessment of one and two equation turbulence model for hypersonic transitional flows[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2001, 38(5): 699-711.
- [ 8 ] Krause M, Behr M, Ballmann J. Modeling of transition effects in hypersonic intake flows using a correlation-based intermittency model [R]. AIAA Paper 2008-22598, 2008.
- [ 9 ] 董学智. PSE 方法在叶片表面流动稳定性预测中的应用研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.  
DONG Xue zhi. Application research of PSE approach in flow stability prediction on blade surface[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007. (in Chinese)
- [ 10 ] Maclean M, Mundy E, Johnson H. Comparisons of transition prediction using PSE-Chem to measurements for a shock tunnel environment [R]. AIAA Paper 2007-24490, 2007.
- [ 11 ] 雷雨冰, 梁德旺, 黄国平. 超声速流中激波/湍流附面层干扰数值模拟[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(1): 125.  
LEI Yubing, LANG Dewang, HUANG Guoping. Numerical study of shock wave turbulent boundary layer interaction in supersonic flows[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 36(1): 125. (in Chinese)
- [ 12 ] 贺旭照. 高超声速飞行器气动力气动热数值模拟和超声速流动的区域推进求解[D]. 绵阳: 中国空气动力研究所, 2007.  
HE Xuzhao. Numerically simulate aerodynamic force and heat of hypersonic vehicles and region marching method of supersonic flow simulation[D]. Mianyang: China Aerodynamics Research and Development Center, 2007. (in Chinese)