

文章编号: 1000-8055(2010)07-1664-06

螺旋锥齿轮啮合刚度及参数振动稳定性研究

王延忠^{1,2}, 周元子¹, 李国权³, 郭梅³

- (1. 北京航空航天大学 机械工程及自动化学院, 北京 100191;
2. 重庆大学 机械工程学院 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044;
3. 中国航空工业集团公司 沈阳发动机设计研究所, 沈阳 110015)

摘 要: 准确计算时变啮合刚度是齿轮系统动力学研究的基础. 针对航空高速重载螺旋锥齿轮, 基于轮齿接触分析(TCA)和轮齿加载接触分析(LTCA)通过计算瞬时接触点的轮齿变形柔度建立了时变啮合刚度数值模型; 将齿轮时变啮合刚度在一个啮合周期内视为逐段线性, 基于 Floquet 理论推导了含时变刚度参数振动系统的状态转换矩阵解析式; 通过修正小轮机床调整参数设计三种接触情况, 分析了算例齿轮在相同载荷工况下的接触轨迹、传动误差、重合度和时变啮合刚度; 采用二自由度齿轮系统动力学模型考察工作转速范围内的周期运动不稳定区间, 分析了时变啮合刚度对螺旋锥齿轮系统参数振动稳定性的影响.

关 键 词: 螺旋锥齿轮; 参数振动; 加载接触分析; 时变啮合刚度; Floquet 理论; 稳定性
中图分类号: V231.92 **文献标识码:** A

Mesh stiffness function and stability analysis for parametric vibration of spiral bevel gears

WANG Yanzhong^{1,2}, ZHOU Yuanzi¹, LI Guoquan³, GUO Mei³

- (1. School of Mechanical Engineering and Automation,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. The State Key Laboratory of Mechanical Transmission,
College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
3. Shenyang Aeroengine Research Institute,
Aviation Industry Corporation of China, Shenyang 110015, China)

Abstract: Theoretical study of the time-varying mesh stiffness is critical to geared system dynamics. For spiral bevel gears at high speed and heavy load in aeroengines, a numerical solution was applied to investigate the compliance and stiffness for each instantaneous contact, based on the static deflections and directional forces obtained by TCA (tooth contact analysis) and LTCA (loaded tooth contact analysis). Analytical form for state transition matrix of parametrical excited system including periodically varying stiffness was derived from the assumption that the time-varying mesh stiffness is piecewise linearity. By adjusting the pinion machine tool settings, different contact patterns, transmission error, contact ratio and mesh stiffness under the same load condition for a pair of spiral bevel gears were treated. The Floquet theorem was applied, therefore, a program to calculate the mag-

收稿日期: 2010-02-03; 修订日期: 2010-04-20

基金项目: 国家自然科学基金(50875009); 航空科学基金(20090451009); “十一五”基础科研重点项目(B0620060424);
机械传动国家重点实验室开放基金(SKLM-T-KFKT-200813)

作者简介: 王延忠(1963-), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士, 主要从事机械传动和机械制造方面研究.

nitudes of the characteristic multipliers was used to investigate the instability among the working rotation speed interval, based on a two-degree-of-freedom dynamic system. The influence of time-varying mesh stiffness on parametric vibration stability of the spiral bevel geared system was investigated.

Key words: spiral bevel gears; parametric vibrations; loaded tooth contact analysis; time-varying mesh stiffness; Floquet theorem; stability

螺旋锥齿轮是航空发动机、直升机减速器中的重要部件。在高速重载工况下,螺旋锥齿轮啮合接触点位置和法向接触力方向不断变化,参与啮合的轮齿对数也发生变化,使得啮合刚度具有时变特性。因此,航空螺旋锥齿轮振动可以归结为时变啮合刚度引起的参数振动^[1]问题。

由于螺旋锥齿轮的几何复杂性,将其时变啮合刚度简化为方波或正弦波等是不合适的。Wang 和 Lim^[2]将时变刚度考虑为均值和幅值的和,其中幅值部分由基频、相位描述;Mennem^[3]基于有限元分析,计算不同载荷下的轮齿接触柔度获得时变刚度;Vaishya 和 Singh^[4]将啮合刚度在一个啮合周期内视为逐段线性,借助 Floquet 理论研究了直齿轮扭振的动力学稳定性;Lin 和 Parker^[5]分析了重合度对行星传动系统不稳定区间的影响。

本文针对高速重载航空螺旋锥齿轮,在轮齿接触分析(tooth contact analysis,简称 TCA)和轮齿加载接触分析(loaded tooth contact analysis,简称 LTCA)^[6]的基础上建立了一个啮合周期内的时变刚度模型,给出了含时变刚度的参数振动系统状态转换矩阵解析式,基于二自由度齿轮动力学模型^[7],考察了相同工况下不同加工参数齿轮的接触情况、时变啮合刚度和参数振动稳定性,为航空螺旋锥齿轮的动力学设计提供参考。

1 时变啮合刚度建模

1.1 轮齿接触信息的获取

螺旋锥齿轮 TCA 和 LTCA 由美国格里森公司于 1978 年和 1981 年提出,用于求解齿轮副在轻载和加载时的几何和力学参数。基于轻载和加载情况下的接触点位置和法向载荷大小可以计算每一瞬时的轮齿柔度,从而在一个啮合周期上建立时变啮合刚度模型。

如图 1, TCA 和 LTCA 接触点是在齿轮轴截面二维坐标系 $S_1(O_1, X, Y)$ 下表示的。 O_1 为大轮根锥母线中点, X 轴为大轮根锥母线, Y 轴过齿

面中点 M 与 X 轴垂直。设 M 和任一接触点 m 到大轮轴线的距离为 R_M 和 R_m , 沿大轮轴线到轴交点的距离为 L_M 和 L_m 。则 m 可写为

$$\begin{cases} X_m = R_m \sin \Gamma + L_m \cos \Gamma - R_M \sin \Gamma - L_M \cos \Gamma \\ Y_m = R_m \cos \Gamma - (L_m + Z_t) \sin \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

式中 Γ 为大轮节锥角, Z_t 为大轮根锥顶点到轴交点的距离, Γ, Z_t, R_M, L_M 可由切齿计算^[8]给出。

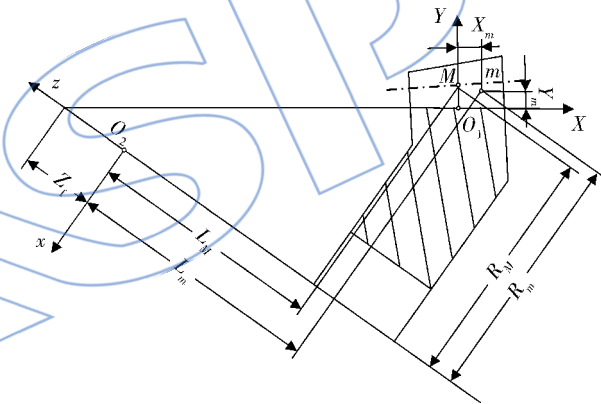


图 1 接触点信息的坐标转换
Fig. 1 Coordinate transformation of the contact points

刚度计算在三维坐标系 $S_2(O_2, x, y, z)$ 下进行。 O_2 为轴交点, x 轴为小轮轴线, y 轴与大轮轴线垂直。则 m 可写为

$$\begin{cases} x_m = R_m \cos \gamma \\ y_m = R_m \sin \gamma \\ z_m = -L_m \end{cases} \quad (2)$$

式中 γ 为接触点瞬时的轮坯转角,可由 LTCA 计算给出。联立式(1)和式(2),即可得出啮合轮齿在三维坐标系下的接触信息。

1.2 啮合刚度数值建模

将一对轮齿间的啮合关系简化为线性弹簧,其刚度为 $k(t)$ 。对某一接触瞬时,有标量式

$$F = k \cdot \delta \quad (3)$$

式中 F 为接触力, k 为该点的瞬时啮合刚度, δ 为接触力造成的变形.

如图 2, 在 $S_2(O_2, x, y, z)$ 下, K_1 和 K_2 分别是空载和加载接触点, 将其坐标和接触力记为矢量 μ_1, μ_2 和 F_1, F_2 . 则有

$$\delta = \frac{F_2 - F_1}{|F_2 - F_1|} \cdot (\mu_2 - \mu_1) \tag{4}$$

$$k = \frac{|F_2 - F_1|}{\delta} = \frac{|F_2 - F_1|^2}{(F_2 - F_1)(\mu_2 - \mu_1)} \tag{5}$$

TCA 和 LTCA 将一个啮合周期分为 10 个子区间, 由式(5)求出一对轮齿在每个瞬时的啮合刚度, 再考虑发生啮合的三对轮齿得到综合刚度^[9].

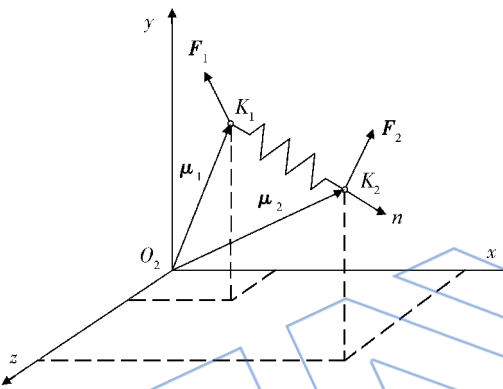


图 2 整体三维坐标系下的啮合刚度

Fig. 2 Three dimensional representation of mesh stiffness

2 时变刚度系统稳定性分析

对以 T 为周期的时变动力学系统

$$\dot{d}(t) = A(t)d(t) + f(t) \tag{6}$$

式中 $d(t) = [x(t), \dot{x}(t)]^T, f(t) = [F(t), 0]^T, x$ 和 F 表示位移和外力.

由 Floquet 理论^[10], 系统在任意时刻 t 的解可以写为状态转换矩阵 Φ 的形式, 即

$$d(t) = \Phi(t, 0)d(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)f(\tau) d\tau \tag{7}$$

检查 $\Phi(T, 0)$ 的特征值 λ (Floquet 乘子), 若有 Floquet 乘子的模大于 1, 则系统是不稳定的.

包含时变啮合刚度的螺旋锥齿轮自由振动系统表示为

$$M\ddot{x} + C(t)\dot{x} + K(t)x = 0 \tag{8}$$

将啮合周期 T 分为 10 个子区间, 则 $\Phi(T, 0)$ 可由每个子区间的状态转换矩阵合成, 即

$$\Phi(T, 0) = \Phi(T, t_9)\Phi(t_9, t_8) \dots \Phi(t_1, 0) \tag{9}$$

认为每个子区间内的啮合刚度恒定^[11]. 则任一个子区间的时段 $(t, 0)$ 内动力学方程为时不变系统, 系统在模态坐标下的解为

$$q_j(t) = e_j(h_jc_j + k_js_j) \tag{10}$$

式中 ζ_j, ω_{d_j} 和 ω_j 分别表示阻尼系数、有阻尼固有频率和无阻尼固有频率, $e_j = e^{-\zeta_j\omega_j t}, c_j = \cos \omega_{d_j} t, s_j = \sin \omega_{d_j} t$.

基于模态迭加法, 求出模态矩阵 U 后, 利用坐标变换 $x = Uq$, 写出系统在实际坐标下的解

$$x(t) = \sum_{j=1}^N U(h_jc_j + k_js_j)e_j \tag{11}$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^N U(-h_j\omega_{d_j}s_j + k_j\omega_{d_j}c_j)e_j + \sum_{j=1}^N U(h_jc_j + k_js_j)p_je_j \tag{12}$$

式中 $p_j = -\zeta_j\omega_j$.
 t 时刻的系统自由响应可由 $\Phi(t, 0)$ 算得

$$[x(t), \dot{x}(t)]^T = \Phi(t, 0)[x(0), \dot{x}(0)]^T \tag{13}$$

由式(11)到式(13)可得 $\Phi(t, 0)$ 的解析式

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中

$$\Phi_{11} = U[e_jc_j]B + U[e_js_j]PQB$$

$$\Phi_{12} = U[e_js_j]PB$$

$$\Phi_{21} = U[-e_j\omega_{d_j}s_j]B + U[p_je_jc_j]B +$$

$$U[e_j\omega_{d_j}c_j]PQB + U[p_je_js_j]PQB$$

$$\Phi_{22} = U[e_j\omega_{d_j}c_j]PB + U[p_je_js_j]PB$$

其中 $P = [\omega_{d_j}]^{-1}, Q = [\zeta_j\omega_j], B = U^T M$.

应用式(14)分别求出每个子区间的状态转换矩阵, 再应用式(9)求出 $\Phi(T, 0)$, 通过 Floquet 乘子分析螺旋锥齿轮系统的参数振动稳定性.

3 算例模型

某型发动机中央传动螺旋锥齿轮参数如表 1.

通过调整小轮加工参数获得三种不同的啮合接触情况, 对应的小轮凹面加工参数如表 2.

表 1 齿轮设计参数

Table 1 Pinion and gear design data

设计参数	小齿轮	大齿轮
齿数	35	47
轴交角/(°)	90	
中点螺旋角/(°)	35	35
旋向	左旋	右旋
全齿高/mm	7.32	7.32
模数/mm	3.875	
齿面宽/mm	21	21
节锥角	36°40′	53°20′

表 2 小轮凹面机床调整参数

Table 2 Machine tool settings for pinion concave

调整参数	方案 A	方案 B	方案 C
刀尖半径/mm	102.74	101.98	101.60
齿形角/(°)	18	18	18
径向刀位/mm	101.51	100.57	93.96
角向刀位/(°)	60.46	60.70	61.01
垂直轮位/mm	2.00	-0.16	-3.21
轴向轮位/mm	11.35	9.76	4.94
床位/mm	-6.63	-5.70	-2.89
机床滚比	1.83	1.80	1.68

分析小轮扭矩为 400 N·m 时三种方案对应的轮齿接触情况和时变啮合刚度. 基于文献[7]的二自由度齿轮动力学模型, 分析齿轮转速引起的时变刚度周期 T 变化对系统动力稳定性的影响.

4 结果分析

4.1 轮齿接触情况

图 3 所示为算例齿轮在小轮扭矩 400 N·m 时加载接触轨迹在大轮轴截面二维坐标系上的表示. 三种方案均为在齿面上呈较大倾斜的高重合度设计^[12], 方案 A 的接触路径和根锥垂线夹角约 77°, 方案 B 和 C 约 76°. 偏小端部分的接触迹几乎一致, 方案 C 距边缘最近; 偏大端部分的接触迹略微分开, 方案 A 和 B 弯曲, 而方案 C 近似为直线, 距边缘也最近. 三种方案在相同载荷和近似接触迹走向下的工作重合度逐步变大.

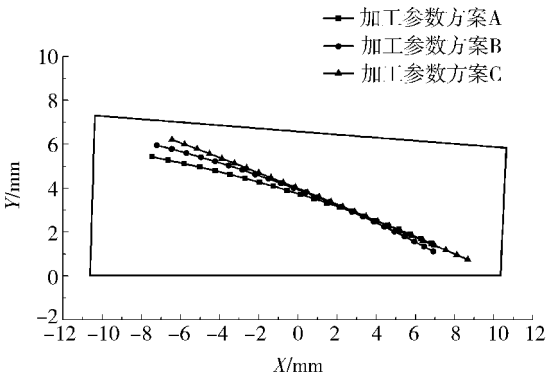


图 3 不同加工参数对应的齿面加载接触轨迹
Fig.3 Loaded contact path for different pinion settings

图 4 上部所示为单齿几何传动误差, 下部为承载传动误差. 三种方案下的几何传动误差曲线逐步变宽, 幅值逐步变小, 都呈基本对称的二阶抛物线. 承载传动误差波动幅值(最大最小值之差)也逐步变小, 方案 C 较方案 A 降低了约 7%.

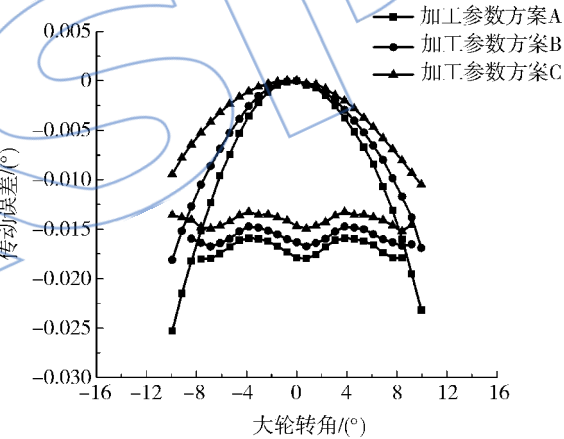


图 4 不同加工参数对应的空载和加载传动误差
Fig.4 Transmission error for different pinion settings

图 5 所示为中间啮合齿对承担载荷百分比. 三种方案下的中间齿对承担载荷逐步变小, 即更多的载荷被即将退出和即将进入啮合的齿对承担. 齿面赫兹接触应力也逐步变小, 为 1 579, 1 476, 1 386 MPa, 方案 C 较方案 A 降低约 12%.

4.2 时变啮合刚度

图 6 所示为小轮扭矩 400 N·m 时, 三种方案对应的算例齿轮综合啮合刚度曲线. 方案 A 啮合刚度变化最为平稳, 均值也最小为 14 261 N/mm; 方案 B 刚度变化最为剧烈, 齿面中点附近呈现较大阶跃, 均值为 12 903 N/mm; 方案 C 刚度变化较为剧烈, 且出现两个波峰, 均值为 13 311

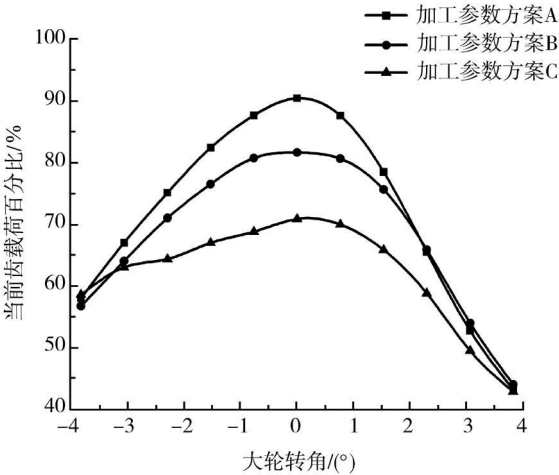


图 5 不同加工参数对应的中间齿对承担载荷百分比
Fig. 5 Load sharing for different pinion settings

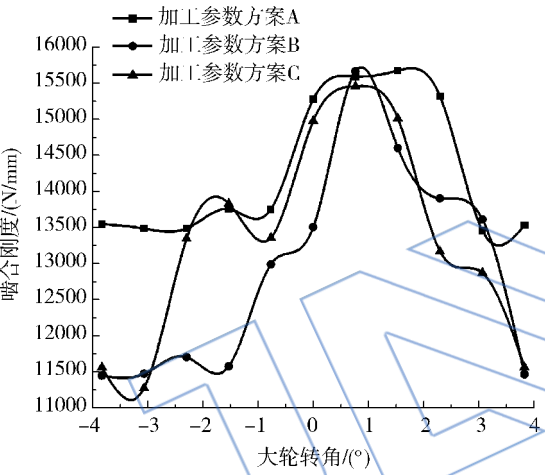


图 6 不同加工参数对应的时变啮合刚度
Fig. 6 Mesh stiffness for different pinion settings

对于表 2 的机床调整参数, 方案 A 在小轮扭矩 $400\text{N}\cdot\text{m}$ 时具有最好的参数振动稳定性, 发生不稳定响应的大轮转速在 $13\,396\text{r/min}$ 和 $15\,093\text{r/min}$ 附近.

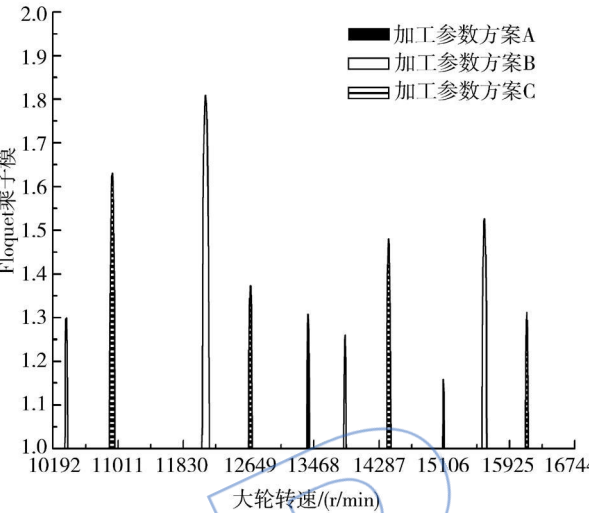


图 7 不同加工参数对应的工作转速范围内不稳定区间
Fig. 7 Instability versus gear speed for different pinion settings

5 结 论

- 1) 时变啮合刚度对螺旋锥齿轮参数振动稳定性有明显影响. 变化平稳且均值较大的时变啮合刚度, 将使螺旋锥齿轮获得较好的动力稳定性.
- 2) 一般来说, 提高工作重合度对改善螺旋锥齿轮动态特性是有利的^[12], 但时变啮合刚度变化的平稳性与工作重合度并没有必然关系. 在相同载荷和近似接触迹走向前提下, 通过调整小轮加工参数提高了算例齿轮工作重合度, 但啮合刚度并没有明显变化规律.
- 3) 较好的参数振动稳定性并不意味着振动噪声水平小, 算例齿轮在方案 A 时不稳定区间最小, 但传动误差波动幅值却最大, 需要进一步研究时变刚度和传动误差作用下的动力学响应.

参考文献:

[1] 王建军, 洪涛, 吴仁智, 等. 齿轮系统参数振动问题研究综述[J]. 振动与冲击, 1997, 16(4): 69-73.
WANG Jianjun, HONG Tao, WU Renzhi, et al. Researches on parametric vibration of gear transmission systems- a review[J]. Journal of Vibration and Shock, 1997, 16(4): 69-73. (in Chinese)

N/mm. 文献[3]中采用有限元分析算得螺旋锥齿轮在约 $340\text{N}\cdot\text{m}$ ($3000\text{in}\cdot\text{lb}$) 下的平均刚度为 $12\,540\text{N/mm}$, 和本文数值较为接近.

4. 3 参数振动稳定性

将三种方案的啮合刚度代入文献[7]的二自由度模型. 图 7 所示为三种方案下模大于 1 的 Floquet 乘子, 即小轮扭矩 $400\text{N}\cdot\text{m}$, 大轮工作转速 $10\,192\sim 16\,744\text{r/min}$ 范围内的参数振动不稳定区间.

方案 A 时算例齿轮有两组不稳定区间, 占整个工作转速范围的 0. 6%; 方案 B 和 C 时有四组不稳定区间, 占整个工作转速范围的 2. 9% 和 2. 4%. 可以看出, 平稳且均值较大的时变啮合刚度, 将使螺旋锥齿轮获得较好的参数振动稳定性.

- [2] Wang J, Lim T C. Effect of tooth mesh stiffness asymmetric nonlinearity for drive and coast sides on hypoid gear dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319: 885-903.
- [3] Mennem R C. Parametrically excited vibrations in spiral bevel geared systems[D]. West Lafayette: Purdue University, 2004.
- [4] Vaishaya M, Singh R. Analysis of periodically varying gear mesh systems with coulomb friction using floquet theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243 (3): 525-545.
- [5] Lin J, Parker R G. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 249(1): 129-145.
- [6] 王延忠, 周云飞, 周济, 等. 考虑轮齿制造误差的螺旋锥齿轮加载接触分析研究[J]. 机械科学与技术, 2002, 21(2): 224-227.
- WANG Yanzhong, ZHOU Yunfei, ZHOU Ji, et al. Loaded contact analysis of bevel gear tooth based on tooth manufacture error[J]. Mechanical Science and Technology, 2002, 21(2): 224-227. (in Chinese)
- [7] Cai Y, Hayashi T. The linear approximated equation of vibration of a pair of spur gears (theory and experiment) [J]. Transactions of ASME, Journal of Mechanical Design, 1994, 116(6): 558-564.
- [8] 曾韬. 螺旋锥齿轮设计与加工[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1989.
- ZENG Tao. Design and manufacture of spiral bevel gears [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1989. (in Chinese)
- [9] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- LI Runfang, WANG Jianjun. Dynamics of gear transmission systems [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)
- [10] Nayfeh H, Mook D T. Nonlinear oscillations[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [11] 胡海岩. 分段光滑机械系统动力学的进展[J]. 振动工程学报, 1995, 8(4): 331-341.
- HU Haiyan. Advances in dynamics of piecewise smooth mechanical systems[J]. Journal of Vibration Engineering, 1995, 8(4): 331-341. (in Chinese)
- [12] 邓效忠, 方宗德, 魏冰阳, 等. 高重合度弧齿锥齿轮的性能分析与实验研究[J]. 航空动力学报, 2003, 18(6): 744-748.
- DENG Xiaozhong, FANG Zongde, WEI Bingyang, et al. Analysis of meshing behavior and experiments of spiral bevel gears with high contact ratio[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(6): 744-748. (in Chinese)