

文章编号:1000-8055(2011)03-0593-10

基于虚位移原理的宏细观统一本构模型

高希光, 宋迎东, 孙志刚

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 结合虚位移原理和宏细观统一本构模型的基本理论提出了一种宏细观统一本构模型. 该模型将宏观位移表示为宏观应变与细观位移的线性组合, 然后应用虚位移原理建立基本方程, 采用有限元法进行求解, 得到宏观应变增量和应力增量的关系式. 通过算例分析对比了模型与 FVDAM(finite volume directe average method)的应力场和计算效率, 结果表明模型不仅具有较高的精度而且提高了计算效率. 采用模型预测了复合材料的偏轴弹性模量和弹塑性应力应变响应. 其中偏轴弹性模量与转轴公式计算结果相符, 而弹塑性应力应变响应与实验结果吻合.

关 键 词: 复合材料; 宏细观统一本构模型; 虚位移原理; 细观应力场; 偏轴弹性模量

中图分类号: TB33

文献标识码: A

Macro and micro scale coupled constitutive model based on virtual displacement principle

GAO Xi-guang, SONG Ying-dong, SUN Zhi-gang

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A novel constitutive model was developed for composite by combining the theory of macro and micro scale coupled constitutive model and the virtual displacement principle. The displacement within the subcell was expanded in terms of the global strains and the fluctuating displacements. Then the virtual displacement principle was used to construct the basic equations of the model. The periodic boundary conditions were employed to solve the basic equations. Finally the relation between global stress increment and global strain increment was deduced. Both the accuracy and efficiency of the new model were verified numerically by comparing with finite volume directe average method (FVDAM). The global elastic modulo and transverse elastic-plastic stress-strain responses were also predicted by the new model. The results show that predictions of the model are in good agreement with transformation equations and experiment.

Key words: composite; macro and micro scale coupled constitutive model;

virtual displacement principle; local stress;

deflexion effective elastic modulo

纤维增强复合材料(特别是金属基复合材料和陶瓷基复合材料)具有较高的比强度、比刚度以及良好的抗蠕变、耐高温性能,在航空发动机领域

具有重要的应用价值. 然而纤维增强复合材料细观结构复杂. 纤维体积比、形状、排列方式以及基体自身的性能都会对复合材料的性能产生较大的

收稿日期:2010-02-27; 修订日期:2010-11-04

基金项目:南京航空航天大学青年科技创新基金(NS2010123); 江苏省博士后基金(0902013C); 国家重点基础研究发展计划

作者简介:高希光(1981-),男,福建沙县人,副教授,博士,研究方向为航空发动机结构、强度与振动.

影响.复合材料的本构模型必须能够反映上述影响因素.

宏细观统一本构模型是一种跨尺度的分析方法.该方法将多相材料细观量与宏观量联系起来,不仅能考虑组分材料、含量、细观几何结构等因素对宏观性能的影响,还能在结构分析中获得细观应力、应变场,从细观层次上定量地描述了材料损伤破坏的过程.基于这种思想建立起来的模型一方面避免了对细观几何做过多的假设,使得模型更接近实际,另一方面大大降低了模型的计算复杂度,提高了模型的效率.国内外学者在宏细观一体化分析方面做了不少的研究^[1].

由 Paley 和 Aboudi^[2]提出的通用单胞模型(GMC)是一种基于代表性体积元(RVE)的宏细观统一本构模型.该模型通过平均意义上的子胞边界位移连续条件和力平衡条件以及满足子胞内积分形式的平衡方程建立材料细观结构、组分材料常数与宏观材料常数的关系.不仅能模拟复杂的细观结构,而且具有较高的计算效率.现已成为复合材料力学分析的重要方法^[3-6].

由于采用了一阶位移函数,GMC模型预测的应力场精度较差.Aboudi等将高阶理论^[7]应用于GMC模型,提出了高精度的单胞模型(high-fidelity generalized method of cells,简称HFGMC)^[8].该模型采用了二重子胞的概念,实现了正应力与剪应力的耦合,能够获得比较准确的细观应力应变场.

Bansal 和 Pindera 取消了亚子胞,而直接假设子胞内的位移函数为二阶多项式,然后应用子胞边界平均位移和子胞边界平均应力以及子胞内积分形式的平衡方程导出了子胞刚度矩阵,应用于子胞之间的平均位移连续和平均力平衡建立系统方程,该方程的解给出了宏观应变与细观位移之间的关系.由于取消了亚子胞,系统方程中未知量总数大为减小,从而提高了模型的效率.Bansal 和 Pindera 将这种高效的宏细观统一本构模型命名为FVDAM模型(finite volume directe average method,简称FVDAM)^[9].

近年来,Cavalcante 和本文作者等^[10-12]分别采用参数映射法和直接积分法对FVDAM模型进行改进,提出了四边形式胞的FVDAM,提高了模型模拟细观结构的能力,并且消除了由矩形子胞引入的应力集中.但是由于FVDAM所有的方程都建立在平均意义上的,因此预测的应力场存在严重的不连续性^[11].同时,由于FVDAM以子

胞边界平均位移作为基本未知量,不仅难以构造高阶的子胞位移插值函数,而且也降低了模型的计算效率.

为了克服FVDAM的上述缺点,本文将宏细观统一理论与有限元法相结合,提出了节点插值子胞模型(NICM).新模型将宏观位移表达为宏观应变和细观位移的线性组合,应用虚位移原理建立基本方程,以节点位移作为基本未知量构造子胞细观位移表达式,改善了细观应力场的连续性.通过数值算例对比了新模型与FVDAM的精度和效率.

1 FVDAM模型的基本理论

假设所研究的材料具有周期分布的细观结构,如图1所示.选取周期结构的最小单位,即代表性体积元(RVE),作为分析区域.当RVE为矩形或立方体,并且细观位移扰动量满足周期边界条件时,分析域内的位移具有如下形式^[7]:

$$u_i = \bar{\epsilon}_{ij} X_j + \tilde{u}_i \quad (1)$$

其中 u_i 是宏观位移, $\bar{\epsilon}_{ij}$ 是宏观应变, $\tilde{u}_i$ 是细观位移扰动量, X_j 是宏观坐标.

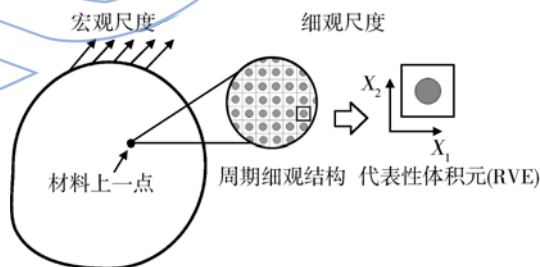


图1 周期细观结构和代表性体积元

Fig. 1 Periodic microstructure and representative volume element

采用四边形式胞划分RVE,得到图2所示的网格.在每个子胞内建立局部坐标系.根据FVDAM模型基本理论^[9],假设细观位移扰动量在子胞 q 内可表示为细观坐标的二次多项式

$$\begin{aligned} {}^q\tilde{u}_i = & {}^qW_{i1} + {}^qW_{i2} {}^qy_2 + {}^qW_{i3} {}^qy_3 + \\ & {}^qW_{i4} ({}^qy_2)^2 + {}^qW_{i5} ({}^qy_3)^2, \\ & i = 1, 2, 3; \quad q = 1, \dots, N_q \end{aligned} \quad (2)$$

式中上标 q 表示第 q 个子胞, N_q 等于子胞总数, ${}^qy_i$ 是第 q 个子胞的局部坐标, ${}^qW_{ij}$ 是待定未知量.

将细观位移表达式(2)代入方程(1),然后由几何方程可得应变表达式

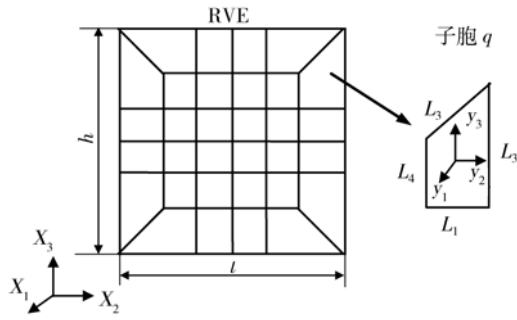


图2 RVE和子胞局部坐标系示意图

Fig. 2 Sketch of RVE and local coordinate in subcell

$${}^q\epsilon_{11} = \bar{\epsilon}_{11} \quad (3a)$$

$${}^q\epsilon_{22} = \bar{\epsilon}_{22} + {}^qW_{22} + 2{}^qW_{24} {}^qy_2 \quad (3b)$$

$${}^q\epsilon_{33} = \bar{\epsilon}_{33} + {}^qW_{33} + 2{}^qW_{35} {}^qy_3 \quad (3c)$$

$${}^q\epsilon_{23} = \bar{\epsilon}_{23} + \frac{{}^qW_{23} + {}^qW_{32}}{2} + {}^qW_{34} {}^qy_2 + {}^qW_{25} {}^qy_3 \quad (3d)$$

$${}^q\epsilon_{13} = \bar{\epsilon}_{13} + {}^qW_{13}/2 + {}^qW_{15} {}^qy_3 \quad (3e)$$

$${}^q\epsilon_{12} = \bar{\epsilon}_{12} + {}^qW_{12}/2 + {}^qW_{14} {}^qy_2 \quad (3f)$$

假设子胞处于弹性状态,则子胞应变和子胞应力满足如下方程:

$${}^q\sigma_{ij} = {}^qC_{ijkl} {}^q\epsilon_{kl} \quad (4)$$

定义子胞边界平均力为边界应力的积分

$$\bar{t}_i^{\eta} = \frac{1}{qL_{\eta}} \int_{qL_{\eta}} {}^qt_i^{\eta} dl \quad (5)$$

其中 ${}^qL_{\eta}$ 是第 q 个子胞的第 η 条边界(图2), ${}^qL_{\eta}$ 是 ${}^qL_{\eta}$ 的长度。 ${}^qt_i^{\eta}$ 表示子胞边界上的应力,它与应力张量满足柯西方程

$${}^qt_j^{\eta} = n_i {}^q\sigma_{ij}^{\eta} \quad (6)$$

其中 n_i 是 ${}^qL_{\eta}$ 的法向量分量。

将应变表达式(3)代入式(4),然后代入式(6)得子胞边界应力表达式,最后代入式(5)得到子胞边界平均应力和 ${}^qW_{ij}$ 之间的表达式

$${}^q\bar{t} = {}^qN_p \cdot {}^q\tilde{W} + {}^qC_p \cdot \bar{\epsilon} \quad (7)$$

定义子胞边界平均位移为边界位移的积分

$${}^q\bar{u}_i^{\eta} = \frac{1}{qL_{\eta}} \int_{qL_{\eta}} {}^qu_i^{\eta} \cdot dl \quad (8)$$

将细观位移扰动量表达式(2)代入方程(8),建立子胞边界平均位移和 ${}^qW_{ij}$ 之间的关系式

$${}^q\bar{u} = {}^qN_u \cdot {}^qW \quad (9)$$

FVDAM中子胞内应力必须满足积分形式的平衡方程

$$\frac{1}{qS} \int_{qS} \sigma_{ij,j} ds = 0 \quad (10)$$

其中 ${}^qS$ 是第 q 个子胞的面积, ${}^q\Omega$ 是第 q 个子胞所占据的区域。

子胞之间还必须满足平均位移连续和平均应力平衡

$$\bar{u}_i^+ = \bar{u}_i^- \quad (11)$$

$$\bar{t}_i^+ + \bar{t}_i^- = 0 \quad (12)$$

通过等式(7)、式(9)~式(12)可得到子胞平均应变与宏观应变的关系式如下:

$${}^q\bar{\epsilon} = {}^qA \cdot \bar{\epsilon} \quad (13)$$

子胞平均应力和宏观应力定义为

$${}^q\bar{\sigma} = {}^qC \cdot {}^q\bar{\epsilon} \quad (14)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{l \cdot h} \sum_{q=1}^{N_q} {}^qS \cdot {}^q\bar{\sigma} \quad (15)$$

由此可建立宏观应力和宏观应变的关系式

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{l \cdot h} \sum_{q=1}^{N_q} {}^qS \cdot {}^qC \cdot {}^qA \cdot \bar{\epsilon} \quad (16)$$

2 节点插值子胞模型

宏观统一本构模型的关键问题在于如何建立宏观应变与细观平均应变之间的表达式。Aboudi, Bansal, Pindera 以及 Cavalcante 和 Gao 等人均采用了加权余量法中的子域法求解。这种方法采用平均意义下的平衡方程(方程(10))、位移和应力连续条件(方程(11)和方程(12))来求解 RVE 内的细观位移场。该方法存在以下不足:①由于采用了平均近似,子胞内的位移场和应力场连续性较差;②以子胞边界平均位移为基本未知量,难于构造更高阶的细观位移表达式;③组分材料假设为弹性,不能满足弹塑性计算的需要。

为了克服上述缺点,本文改用节点插值函数来描述子胞内的位移,而采用增量虚位移原理建立基本方程,直接由弹性扩展为弹塑性。

2.1 宏观统一的虚位移原理

忽略体力,代表性体元内增量形式的虚位移原理可写成如下等式:

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv = \int_{S_{\sigma}} \Delta T_i \delta \Delta u_i ds \quad (17)$$

其中 Ω 表示 RVE 占据的区域, S_{σ} 是应力边界, ΔT_i 是应力边界上的面力。

增量形式的应力应变关系表示为

$$\Delta \sigma_{ij} = E_{ijkl}^{ep} \Delta \epsilon_{kl} \quad (18)$$

式中 E_{ijkl}^{ep} 的右上标 ep 表示弹塑性增量本构方程。

将等式(18)代入等式(17)得

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^{ep} \Delta \epsilon_{kl} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv = \int_{S_{\sigma}} \Delta T_i \delta \Delta u_i ds \quad (19)$$

将方程(1)改写为增量形式

$$\Delta u_i = \Delta \bar{\epsilon}_{ij} X_j + \Delta \bar{u}_i \quad (20)$$

由小变形下的几何方程,可建立真实应变增量、宏观应变增量和细观应变增量之间的关系式

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \bar{\varepsilon}_{ij} + \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (21)$$

其中细观应变 $\Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}$ 是细观位移扰动量增量的偏微分

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta \tilde{u}_{i,j} + \Delta \tilde{u}_{j,i}) \quad (22)$$

将增量位移表达式(1)和增量应变表达式(21)代入增量形式的虚位移原理表达式(19)得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \varepsilon_{ij} + E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}) dv + \\ & \int_{\Omega} (E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \varepsilon_{ij} + E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij}) dv = \\ & \int_{S_0} (\Delta T_i \delta \Delta \tilde{u}_i X_j + \Delta T_j \delta \Delta \tilde{u}_j X_i) ds \end{aligned} \quad (23)$$

由于宏观应变增量是事先给定的,因此它的变分为零,对等式(24)进行化简后导出小变形、弹性状态下宏细观统一的增量型虚位移原理表达式

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}) dv = \\ & \int_{S_0} \Delta T_i \delta \Delta \tilde{u}_i ds \end{aligned} \quad (24)$$

方程(24)右端面力增量的虚功包含三个方面:①相邻子胞之间面力增量的虚功;②界面处面力增量的虚功;③RVE 边界面力增量的虚功. 本文不考虑存在内部裂纹的情况,相邻子胞之间的表面和界面都属于 RVE 的内表面,其上的面力满足牛顿第三定律. 又因为内表面位移连续,因此相邻子胞之间面力增量和界面处面力增量做的虚功等于零. 根据多尺度力学原理,RVE 边界的细观位移增量 $\Delta \tilde{u}_i$ 和应力增量 ΔT_i 必须满足如下等式:

$$\Delta \tilde{u}_i(x+d) = \Delta \tilde{u}_i(x) \quad (25)$$

$$\Delta T_i(x+d) + \Delta T_i(x) = 0 \quad (26)$$

其中 d 表示 RVE 边界尺寸,以图 2 所示 RVE 为例, d 等于 h 或 l . 上式的物理意义为:RVE 对应边界上的细观位移扰动量相等,而应力相差一个负号. 因此 RVE 边界面上的面力增量所做的虚功之和也等于零. 由此得出结论,方程(24)右边的面积分等于零,由此得到最终的宏细观统一的虚位移原理表达式

$$\int_{\Omega} (E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}) dv = 0 \quad (27)$$

2.2 细观位移扰动量表达式

为了求解式(27),将 RVE 离散成 N 个子胞,等式(27)转化成如下的离散形式:

$$\sum_e \int_{\Omega} (E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} + E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}) dv = 0 \quad (28)$$

其中 Ω 和 S 分别是第 e 个子胞的区域和应力边界.

在每个子胞内,采用插值函数来近似表示子胞内的细观位移扰动量增量

$${}^e \Delta \tilde{u}_i = {}^e N^p {}^e \Delta \tilde{u}_i^p \quad \delta {}^e \Delta \tilde{u}_i = {}^e N^p \delta {}^e \Delta \tilde{u}_i^p \quad (29)$$

其中 ${}^e N^p$ 表示型函数, ${}^e \Delta \tilde{u}_i^p$ 表示子胞节点上的细观位移扰动量增量.

相应地,子胞内的应变增量可表示成如下形式:

$${}^e \Delta \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} {}^e N_{,j}^p {}^e \Delta \tilde{u}_i^p + \frac{1}{2} {}^e N_{,i}^p {}^e \Delta \tilde{u}_j^p \quad (30)$$

其中

$${}^e N_{,j}^p = \frac{\partial {}^e N^p}{\partial x_j} \quad (31)$$

将等式(29)和(30)代入等式(28)得

$$\sum_e {}^e \Delta \tilde{u}_k^q {}^e K_{kqip} \delta {}^e \Delta \tilde{u}_i^p + \sum_e \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} {}^e C_{klip} \delta {}^e \Delta \tilde{u}_i^p = 0 \quad (32)$$

其中

$${}^e K_{kqip} = \int_{\Omega} K_{kqip} dv \quad (33a)$$

$${}^e C_{klip} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (E_{ijkl}^{\text{ep}} {}^e N_{,j}^p + E_{jikl}^{\text{ep}} {}^e N_{,j}^p) dv \quad (33b)$$

$$\begin{aligned} K_{kqip} &= \frac{1}{4} E_{ijkl}^{\text{ep}} {}^e N_{,l}^q {}^e N_{,j}^p + \frac{1}{4} E_{jikl}^{\text{ep}} {}^e N_{,l}^q {}^e N_{,j}^p + \\ & \frac{1}{4} E_{jikl}^{\text{ep}} {}^e N_{,l}^q {}^e N_{,j}^p + \frac{1}{4} E_{ijkl}^{\text{ep}} {}^e N_{,l}^q {}^e N_{,j}^p \end{aligned} \quad (33c)$$

由等式(32)可建立一系列关于子胞节点细观位移扰动量增量 ${}^e \Delta \tilde{u}_k^p$ 和宏观应变增量 $\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}$ 的线性方程组. 方程组以 ${}^e \Delta \tilde{u}_k^p$ 为基本未知量,通过引入周期边界条件进行求解^[13],可导出 ${}^e \Delta \tilde{u}_k^p$ 的表达式

$${}^e \Delta \tilde{u}_k^p = {}^e K C_{kpnm} \Delta \bar{\varepsilon}_{nm} \quad (33)$$

其中 ${}^e K C_{kpnm}$ 是四阶张量($k, m, n=1, 2, 3; p=1 \sim N_p, N_p$ 是子胞所拥有的节点数),只与子胞的几何物理参数相关.

2.3 宏观应力应变关系

宏观应力增量定义为细观应力增量的体积平均

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} dv \quad (34)$$

在离散后的 RVE 区域内,等式(34)可表示为每个子胞积分之和

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_e \frac{{}^e V {}^e E_{ijkl}^{\text{ep}}}{{}^e V} \int_{\Omega} {}^e \Delta \epsilon_{kl} dV \quad (35)$$

其中 ${}^e \Delta \epsilon_{kl}$ 是子胞 e 内的应变增量。

由等式(33)得到细观应变增量,再结合等式(35)可得宏观应力增量的表达式

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = \sum_e \frac{{}^e V}{{}^e V} ({}^e E_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \bar{\epsilon}_{kl} + {}^e E_{ijmn}^{\text{ep}} {}^e \bar{N}_{,n}^p {}^e K C_{mpkl} \Delta \bar{\epsilon}_{kl}) \quad (36)$$

对等式(36)进行化简后得

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta \bar{\epsilon}_{kl} \quad (37)$$

其中

$$\bar{E}_{ijkl}^{\text{ep}} = \sum_e \frac{{}^e V}{{}^e V} ({}^e E_{ijkl}^{\text{ep}} + {}^e E_{ijmn}^{\text{ep}} {}^e \bar{N}_{,n}^p {}^e K C_{mpkl}) \quad (38)$$

方程(37)描述了宏观应力增量和宏观应变增量之间的相互关系,即复合材料的增量型本构方程。如果材料处于弹性状态,只要将方程(18)替换成弹性本构方程,并且将所有公式中的增量改为全量即得到弹性状态的表达式。

3 算例分析

前文给出了 FVDAM 和基于虚位移原理的宏观统一本构模型基本方程。由于新模型采用了节点位移插值的方法近似子胞内细观位移,因此本文将新模型命名为节点插值子胞模型(node interpolation cell method,简称 NICM)。下面首先通过算例详细分析 FVDAM 和 NICM 在应力场连续性和计算效率上的差异。然后应用 NICM 模型预测材料的宏观弹性模量,并与偏转公式进行对比。最后应用 NICM 模型预测某 B/AL 复合材料的横向弹塑性拉伸应力应变响应,并与实验数据进行对比。

3.1 FVDAM 和 NICM 对比分析

假设纤维在基体内周期分布,选取一个代表性体积元进行分析。纤维和基体都为各向同性体,其中纤维的弹性模量 E_f 为 230 GPa,泊松比 μ_f 为 0.25,基体的弹性模量为 430 GPa,泊松比为 0.2,纤维半径 r 等于 $4\mu\text{m}$,RVE 边长 $10.3\mu\text{m}$ 。施加在 RVE 上的宏观应变 $\bar{\epsilon}_{22}$ 等于 0.01%。

FVDAM 和 NICM 都采用相同的网格离散 RVE,如图 3 所示。然而两种模型的细观位移函数完全不同,FVDAM 采用方程(2)所描述的细观位移表达式,而 NICM 则采用方程(29)的形式,其型函数和节点排列方式参见附录。

图 4 给出了两种方法预测的子胞边界的应力

分布曲线,边界位置如图 3(a)所示。从图中可以看出 FVDAM 和 NICM 预测的细观应力场在子胞边界都存在不连续性。

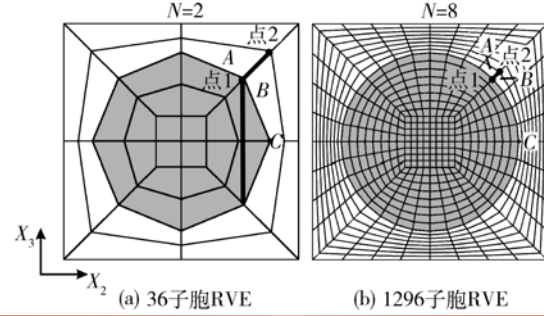


图3 离散化后的代表性体积元

Fig. 3 Mesh of RVE

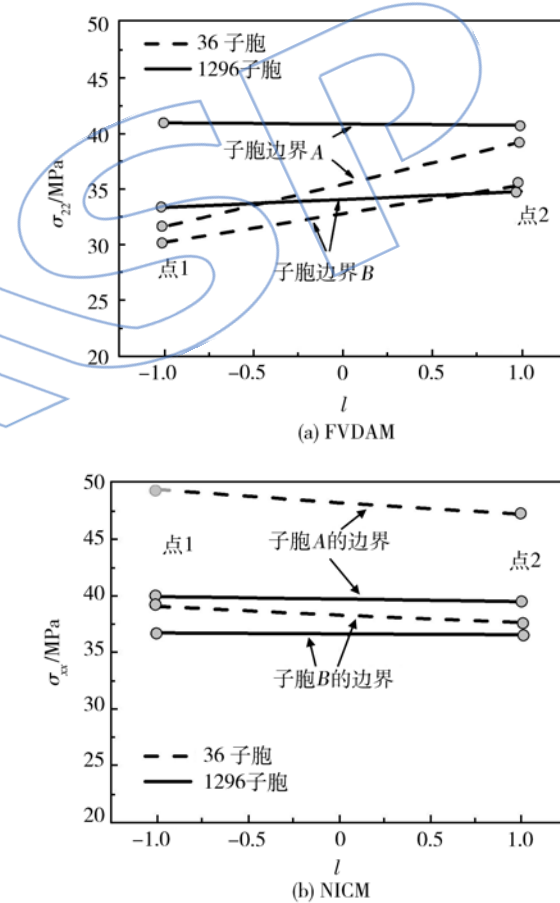


图4 NICM 和 FVDAM 预测的子胞边界应力张量分布曲线

Fig. 4 Stress distribution along boundary of subcell

然而当子胞密度增大时(如图 3(b)的网格),NICM 预测的子胞边界应力张量的差异也趋于减小(见图 4(b)的实线),而 FVDAM 应力场的不连续性却没有得到缓解(见图 4(a)的实线)。这说明

通过增加网格密度可以使得 NICM 的应力场趋于连续,而无法改善 FVDAM 应力场的连续性.图 5 是 NICM 模型预测的界面上(图 3C 点)基体和纤维表面的应力差随子胞密度的变化曲线.计算结果表明 NICM 模型计算的界面应力相差较小,并且随着子胞密度增大应力差趋于零.说明 NICM 模型计算的细观应力场在界面处也是趋于连续的.

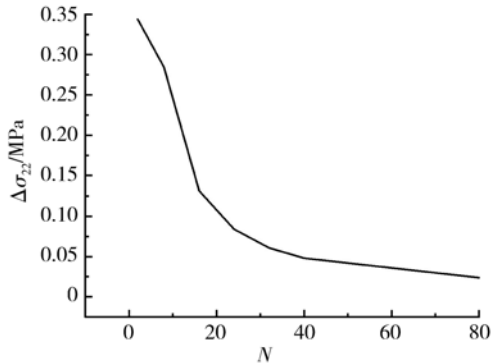


图 5 界面 C 点纤维和基体应力差值随子胞密度的变化曲线

Fig. 5 Variation of stress difference between fiber and matrix at point C with subcells density

事实上,FVDAM 通过等式(11)和式(12)来保证位移连续和应力平衡.这种平均意义上的平衡往往只能保证边界中点处的应力连续而不能对整个边界的应力分布进行有效的控制.图 6 是 FVDAM 预测的图 3(a)子胞边界的应力分布曲线.从图中可以看出,边界应力 t_2^A 和 t_2^B 在边界中点的数值相同,而在边界两端存在较大的差异.

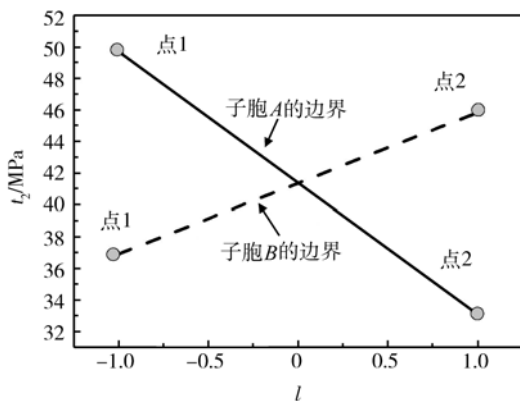


图 6 FVDAM 预测的子胞边界应力分布

Fig. 6 Stress distribution along boundary of subcell predicted by FVDAM

图 7 给出了 FVDAM 和 NICM 预测的 σ_{22} 应力云图.从图中可以看出,两种模型预测的细观应力场分布形式大致相同.但是由于 FVDAM 无法有效控制应力在子胞边界的连续性,使得 FVDAM 的应力场存在放射形条纹区域,而 NICM 的预测结果则显得较为平滑.

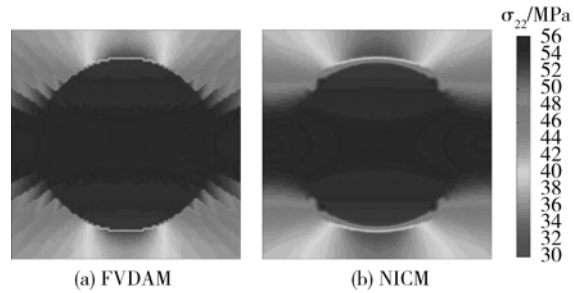


图 7 NICM 和 FVDAM 预测的 σ_{22} 对比

Fig. 7 Comparison of σ_{22} distribution between NICM and FVDAM

由于位移形函数不同,FVDAM 和 NICM 模型在计算效率上也存在差异.图 8 是两种模型的计算时间对比曲线.横坐标 N 等于 RVE 边界的子胞数量,纵坐标是计算耗费的时间.从图中可以看出,当采用同样的网格进行分析时,NICM 耗费的时间要低于 FVDAM,并且随着 N 增大,两种模型耗费的时间差异越来越大.

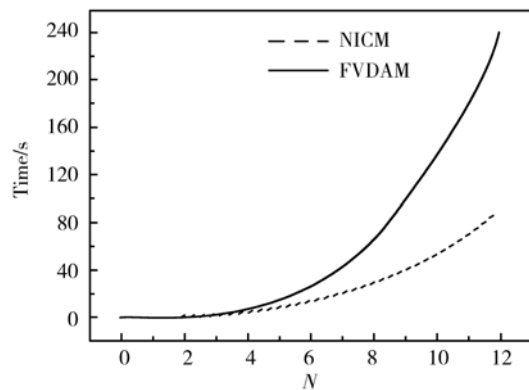


图 8 NICM 和 FVDAM 计算时间随 RVE 边界子胞数的变化曲线

Fig. 8 Comparison of efficient between NICM and FVDAM

模型的计算时间与未知量总数密切相关,NICM 的未知量总数等于 $3N_q$,FVDAM 的未知量总数等于 $3N_p$,其中 N_q 和 N_p 分别等于 RVE 中节点的总数和子胞边界的总数.一般的情况下,一个节点同时属于 4 个子胞,而一个子胞边界最多只能属于两个子胞.因此如果假设子胞数量等

于 N , 那么 NICM 模型未知量总数约等于 $3/4N$, 而 FVDAM 的未知量总数约等于 $3/2N$. 因此当采用相同的网格进行分析时, NICM 的计算时间要少于 FVDAM.

3.2 预测宏观弹性常数

NICM 的一个重要的应用是能够预测复合材料的宏观弹性模量. 本节应用 NICM 模型预测复合材料的偏轴弹性性能, 并且与偏转公式进行对比.

所选材料的基本参数为: 纤维弹性模量 $E_f = 379.3 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu_f = 0.1$, 基体的弹性模量 $E_m = 68.3 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu_m = 0.3$, 纤维体积百分含量为 35% . 假设纤维在基体内沿 X_2 和 X_3 方向周期分

布. 取某一纤维的圆心为原点建立材料的主坐标系 $OX_1 X_2 X_3$, 其中 X_1 轴与纤维轴心重合. 建立另一坐标系 $OX_1^* X_2^* X_3^*$ 与主坐标系重合, 然后以 X_1^* 为轴, 将 OX_2^* 和 OX_3^* 旋转 θ 角建立偏轴坐标系.

在偏轴坐标系下, RVE 必须包含足够的纤维以保证材料细观结构的周期性. 材料细观结构和 RVE 的几何结构见图 9, 偏转角 θ 由下式计算:

$$\theta = \arctan\{0, 1/2, 1\} \quad (39)$$

图 10 是偏轴坐标系下 RVE 的子胞分布图, 图中 $\theta = \arctan(1/2)$ 的 RVE 具有非对称几何结构. 这种结构导致材料表现出各向异性.

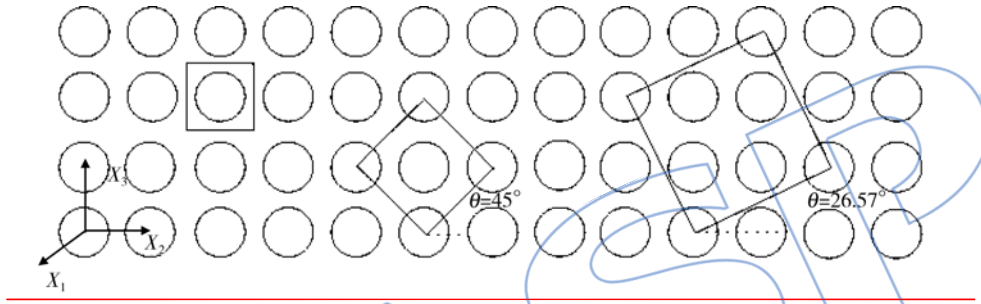


图 9 偏轴坐标系下的代表性体积元

Fig. 9 RVEs in deflexion coordinates

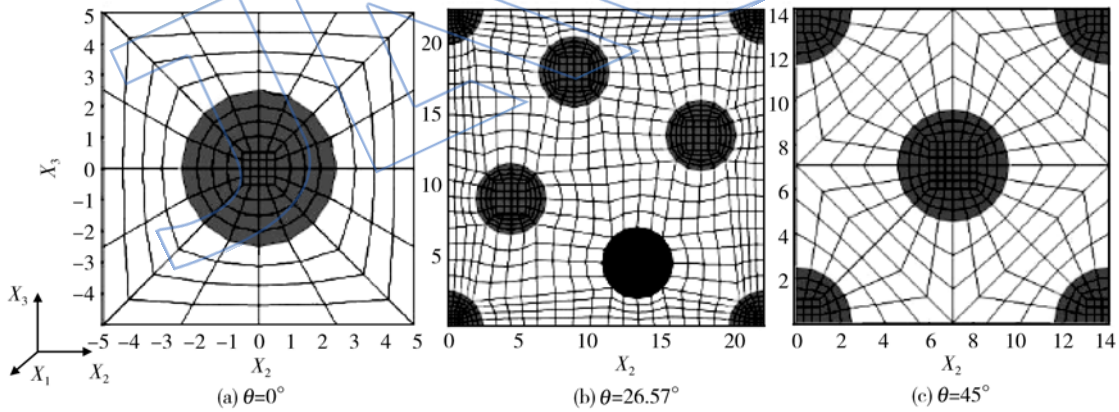


图 10 不同偏角下 RVE 的子胞分布图

Fig. 10 Sketch of mesh for RVE in deflexion coordinates

以材料主坐标系作为参考坐标系, 在主坐标系下材料的刚度矩阵为

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & C_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^* & C_{32}^* & C_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^* \end{bmatrix} \quad (40)$$

由于材料具有两个对称面但并非横向各向同性, 因此 $C_{12}^* = C_{13}^*$, $C_{22}^* = C_{33}^*$, $C_{55}^* = C_{66}^*$, 而 $C_{44}^* \neq 0.5 \cdot (C_{22}^* - C_{23}^*)$.

应用坐标转换公式

$$\bar{\mathbf{C}}^*(\theta) = \mathbf{T}_1 \mathbf{C}^* \mathbf{T}_2^{-1} \quad (41)$$

计算偏轴坐标系下材料的宏观刚度矩阵. 绕 X_1 轴旋转 θ 角的变换矩阵为

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & n^2 & 2mn & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & m^2 & -2mn & 0 & 0 \\ 0 & -mn & mn & m^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & m \end{bmatrix} \quad (42a)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & n^2 & mn & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & m^2 & -mn & 0 & 0 \\ 0 & -2mn & 2mn & m^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & m \end{bmatrix} \quad (42b)$$

其中 $m = \cos \theta$, $n = \sin \theta$, 则偏轴坐标系下的宏观刚度矩阵具有如下形式:

$$\bar{\mathbf{C}}^* = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^* & \bar{C}_{12}^* & \bar{C}_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{21}^* & \bar{C}_{22}^* & \bar{C}_{23}^* & \bar{C}_{24}^* & 0 & 0 \\ \bar{C}_{31}^* & \bar{C}_{32}^* & \bar{C}_{33}^* & \bar{C}_{34}^* & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{24}^* & \bar{C}_{34}^* & \bar{C}_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55}^* & \bar{C}_{56}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{56}^* & \bar{C}_{66}^* \end{bmatrix} \quad (43)$$

其中 $\bar{C}_{12}^* = \bar{C}_{13}^*$, $\bar{C}_{22}^* = \bar{C}_{33}^*$, $\bar{C}_{55}^* = \bar{C}_{66}^*$, $\bar{C}_{24}^* = -\bar{C}_{34}^*$. 偏轴坐标下的材料柔度矩阵为刚度矩阵的逆矩阵

$$\bar{\mathbf{S}}^*(\theta) = [\bar{\mathbf{C}}^*(\theta)]^{-1} \quad (44)$$

则偏轴材料常数由偏轴柔度矩阵导出, 其表达式如下:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11}^*(\theta) &= \frac{1}{\bar{S}_{11}^*}; \bar{E}_{22}^*(\theta) = \frac{1}{\bar{S}_{22}^*}; \bar{E}_{33}^*(\theta) = \frac{1}{\bar{S}_{33}^*} \\ \bar{\mu}_{12}^*(\theta) &= -\frac{\bar{S}_{12}^*}{\bar{S}_{11}^*}; \bar{\mu}_{13}^*(\theta) = -\frac{\bar{S}_{13}^*}{\bar{S}_{22}^*}; \bar{\mu}_{23}^*(\theta) = -\frac{\bar{S}_{23}^*}{\bar{S}_{33}^*} \\ \bar{G}_{23}^*(\theta) &= \frac{1}{\bar{S}_{44}^*}; \bar{G}_{13}^*(\theta) = \frac{1}{\bar{S}_{55}^*}; \bar{G}_{12}^*(\theta) = \frac{1}{\bar{S}_{66}^*} \end{aligned} \quad (45)$$

NICM 模型和坐标偏转公式计算的各弹性常数随 θ 的变化曲线如图 11~图 14 所示. 计算结果表明 NICM 模型预测的偏轴弹性模量与偏转公式的计算值吻合很好, 表明该模型能较好地计算复合材料的偏轴弹性性能.

3.3 复合材料弹塑性应力应变响应计算

本节采用 NICM 模型计算 B/AL 复合材料的弹塑性应力应变响应, 并且将计算结果与实验进行对比. 计算过程假设 B 纤维始终处于弹性状态, 而 AL 基体可能处于塑性状态. B 纤维的直径为 $140 \mu\text{m}$, 纤维体积比 $v_f = 0.46$, 弹性模量 $E_f =$

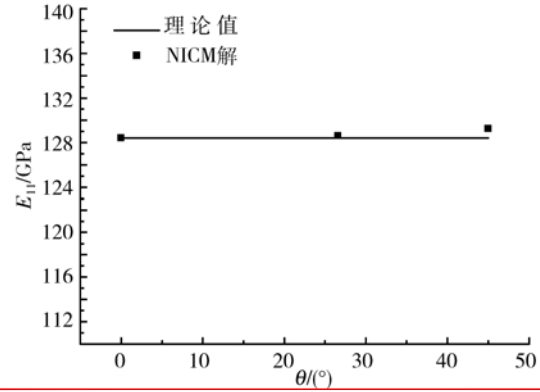


图 11 NICM 预测偏轴弹性模量与理论值对比: E_{11}
Fig. 11 Comparison of E_{11} between NICM prediction and theoretical value

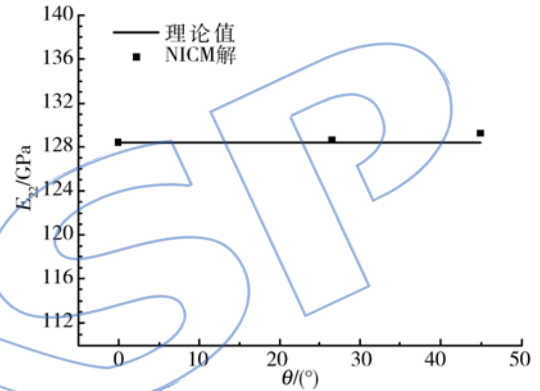


图 12 NICM 预测偏轴弹性模量与理论值对比: E_{22}
Fig. 12 Comparison of E_{22} between NICM prediction and theoretical value

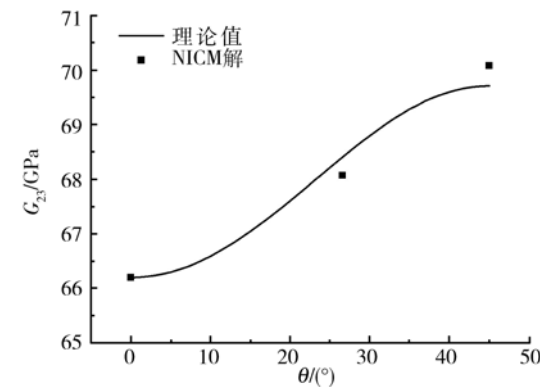
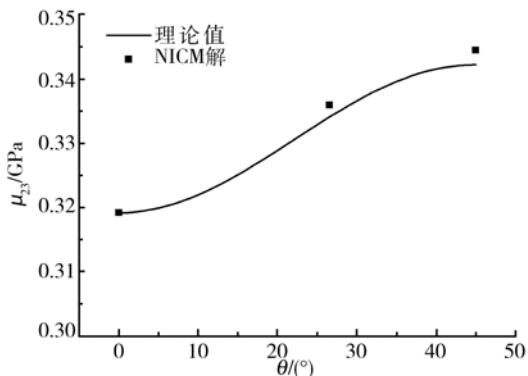


图 13 NICM 预测偏轴弹性模量与理论值对比: G_{23}
Fig. 13 Comparison of G_{23} between NICM prediction and theoretical value

380 GPa, 泊松比 $\mu_f = 0.15$. 采用双线性模型描述基体的弹塑性应力应变响应. 基体的弹性模量 $E_m = 70 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu_m = 0.31$, 屈服极限 $\sigma_s = 55 \text{ MPa}$, 切线刚度 $E_t = 1.94 \text{ GPa}^{[14]}$.

假设纤维在基体内均匀周期分布, 采用图 3

图14 NICM预测偏轴弹性模量与理论值对比: μ_{23} Fig. 14 Comparison of μ_{23} between NICM prediction and theoretical value

(b)所示的 RVE 模型(本算例将 RVE 中心圆的半径修改为 $70\text{ }\mu\text{m}$, 将 RVE 的边长修改为 $183\text{ }\mu\text{m}$)模拟材料的细观结构. 计算过程中横向宏观应变 $\bar{\epsilon}_{22}$ 从 0 逐渐增大到 0.0025. 最终得到图 15 所示的横向应力应变响应曲线. 通过与实验数据的对比表明本文预测的 B/AL 复合材料横向弹塑性应力应变响应与实验测量值比较吻合.

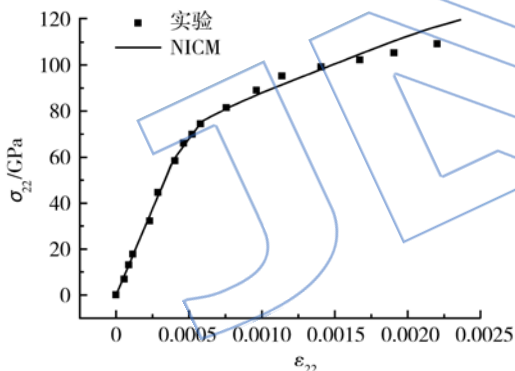


图15 NICM预测的 B/AL 复合材料横向拉伸应力应变响应及实验对比

Fig. 15 Transverse global constitutive response of B/AL composite; comparison between NICM and experiment

4 结 论

本文基于宏观统一理论与虚位移原理,提出了可进行复合材料宏观细观一体化分析的 NICM 模型. 通过算例对 NICM 模型的精度、效率以及弹塑性应力应变响应预测能力进行了分析. 结果表明:

1) 由于基于虚位移原理建立了基本方程,并且应用节点插值函数构造子胞内的位移场,

NICM 模型预测的应力场比 FVDAM 更加平滑,且不存在尖角区域和放射形条纹. 同时,随着子胞密度增大, NICM 预测的应力场趋于连续,而 FVDAM 预测的应力场不会随着子胞密度的增大而得到改善.

2) 由于以节点位移作为基本未知量,在相同的网格形式下, NICM 模型的基本未知量个数少于 FVDAM 模型,因此大大降低了计算时间. 并且随着子胞规模增大,计算耗时的差异也越明显.

3) NICM 模型细观位移的构造方法具有一般性,能方便构造具有高阶位移函数的子胞,而 FVDAM 的位移函数难于扩展到更高阶次.

4) 本文应用 NICM 模型预测了复合材料的偏轴弹性模量,并且与偏转公式进行对比. 对比结果表明 NICM 模型的计算结果与偏转公式吻合较好.

5) 应用 NICM 模型还可预测金属基复合材料的弹塑性应力应变响应,并且预测的 B/AL 复合材料横向拉伸应力应变响应与实验值吻合.

参考文献:

- [1] Aboudi J. Closed form constitutive equations for metal matrix composites[J]. International Journal of Engineering Science, 1987, 25(9): 1229-1240.
- [2] Paley M, Aboudi J. Micromechanical analysis of composites by the generalized method of cells[J]. Mechanics of Materials, 1993, 14(2): 127-139.
- [3] 宋迎东, 雷友锋, 孙志刚, 等. 一种新的纤维增强复合材料细观力学模型[J]. 南京航空航天大学学报, 2003, 35(4): 435-440.
SONG Yingdong, LEI Youfeng, SUN Zhigang, et al. A new micro-mechanics model for fibrous composite [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2003, 35(4): 435-440. (in Chinese)
- [4] 孙志刚, 宋迎东, 高希光. 细观结构对复合材料热膨胀系数的影响研究[J]. 应用力学学报, 2004, 21(2): 146-150.
SUN Zhigang, SONG Yingdong, GAO Xiguang. Influence of micro-structural geometry on thermal expansion coefficient of composites[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2004, 21(2): 146-150. (in Chinese)
- [5] 宋迎东, 孙志刚, 雷友锋, 等. 细观几何结构对复合材料初始屈服面的影响[J]. 航空动力学报, 2004, 19(6): 749-754.
SONG Yingdong, SUN Zhigang, LEI Youfeng, et al. Influence of micro-structural geometry on composite initial yielding surfaces[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(6): 749-754. (in Chinese)
- [6] 高希光, 宋迎东, 孙志刚. 纤维位置随机引起的复合材料性能分散性研究[J]. 航空动力学报, 2005, 20(4): 584-589.

- GAO Xiguang, SONG Yingdong, SUN Zhigang. Research on the discrepancy of composite effective properties induced by the stochastic fiber location[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(4): 584-589. (in Chinese)
- [7] Aboudi J, Pindera M J, Arnold S M. Higher-order theory for functionally graded materials[J]. Composites Part B, 1999, 33(8): 777-832.
- [8] Aboudi J, Brett A, Bednarczyk S M, et al. High-fidelity generalization method of cells for inelastic periodic multiphase materials[R]. USA, NASA; NASA-TM-2002-211469, 2002.
- [9] Bansal Y, Pindera M J. Finite-volume direct averaging micromechanics of heterogeneous materials with elastic-plastic phases[J]. International Journal of Plasticity, 2006, 22(5): 775-825.
- [10] Cavalcante M A A, Marques S P C, Pindera M J. Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials Part I: analysis[J]. Journal of Applied Mechanics, 2007, 74(5): 935-945.
- [11] Cavalcante M A A, Marques S P C, Pindera M J. Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials Part II: numerical results[J]. Journal of Applied Mechanics, 2007, 74(5): 946-957.
- [12] GAO Xiguang, SONG Yingdong, SUN Zhigang. Quadrilateral subcell based finite volume micromechanics theory for multiscale analysis of elastic periodic materials[J]. Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME, 2009, 76(1): 011013(7 pages).
- [13] Drago A, Pindera M J. Micro-macro mechanical analysis of heterogeneous materials; macroscopically homogeneous vs periodic microstructures[J]. Composite Science and Technology, 2007, 67(6): 1243-1263.
- [14] 雷友锋, 宋迎东, 高德平. 纤维增强金属基复合材料弹塑性行为分析[J]. 机械科学与技术, 2003, 22(6): 982-985.
- LEI Youfeng, SONG Yingdong, GAO Deping. Analysis of elastoplastic behavior of fiber reinforced metal matrix composites[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2003, 22(6): 982-985. (in Chinese)

附录 A: 形函数与节点排列

$$N^1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

$$N^2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4$$

$$N^3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4$$

$$N^4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4$$

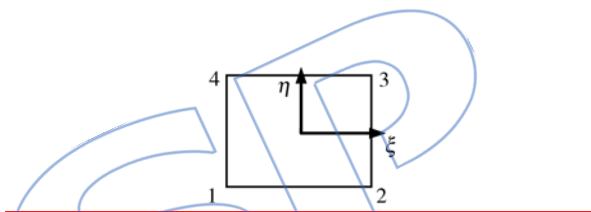


图 A 平面四节点子胞的节点分布

Fig. A Distribution of the nodes of the plane four nodes cell