

文章编号:1000-8055(2012)05-1045-09

叶片全三维反问题优化设计方法

朱阳历^{1,2}, 王正明¹, 陈海生¹, 谭春青¹

(1. 中国科学院 工程热物理研究所, 北京 100190;

2. 中国科学院 研究生院, 北京 100049)

摘 要: 基于数值求解 Navier-Stokes 方程, 对叶轮机械叶片全三维反问题优化设计方法进行研究. 反问题给定叶片表面的静压分布反求叶型, 假设叶表网格点有虚拟移动速度, 迭代过程中根据叶表的实际静压和目标静压之差来修改叶型. 对单排叶栅进行了反问题设计, 并给出了初步的优化算例, 结果能很好地满足目标静压分布, 验证了该方法的有效性, 计算的时间和精度也适合进行工程应用.

关 键 词: 全三维反问题设计; 叶片优化; 叶轮机械; Navier-Stokes 方程; 激波

中图分类号: V235

文献标志码: A

Full 3-D inverse design optimization method for turbomachinery blade

ZHU Yang-li^{1,2}, WANG Zheng-ming¹, CHEN Hai-sheng¹, TAN Chun-ying¹

(1. Institute of Engineering Thermophysics,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Full 3-D inverse design optimization method for turbomachinery blade was studied, which was based on numerical solver of Navier-Stokes equations. Pressure distribution on blade surface was specified for obtaining the corresponding blade profile in inverse problem, assuming there was virtual velocity of grid node on blade surface; blade geometry was modified by the difference between surface pressure and target pressure during iterative procedure. Inverse designs of cascade and optimization example indicate that solution of new blade profile matches target pressure well, which validates effectiveness of this method. The method is practical for engineering applications in time cost and accuracy.

Key words: full 3-D inverse design; blade optimization; turbomachine; Navier-Stokes equation; shock

随着对叶轮机械性能要求的不断提高, 传统三维叶片设计方法需要进一步发展, 叶片数值优化已成为设计过程的重要环节. 目前的优化方法主要有两类: 一是正问题优化, 即对叶片参数化, 生成样本, 再选取相关目标函数如效率、裕度等进行大量样本的寻优, 参数化变量的选取和算法先进性决定了优化效果, 一般耗费的机时比较大; 第二类是反问题设计, 即给定叶片的气动参数

分布来反求叶型, 特点是物理意义明确, 设计者可以根据物理规律和经验控制气动参数, 直接针对减少叶型损失、改变激波强度或位置等目的进行优化, 计算量相对较小, 缺点是有时可能不容易给出合适的叶面气动参数分布, 即相应的反问题定解条件.

叶轮机械叶片及其他外形的反问题优化设计研究已取得了一些成果, 从势函数^[1]、流函数^[2]解

收稿日期: 2011-06-21; 网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120525.1516.201205.1045_013.html

基金项目: 国家自然科学基金(50906079); 国家重点基础研究发展计划(2012CB720400)

作者简介: 朱阳历(1985—), 男, 湖北当阳人, 博士生, 主要从事叶轮机械气动热力学研究.

法发展到通过求解 Euler^[3-5], N-S (Navier-Stokes)^[6-9] 方程优化单排叶栅及多级匹配^[7], 叶片变形也从固定前后缘发展到大自由度的弯掠优化^[8]. 反问题设计中定解参数的给法一般有 3 种: ① 叶片周向质量平均环量^[8,10]; ② 压力面、吸力面的压差负荷^[4,7,9]; ③ 叶片表面静压^[3,5-6]. 前两种给法通过修改叶片中弧面来控制流道中负荷的分布, 间接影响叶表的气动参数, 包含准三维设计的基本思想, 容易给出合适的定解条件, 收敛性较好; 第三种给法可以直接控制叶表的气动参数, 但因全三维流动很复杂, 给出的静压分布可能出现反问题无严格物理解的情形, 收敛性相对较差. 国内在该领域的研究较少, 罗兴琦等人^[11]给定叶片环量和厚度分布, 基于 Euler 方程和 Clebsch 变换设计出了良好的混流式叶轮; 王正明等人^[12]给定叶表无量纲压力分布, 将叶面几何的移动速度与 N-S 方程在当地的解联系起来; 陈乃兴等人^[13]将流函数反问题计算与 N-S 求解结合, 以叶栅进出口气流角的径向分布为目标函数, 李颖晨等人^[14]研究了基于伴随方法的气动优化算法, 提出目标泛函须满足的条件, 都是间接控制叶表的气动参数. 到目前为止, 叶片环量或负荷的定解条件给法已有较多应用, 而给定叶表静压的反问题设计方法仍在进一步发展中.

本文从工程应用背景出发, 对给定叶表静压分布的反问题优化设计方法进行研究, 通过初始叶型、过渡叶型的表面静压和目标静压之差来修改叶片. 对压气机单排静叶和动叶进行反问题计算, 分析了该方法的有效性和收敛性, 并给出了初步的优化算例.

1 反问题方法

本文研究工程上实用的反问题, 即在规定端壁形状的前提下, 给定叶栅进口总温、总压、气流角分布、出口背压及叶表静压分布来反求叶片型线. 为保证反问题的收敛效果, 目前的设计一般都在初始叶片的基础上进行, 将全三维黏性流场计算得到的叶面静压分布改进后作为反问题的输入, 主要包括初始叶片的流场计算分析、叶面静压分布的给法、叶片的修改及网格重生成等, 以下具体说明.

1.1 流场计算方法

原叶片的流场正问题计算结果是反问题定解条件的参考依据, 且正、反问题采用相同的求解器, 因此流场模拟精度决定了优化设计的效果. 本

文采用相对圆柱坐标系下的雷诺平均 N-S 方程^[15]和 Spalart-Allmaras 湍流模型, 其矢量通量守恒形式如下:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial G_v}{\partial \zeta} + S \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v \\ r\rho w \\ r\rho E_t \\ r\rho \bar{v} \end{bmatrix}$$

$$E, F, G = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} r\rho U_k \\ r\rho u U_k + k_\varphi p \\ r\rho v U_k + rk_r p \\ r\rho w U_k + rk_z p \\ r(\rho E_t + p)U_k + r\omega k_\varphi p \\ r\rho \bar{v} U_k \end{bmatrix}$$

$$E_v, F_v, G_v =$$

$$\frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ k_\varphi \tau_{\varphi\varphi} + rk_r \tau_{r\varphi} + rk_z \tau_{z\varphi} \\ k_\varphi \tau_{\varphi r} + rk_r \tau_{rr} + rk_z \tau_{rz} \\ k_\varphi \tau_{\varphi z} + rk_r \tau_{rz} + rk_z \tau_{zz} \\ k_\varphi \beta_\varphi + rk_r \beta_r + rk_z \beta_z \\ \frac{\rho}{\sigma} (v + \bar{v}) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \frac{k_\varphi}{r} + r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} k_r + r \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} k_z \right) \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho uv + \tau_{\varphi r} \\ \rho u^2 + p - \tau_{\varphi\varphi} \\ 0 \\ 0 \\ r\rho R_x \end{bmatrix}$$

$$R_x = \frac{C_{b2}}{\sigma} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + C_{b1} \bar{S} \bar{v} - C_{w1} f_w \left(\frac{\bar{v}}{d} \right)^2$$

$$U_k = \frac{k_\varphi}{r} (u - \omega r) + k_r v + k_z w$$

式中 Q 为守恒矢量通量, E, F, G 为对流通量, E_v, F_v, G_v 为黏性通量, S 为源项; k 分别取 ξ, η, ζ 时表示对流项和黏性项在 3 个坐标方向的分量; u, v, w 为 3 个坐标方向的绝对速度分量, $\bar{v}$ 为涡黏

性相关量. 计算中对流项的亚通量采用 *Steger-Warming* 分裂解法, 空间离散对流项采用 MUSCL (monotone upstream-centered schemes for conservation laws) 差分格式 (结合 VanLeer 限制器), 黏性项采用中心差分格式, 方程求解采用 LU-SGS (lower upper symmetric gauss seidel) 隐式有限差分算法. 假设工质为理想空气, 计算域为全周流动. 入口给定总温、总压、气流角, 出口给定中径处的静压, 其他边界满足相应的固壁和周期性条件.

1.2 计算程序验证

首先对 NASA (美国国家航空航天局) 设计的跨声速轴流风扇转子 Rotor 67^[16] 进行流场正问题计算, 并与其试验结果对比, 以考察本文采用计算程序的精度.

计算域网格如图 1 所示, 采用 H 型, 经无关性验证后, 选择周向、径向、流向的节点数为 $45 \times 77 \times 121$, 总数 419 265, 不带叶顶间隙, 第一层网格距离固壁为 4.0×10^{-6} m, y^+ 满足 1~10. 边界条件给定入口总压为 101 325 Pa、总温为 288.2 K、设计转速为 16 043 r/min, 轴向进气.

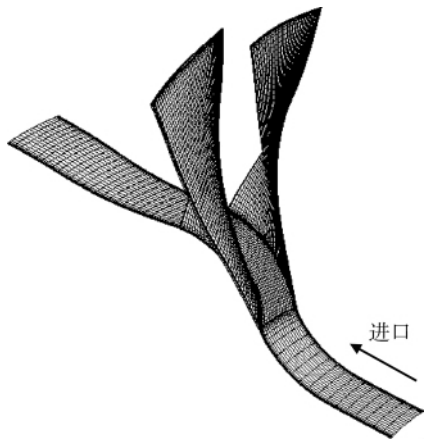


图 1 计算网格示意图

Fig. 1 Computational mesh

改变出口背压进行计算, 选择近最高效率点工况与试验结果对比, 如表 1、图 2 所示, 流量、效率稍低, 可能由于计算黏性稍大; 出口各径向位置的质量平均总温、总压与试验相比, 符合得较好, 相对误差不超过 1%. 总的来说, 程序能够满足工程应用及反问题设计的精度要求, 流场细节的分辨率在优化设计部分进行讨论.

表 1 Rotor 67 近最高效率点的总性能参数对比

Table 1 Comparison of performance near peak efficiency operating point of Rotor 67

	流量/(kg/s)	总压比	效率
试验	34.573	1.642	0.930
计算	34.245	1.643	0.914

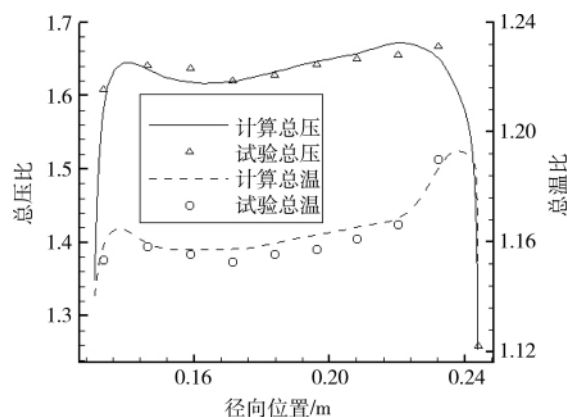


图 2 出口总温比、总压比对比

Fig. 2 Comparison of total temperature ratio, total pressure ratio at outlet

1.3 反问题设计流程

反问题设计方法的具体流程如图 3 所示, 初始叶片的流场由黏性全三维定常计算得到, 一般分析设计点工况, 根据收敛结果选择需要进行优化的多个截面, 修改其静压分布, 作为反问题的定

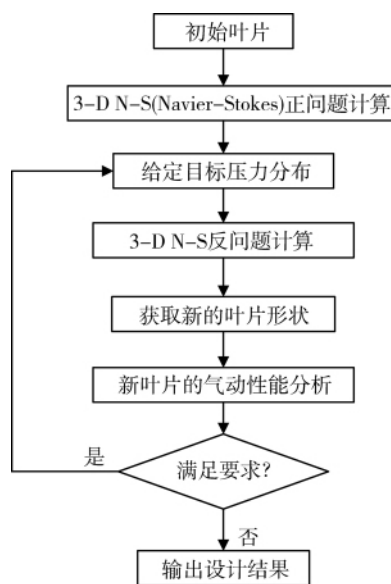


图 3 黏性全三维叶片反问题设计流程图

Fig. 3 Viscous full 3-D inverse design schematics for blade

解条件;反问题计算基于迭代——修正方法,每个迭代步修改叶片之后,计算域的网格需要重新生成,随着迭代的推进,得到的叶面静压符合或最接近目标静压分布时,认为计算收敛;新叶片改变了部分流场细节,可能会对级间匹配以及全工况性能有所影响,因此还需要对新叶片进行变工况气动性能分析,对比流场的变化,考察静压分布的修改效果。

1.4 叶片修改方法

本文将 Thompkins W T 等人^[3]应用在二维平面叶栅中的反问题优化设计方法拓展到了全三维叶片,并在叶型的移动和光滑处理方面有所改进,具体方法如下。

假设叶片表面网格点在 3 个坐标方向上有虚拟移动速度 u^s, v^s, w^s , 叶型随时间推进可移动,计算过程不修改固壁边界条件,通过叶片固壁边界相邻点的矢通量守恒关系得到虚拟速度分量(p^t 为给定的叶片表面目标静压,其他变量参考流场控制方程)

$$\begin{aligned} u^s &= \pm \sqrt{\frac{|\Delta p|}{\rho}} \sqrt{\frac{\left(\frac{\xi_\varphi}{r}\right)^2}{\left(\frac{\xi_\varphi}{r}\right)^2 + \xi_r^2 + \xi_z^2}} \quad (2) \\ v^s &= \frac{u^s \cdot \xi_r \cdot r}{\xi_\varphi}, \\ w^s &= \frac{u^s \cdot \xi_z \cdot r}{\xi_\varphi} \\ \Delta p &= p^t - p \end{aligned}$$

为减小问题的复杂程度,实际应用中一般设定各截面的叶片表面网格点只沿周向运动,即保证 $v^s = 0, w^s = 0$, 叶面的移动方向与压差方向相反。得到网格点的虚拟移动速度后,结合时间步长 Δt 和松弛因子 ε 就可以计算每个迭代步的叶片修改量 Δf

$$\Delta f = \varepsilon \cdot \Delta t \cdot u^s \quad (3)$$

松弛因子的选取要使相邻迭代步间叶片的改动不大,以保证计算的稳定收敛^[3],其值与流场计算方法有关,隐式解法的时间步长相比显式解法要大很多,因此松弛因子相对较小。计算过程可以每隔一定的迭代步进行叶片修改,以减少计算量,提高稳定性。

给定的静压分布有可能不满足严格物理解,因此迭代过程中需要对各径向截面的叶表型线作光滑处理,使定解条件不理想时,最佳的收敛状况是实际静压分布在目标静压附近小幅周期性振

荡。本文采用由 4 点控制的 3 次曲线来光滑叶型,如下式所示, f 为型线周向弧度值, z 为流向坐标, a, b, c, d 为曲线方程系数,数字下标表示以计算点为基准的相邻点的流向相对位置编号。

$$\begin{aligned} f(z) &= az^3 + bz^2 + cz + d \quad (4) \\ a &= \left[\left(\frac{f_2 - f_{-2}}{z_2 - z_{-2}} - \frac{f_{-1} - f_{-2}}{z_{-1} - z_{-2}} \right) \frac{1}{z_2 - z_{-1}} - \left(\frac{f_1 - f_{-2}}{z_1 - z_{-2}} - \frac{f_{-1} - f_{-2}}{z_{-1} - z_{-2}} \right) \frac{1}{z_1 - z_{-1}} \right] \frac{1}{z_2 - z_1} \\ b &= \left(\frac{f_1 - f_{-2}}{z_1 - z_{-2}} - \frac{f_{-1} - f_{-2}}{z_{-1} - z_{-2}} \right) \frac{1}{z_1 - z_{-1}} - a(z_{-2} + z_{-1} + z_1) \\ c &= \frac{f_{-1} - f_{-2}}{z_{-1} - z_{-2}} - a(z_{-1}^2 + z_{-2}^2 + z_{-2}z_{-1}) - b(z_{-2} + z_{-1}) \\ d &= f_{-2} - az_{-2}^3 - bz_{-2}^2 - cz_{-2} \end{aligned}$$

每个迭代步修改叶片后,需重新生成网格,并计算相应的网格变换系数和湍流模型所需的第一层网格与固壁的距离。本文对 H 型网格的周向弧度坐标进行修改时,处理方法简单,反问题每个迭代步花费的时间只比正问题多 1.5% 左右。

2 设计算例及讨论

为验证以上方法,本文针对压气机叶片进行了反问题计算返回试验,即先对原始叶型进行流场计算,得到的叶表静压作为目标压力分布,以保证反问题解的存在性,再分别对静叶和动叶进行不同程度的减薄和加厚处理,将修改后的新叶型作为初始叶型,采用反问题方法计算使之稳定回复到原始叶型,证明收敛解的唯一性。此外,还给出了初步的动叶优化算例。

2.1 静叶减薄返回试验

静叶的网格参数与 Rotor 67 基本相同,正、反问题也采用相同的拓扑和节点数。计算给定进口总温为 320 K、总压为 160 000 Pa、入口周向气流角为 -50° 、出口中径处静压为 130 000 Pa。图 4 为原叶片流场计算的残差和流量收敛史,计算为 3 000 步时基本收敛,进出口流量的相对误差小于 0.1%。

返回试验的计算结果如图 5、图 6 所示,叶片中部厚度的削减量最大,且不均匀,因此初始静压分布也不光滑。叶表静压收敛史图 5 中反问题残差的计算公式表征了过渡叶型的表面静压与目标静压(p^t)的差别,计算给定适当的松弛因子时能兼顾收敛速度和计算稳定性,在正问题收敛结果基础上续算,由 3 000 步开始,计算到约 11 000 步

时叶表的静压不再有明显变化,认为计算收敛.反问题耗时约为正问题的3倍;通过图6不同叶高

处的收敛结果可以看出,各截面的叶型和静压分布回复的效果很好.

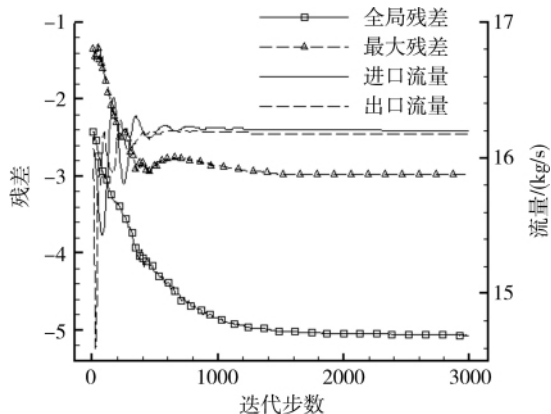


图4 计算残差及流量收敛史

Fig. 4 Convergence history of computation and mass flow

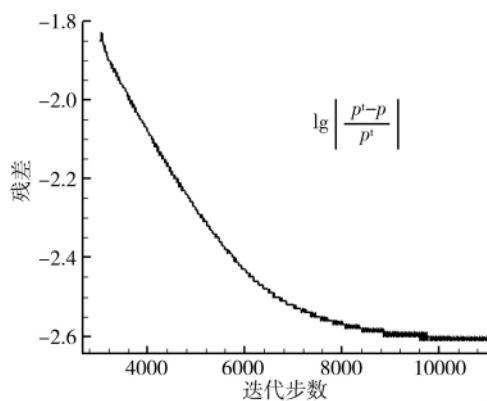


图5 叶表静压收敛史

Fig. 5 Convergence history of blade surface static pressure

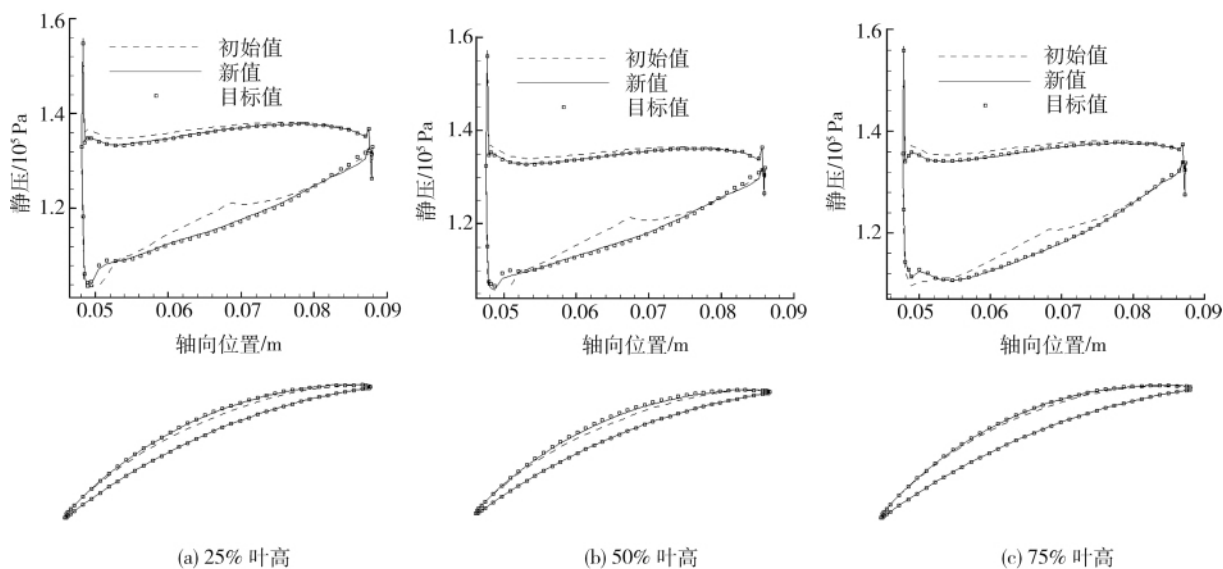


图6 静叶不同叶高处叶型和静压的收敛结果

Fig. 6 Convergence results of stator profile and static pressure at different spans

2.2 动叶增厚返回试验

动叶计算仍选取跨声转子 Rotor 67, 由于其大部分叶展较薄, 因此叶型修改采用了加厚处理, 流场正问题计算 3000 步收敛.

图7、图8为返回试验的收敛结果, 计算到约11500步时认为收敛, 耗时约为正问题的3倍, 进出口流量和总压比有明显的上升和稳定过程, 收敛结果与正问题计算的基本相同. 如图8所示, 不同叶高处叶型和静压分布的收敛结果与正问题计算符合得较好, 中径处修改量最大, 收敛结果与原始叶型相比还有一定差别, 但仅限于局部叶展区域, 因此, 静压分布仍符合得较好.

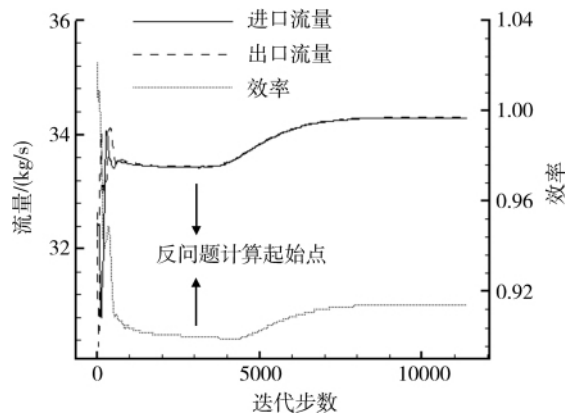


图7 进出口流量和效率收敛史

Fig. 7 Convergence history of inlet/outlet mass flow and efficiency

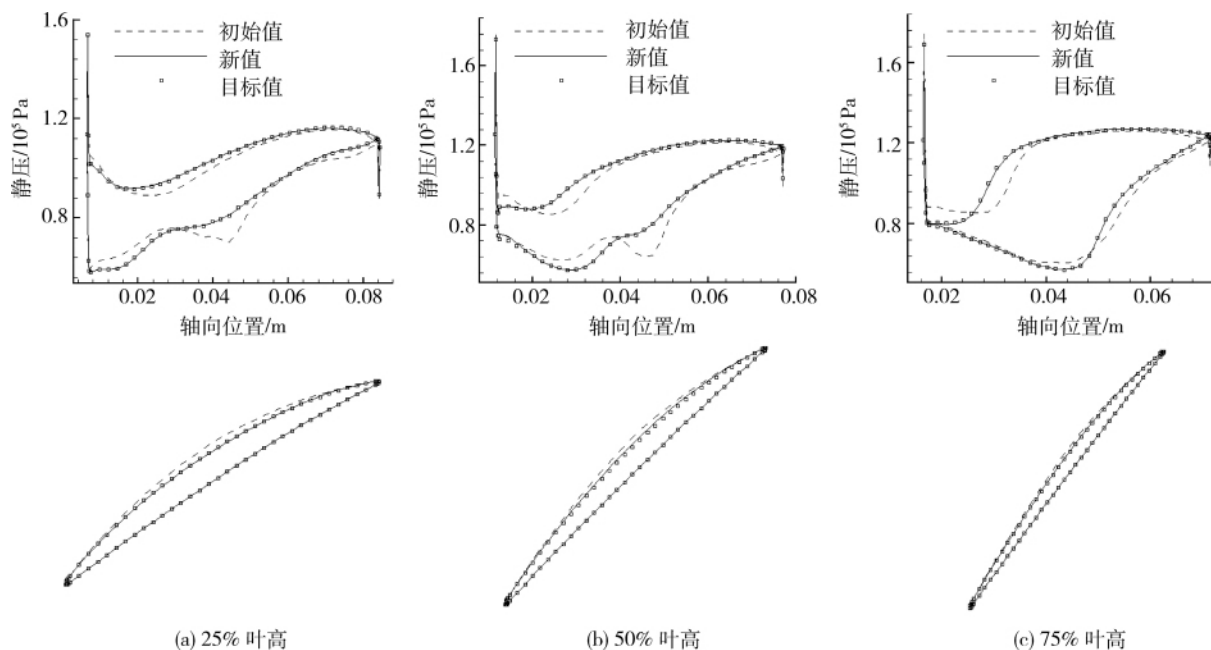


图 8 动叶不同叶高处叶型和静压的收敛结果

Fig. 8 Convergence results of rotor profile and static pressure at different spans

以上单排静叶和动叶的反问题返回试验计算基本能达到稳定收敛,并且耗时较少,结果与原叶型和静压分布的差别很小,证明了本文采用的叶片修改和光滑方法在全三维叶片应用中的有效性,为进一步的优化设计打下了良好的基础。

2.3 超声速流场优化

进行叶片优化时,为使其对应工况的流量、压比不变,并与下游叶栅合理匹配,沿叶高各截面的静压分布修改要满足其围成的面积基本不变,即在截面总负荷不变的条件下修改负荷分布;固定叶片前缘改变尾缘位置即安装角时,截面负荷一般会发生变化,并且影响叶片的光滑程度,因此优化过程一般可固定尾缘位置。

分析返回试验中动叶原叶片的收敛结果,其叶展中上部(参考图 10 和图 12)的超声流场可适当优化,因此对其 60%叶展以上部分的静压分布进行了调整,反问题计算约 2 倍的正问题计算时间时达到收敛,总性能参数对比如表 2 所示,流量和总压比基本不变,效率提高了 0.5%;图 9 为优

表 2 Rotor 67 优化前后近最高效率点总性能参数对比
Table 2 Comparison of original and optimized performance near peak efficiency operating point of Rotor 67

	流量/(kg/s)	总压比	效率
优化前	34.245	1.643	0.914
优化后	34.380	1.642	0.919

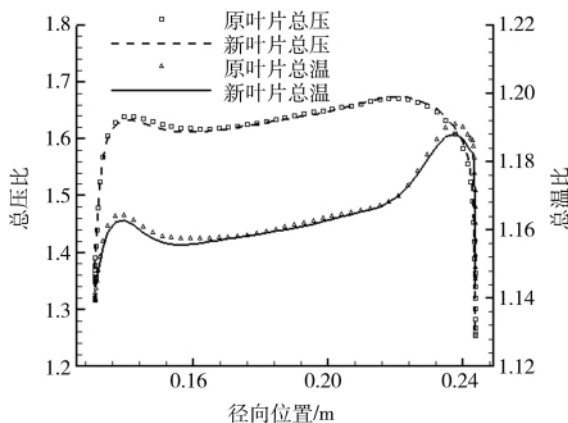


图 9 Rotor 67 优化前后出口径向总压比、总温比对比

Fig. 9 Comparison of original and optimized total pressure ratio, total temperature ratio at outlet of Rotor 67

化前后出口径向参数对比,可以看出超声区域流场的变化对亚声区产生了一定的影响,但整个叶展的总压升基本不变,保证了叶片排间交界面的合理匹配,总温稍降,近叶顶处比较明显,因此效率有一定提升。

对比了原叶片和新叶片流场总性能参数的变化后,还需要考察流场细节的改变是否达到了反问题优化设计的目标。

如图 10 所示,原叶片 90%叶高处激波增压区的静压升高梯度和幅度都比较大,对应图 12 中原叶型流场的通道激波明显,激波损失以及激波与附面层干涉导致的分离损失都较大。图 10 中反

问题收敛解(新值)与定解条件(目标值)符合得很好,得到的静压分布相对更光滑,截面负荷适当前移,分布也更均匀.图11显示优化后叶型的折转角基本不变,仅叶型中部的曲率有所变化,仍保持光滑,反问题设计有针对性地对预压缩效果进行了定量的几何修改.

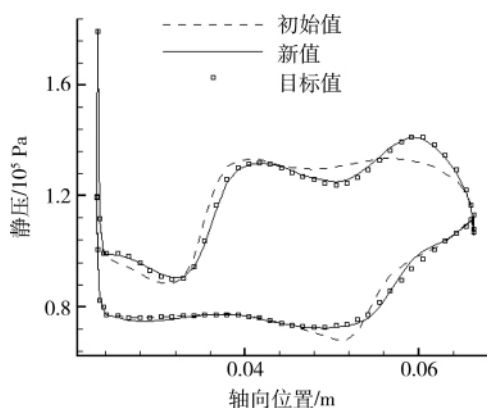


图10 90%叶高处静压的优化结果

Fig. 10 Optimized static pressure at 90% span

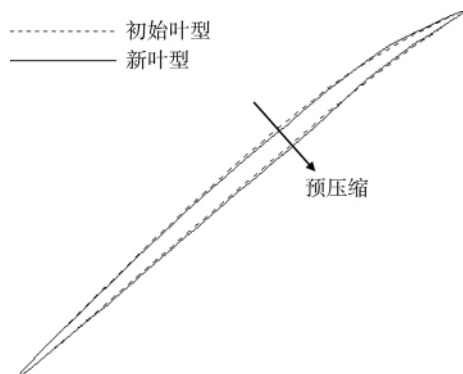
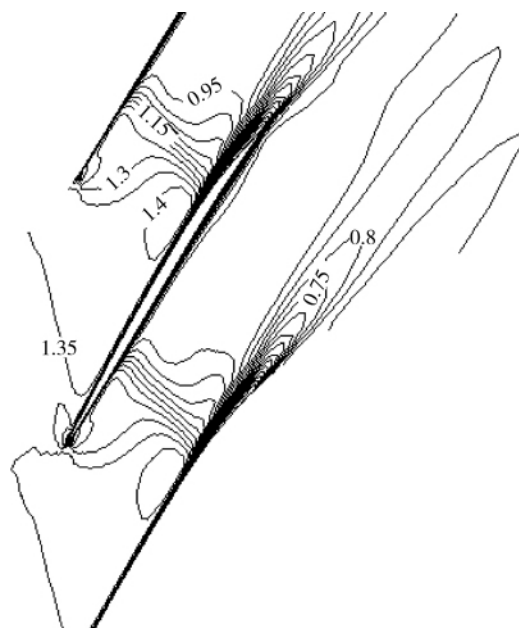


图11 90%叶高处叶型的优化结果

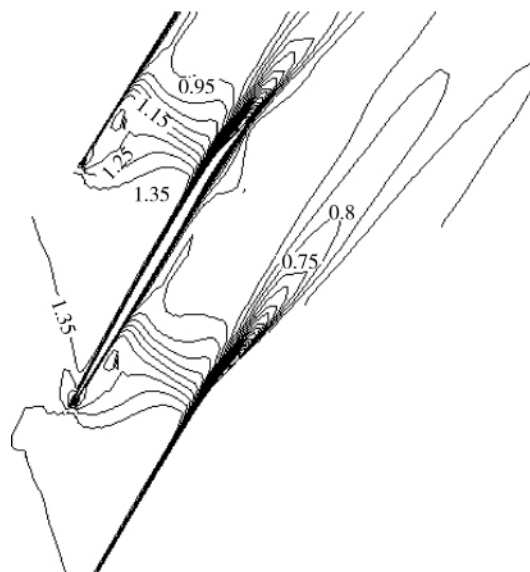
Fig. 11 Optimized profile at 90% span

图12为优化前后90%叶高截面的相对马赫数等值线对比,优化后的波前相对马赫数峰值以及激波位置基本不变,但通道激波的强度明显减弱,前缘附近压力面的静压升更加均匀;同时,减小吸力面近尾缘的局部逆压梯度对激波与附面层干涉产生的分离有优化作用,使近壁和尾迹的低速区有所减少;从图13吸力面附近静压分布和极限流线对比也可以看出由于激波强度减弱,附面层分离前的低静压区明显减少,降低了激波区静压升的梯度幅度,使得分离位置有所推后,分离区减小,因而提高了效率.

另外,图10中优化设计得到的静压分布与目



(a) 原叶型



(b) 新叶型

图12 优化前后90%叶高截面相对马赫数等值线

Fig. 12 Mach number contours for original and optimized profiles at 90% span

标静压分布符合得很好,但仍有微小差别,有两个可能的原因:①定解条件未严格满足反问题物理解;②叶片型线的控制点偏少,受曲线光滑的制约,不能完全满足目标静压分布.因此,如何给出合适的静压分布以避免迭代发散是设计过程的重点,这需要对流场特性和设计工具有很好的理解;而网格的划分除了要保证流场计算的精度外,还要使叶表流向的网格点尽可能多,以增强对叶型

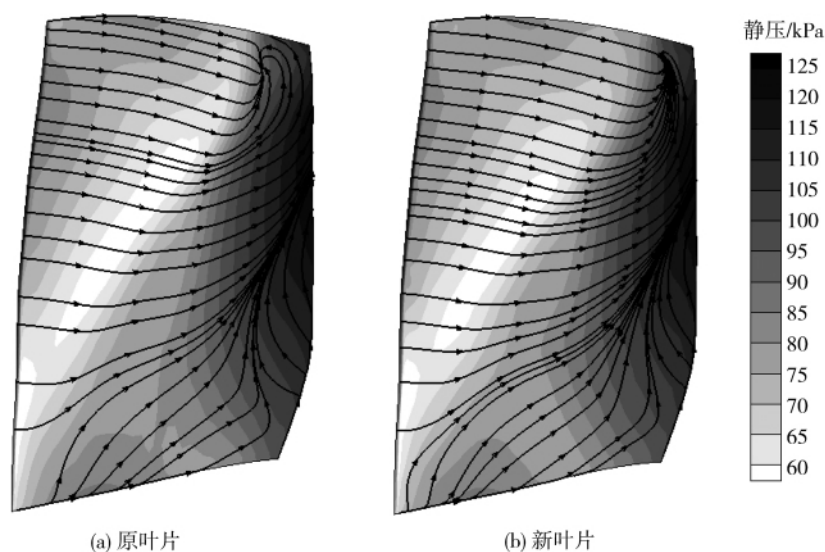


图 13 叶片吸力面静压分布和极限流线对比

Fig. 13 Comparison of static pressure on suction surface and limit streamline

的控制效果,减弱光滑处理对解的影响,得到与目标静压相差最小的几何。

3 结 论

本文对给定叶片表面静压分布的反问题设计进行研究,分析了压差驱动叶型修改方法的收敛效果,并对动叶的流场进行了适当优化,得到以下结论:

1) 将压差驱动叶型修改的二维叶栅反问题方法拓展到了全三维叶片的优化设计,在型线的光滑方面有所改进,重点讨论了方法的收敛性,获得了较好的效果。

2) 单排叶栅的返回试验和对超声速流场的初步优化表明,该方法在给定叶表静压反求叶片的反问题中应用效果良好。

3) 优化设计中给出的定解条件不严格满足反问题物理解时,采用叶型光滑处理方法可得到与目标静压相差较小的几何。

4) 通常情况下,本文采用的反问题方法达 2~3 倍的正问题计算时间时即能收敛,比较适合进行工程应用。

参考文献:

- [1] Beatty T D, Narramore J C. Inverse method for the design of multielement high-lift systems[J]. Journal of Aircraft, 1976, 13(6): 393-398.
- [2] WANG Zhengming. Inverse design calculations for transonic cascades[J]. International Journal of Turbo and Jet Engines, 1987, 4(3/4): 217-224.
- [3] Thompkins W T, Tong S S. Inverse or design calculations for nonpotential flow in turbomachinery blade passages [J]. Journal of Turbomachinery, 1982, 104(2): 281-285.
- [4] Dang T, Damle S, Qiu X. Euler-based inverse method for turbomachine blades Part 2: three-dimensional cascades [J]. AIAA Journal, 2000, 38(11): 2007-2013.
- [5] Demeulenaere A, Van den Braembussche R. Three-dimensional inverse method for turbomachinery blading design [J]. Journal of Turbomachinery, 1998, 120(2): 247-255.
- [6] WANG Zhengming, CAI Ruixian, CHEN Hongji, et al. A three-dimensional inverse method using Navier-Stokes equation for turbomachinery blading[J]. Inverse Problems in Engineering, 2000, 8(6): 529-551.
- [7] Milesin V I, Orekhov I K. 3D inverse design of transonic fan rotors efficient for a wide range of RPM[R]. ASME Paper GT2007-27817, 2007.
- [8] Watanabe H, Zangeheh M. Design of the blade geometry of swept transonic fans by 3D inverse design[R]. ASME Paper GT-2003-38770, 2003.
- [9] Roidl B, Ghaly W. Redesign of a low speed turbine stage using a new viscous inverse design method[J]. Journal of Turbomachinery, 2011, 133(1): 011009(9 pages).
- [10] Borges J E. A three-dimensional inverse method for turbomachinery part I: theory[J]. Journal of Turbomachinery, 1990, 112(3): 346-354.
- [11] 罗兴琦, 陈乃祥, 林汝长. 混流式转轮内有旋流动的全三元反问题计算[J]. 力学学报, 1995, 27(增刊): 30-36. LUO Xingqi, CHEN Naixiang, LIN Ruchang. Inverse calculation of a full three dimensional rotational flow for mixed flow runner[J]. Acta Mechanica Sinica, 1995, 27 (Supplement): 30-36. (in Chinese)
- [12] 王正明, 蔡睿贤, 陈宏冀, 等. 叶栅全三维粘性反问题的数值解[J]. 工程热物理学报, 1998, 19(5): 571-575.

- WANG Zhengming, CAI Ruixian, CHEN Hongji, et al. Numerical solution of fully 3D viscous inverse problem of turbomachinery blading[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 1998, 19(5): 571-575. (in Chinese)
- [13] 陈乃兴, 徐燕骥, 黄伟光, 等. 单转子风扇的三维反问题气动设计[J]. 航空动力学报, 2002, 17(1): 23-28.
- CHEN Naixing, XU Yanji, HUANG Weiguang, et al. An inverse method for 3-D aerodynamic design of fans and pumps[J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(1): 23-28. (in Chinese)
- [14] 李颖晨, 丰镇平. 透平叶栅三维粘性气动反问题的控制理论方法[J]. 工程热物理学报, 2007, 28(4): 580-582.
- LI Yingchen, FENG Zhenping. Control theory method for aerodynamic inverse problem of 3D viscous turbine blades [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2007, 28(4): 580-582. (in Chinese)
- [15] 姚吉先, 刘前智, 周新海. 压气机叶片排内三维紊流流动的隐式高分辨率数值分析[J]. 航空动力学报, 1996, 11(3): 225-228.
- YAO Jixian, LIU Qianzhi, ZHOU Xinhai. Numerical analysis of three-dimensional turbulent flow in compressor blade row by implicit high-resolution scheme[J]. Journal of Aerospace Power, 1996, 11(3): 225-228. (in Chinese)
- [16] Strazisar A J, Wood Jerry R, Hathaway M D, et al. Laser anemometer measurements in a transonic axial-flow fan rotor[R]. NASA TP-2879, 1989.