

文章编号: 1000-8055(2012)09-2035-06

基于 Φ 函数的等熵膨胀过程数学模型

郑海飞, 唐 豪

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 为了解决航空发动机总体性能计算中, 主要的等熵膨胀过程数学模型中存在理想状态值的计算, 使计算结果与实际值相比产生一定误差的问题, 从过程效率定义式入手, 推导出基于 Φ 函数的等熵膨胀过程数学模型. 与基于熵的等熵膨胀过程数学模型以及带理想状态值计算的等熵膨胀过程数学模型的计算结果进行比较与分析之后, 得出结论是: ①基于 Φ 函数的等熵膨胀过程数学模型的应用可使计算精度得到提高; ②基于 Φ 函数的等熵膨胀过程数学模型的应用较为简便, 可以提高编程效率和计算效率.

关 键 词: 航空发动机; 总体性能; 等熵膨胀; 数学模型; 过程效率; 熵; 理想状态; Φ 函数

中图分类号: V231.1

文献标志码: A

Mathematical model of isentropic expansion process based on Φ function

ZHENG Hai-fei, TANG Hao

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Recently, the calculation of ideal value was involved in the main mathematical model of isentropic expansion process, so compared with the actual value, the results had a certain error. Deriving the mathematical model of isentropic expansion process based on Φ function by using the definition type of process efficiency. Compared with the results from the mathematical model of isentropic expansion process based on entropy and the mathematical model of isentropic expansion process based on ideal value, concluded that: (1) accuracy can be improved when applying the mathematical model of isentropic expansion process based on Φ function; (2) application of the mathematical model of isentropic expansion process based on Φ function is simple, and can greatly improve the programming efficiency and computational efficiency.

Key words: aircraft engine; overall performance; isentropic expansion; mathematical model; efficiency of the process; entropy; ideal condition; Φ function

航空发动机的工作过程是一个非常复杂的气
动热力过程, 用于描述这个复杂过程的发动机性

能计算数学模型是发动机仿真技术的重要组成部分^[1]. 涡轮是航空发动机的重要部件, 其工作过

收稿日期: 2011-10-12;

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120921.1251.016.html>

基金项目: 国家自然科学基金(NSFC51076064); 江苏省“六大人才高峰”第五批高层次人才项目(2008136)

作者简介: 郑海飞(1986—), 男, 河南安阳人, 博士生, 主要从事航空发动机总体性能计算与分析方面的研究.

通讯作者: 唐豪(1960—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 从事有关热能动力工程设计优化与流体工程仿真的研究.

E-mail: hao.tang@nuaa.edu.cn

程在理想情况下是等熵膨胀过程. 国外在航空发动机涡轮等熵膨胀过程数学模型方面进行了大量的研究. 到本世纪初期等熵膨胀过程数学模型运用的是适用于可逆过程的计算公式^[2-5]; 2004 年 Chen G 等人^[6]采用气体组分分析方法计算气体性质(比热容、焓、熵等), 并在等熵过程中采用能量守恒方程(热焓形式的能量方程). 同年, Chiu Y M 博士在其学位论文^[7]中从涡轮效率定义式入手, 建立了基于熵的等熵膨胀过程数学模型. 2006 年 Liew K H^[8]从发动机部件的压比和温比入手, 并利用热焓形式的能量平衡方程, 建立等熵膨胀过程数学模型.

在国内, 大部分文献中的等熵膨胀过程数学模型都是以热焓形式的能量平衡方程为基础, 例如文献[9-16]. 文献[14-16]中的等熵膨胀过程数学模型中存在理想状态值(理想总温和理想焓值, 即过程中流动损失为零时的过程状态参数总温值和焓值^[14-15, 17])的计算. 理想值的介入会对计算结果与实际值相比, 产生一定误差. 另外, 所使用的气体性质经验公式同样存在误差, 从而导致误差积累.

本文从过程效率的定义式入手, 推导出基于 Φ 函数的等熵膨胀过程数学模型, 与文献[7]中的基于熵的等熵膨胀过程数学模型以及文献[14-16]中的数学模型进行比较与分析, 并且在计算中利用了较为精准的气体性质经验公式^[18]. 经研究表明: 应用本文提出的数学模型后, 计算结果比文献中的更加精确, 而且具有较好的应用性和普适性.

1 等熵膨胀过程数学模型推导

从过程效率的定义式入手, 推导出基于 Φ 函数的数学模型. 推导过程如下:

根据膨胀过程效率的定义式

$$\eta = \frac{dh_{\text{actual}}}{dh_{\text{isentropic}}} \quad (1)$$

式中 η 为涡轮绝热效率, 得

$$\eta = \frac{c_p \cdot dT_{\text{actual}}}{c_p \cdot dT_{\text{isentropic}}} \quad (2)$$

式中 c_p 为比定压热容.

再根据 Gibbs 方程

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dh}{T} - R_g \cdot \frac{dp}{p} = \\ c_p \frac{dT}{T} - R_g \cdot \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (3)$$

式中 R_g 为气体常数.

则等熵过程有

$$c_p \frac{dT_{\text{isentropic}}}{T} = R_g \cdot \frac{dp}{p} \quad (4)$$

将式(4)带入式(2)得

$$c_p \frac{dT_{\text{actual}}}{T} = R_g \cdot \frac{dp}{p} \cdot \eta \quad (5)$$

对式(5)两边积分得

$$\Phi_{\text{out}} = \Phi_{\text{in}} + R_g \cdot \ln \pi \cdot \eta \quad (6)$$

根据文献[14]中的定义可知式中 Φ 即为 Φ 函数. 式(6)即为基于 Φ 函数的等熵膨胀过程数学模型.

2 数学模型的比较

目前, 在国内外的研究中, 涡轮内等熵膨胀过程的数学模型均以能量平衡方程为基础. 图 1 中列出了目前主要的数学模型, 其中包括本文提出的基于 Φ 函数的等熵膨胀过程数学模型(下文均称为模型 III).

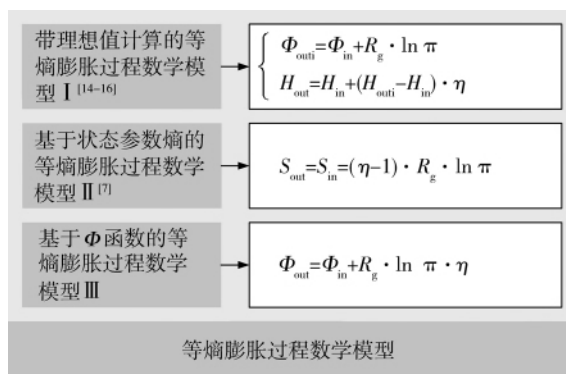


图 1 目前的 3 种等熵膨胀过程数学模型

Fig. 1 Three current mathematical model of isentropic expansion processes

带理想状态值计算的等熵膨胀过程数学模型(下文均称为模型 I)的建模思想是: ① 计算出等熵膨胀过程终态总温实际值(在等熵膨胀过程中, 过程终态总温值可由压气机所需要功计算得出), 再利用热焓关系式计算出过程终态总温理想值; ② 根据理想状态下的过程终态总温值和 Φ 函数关系式计算涡轮落压比.

如图 1 所示, 基于熵的等熵膨胀过程数学模型(下文均称为模型 II)中的 S 即为涡轮进出口熵值. 文献[7]同样是从涡轮效率定义式入手, 在数学模型推导过程中引入了等熵膨胀过程中熵的分析与处理, 具体推导过程详见文献[7].

与模型Ⅰ相比,模型Ⅱ仅利用过程初始状态参数熵值和已知的过程终态总温实际值便可计算出涡轮落压比。模型Ⅲ与模型Ⅰ相比,没有再利用焓关系式进行计算,仅利用 Φ 函数和已知的过程终态总温实际值计算涡轮落压比。

比较模型Ⅲ与模型Ⅱ的相同之处是模型中都有一个计算公式。不同的是,模型Ⅱ以熵为基础进行计算,而模型Ⅲ则是基于 Φ 函数的数学模型。经研究发现,模型Ⅱ可以经过进一步的推导,最终得到模型Ⅲ的数学形式。其数学推导过程如下所示。

对模型Ⅱ做如下变形:

$$S_{\text{out}} - S_{\text{in}} + R_g \cdot \ln \frac{p_{\text{out}}}{p_{\text{in}}} = R_g \cdot \ln \frac{p_{\text{out}}}{p_{\text{in}}} \cdot \eta \quad (7)$$

式中 S 为进出口状态参数熵, p 为压力。

选择基准状态 $p_0 = 101325 \text{ Pa}$, $T_0 = 0 \text{ K}$,规定这时 $\{s_{0\text{K}}^0\} = 0$ 。上标“0”表示压力为标准大气压 101325 Pa 。任意状态 (T, p) 时的 S 值为^[19]

$$S = s_{0\text{K}}^0 + \int_{T_0}^T c_p \frac{dT}{T} - R_g \cdot \ln \frac{p}{p_0} \quad (8)$$

根据式(8),选择 (T_0, p_0) 为基准状态,则有

$$\begin{cases} S_{\text{out}} = \int_{T_0}^{T_{\text{out}}} c_p \frac{dT}{T} - R_g \cdot \ln \frac{p_{\text{out}}}{p_0} \\ S_{\text{in}} = \int_{T_0}^{T_{\text{in}}} c_p \frac{dT}{T} - R_g \cdot \ln \frac{p_{\text{in}}}{p_0} \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)带入式(7)整理得

$$\int_{T_0}^{T_{\text{out}}} c_p \frac{dT}{T} - \int_{T_0}^{T_{\text{in}}} c_p \frac{dT}{T} = R_g \cdot \ln \frac{p_{\text{out}}}{p_{\text{in}}} \cdot \eta \quad (10)$$

再对式(10)整理得

$$\Phi_{\text{out}} - \Phi_0 - (\Phi_{\text{in}} - \Phi_0) = R_g \cdot \ln \frac{p_{\text{out}}}{p_{\text{in}}} \cdot \eta \quad (11)$$

最终可推出模型Ⅲ的数学形式

$$\Phi_{\text{out}} = \Phi_{\text{in}} + R_g \cdot \ln(\pi) \cdot \eta$$

从数学角度上讲,模型Ⅱ与模型Ⅲ是等价的。但是,从工程角度看,模型Ⅱ中应用的是熵值,而模型Ⅲ中利用了 Φ 函数。在工程中, Φ 函数的应用要比熵的应用容易的多,因为大部分经验公式都是以 Φ 函数为基础。

3 算例涡轮

3.1 WP6 涡轮部件^[20-21]

WP6 是比较传统的涡喷发动机,其涡轮部件为两级,除一级导叶气冷外,其余三排叶片均无冷

却措施。据已有的资料,WP6 涡轮部件设计状态下的参数如表1所示。

表1 WP6 和 NGTE-S 涡轮部件参数

Table 1 Parameters of turbine of WP6 and NGTE-S

设计参数	WP6	NGTE-S
进口总压/Pa	690 000	187 537
进口静压/Pa	663 000	
进口总温/K	1 143	360
进口静温/K	1 133.2	355
温降/K		43
流量/(kg/s)	43.3	5.207
转速/(r/min)	11 150	
功率/kW	12 292.36	231.913
效率	0.88	0.9
膨胀比	3.076	1.65

3.2 NGTE-S 轻负荷单级涡轮^[22-23]

NGTE-S 是英国国家燃气涡轮研究院(NGTE)设计和试验的一种轻负荷单级涡轮。该涡轮的主要设计参数都基于“确保合理的高水平效率量级”设计的。其设计状态下的参数如表1所示。

3.3 无导叶对转涡轮^[24]

表2是文献[24]提供的轴流超跨声低压无导叶对转涡轮实验件原始设计参数。

表2 对转涡轮设计参数

Table 2 Design parameters of contra-rotating turbine

设计参数	对转涡轮 (高压)	对转涡轮 (低压)
进口总压/Pa	568 000	208 000
进口静压/Pa		
进口总温/K	470	370.6
进口静温/K	464	365.2
流量/(kg/s)	3.11	3.11
转速/(r/min)	25 000	22 000
功率/kW	312	145
效率	0.849	0.858
膨胀比	2.738	1.708

4 计算结果比较与误差分析

本文以 C++ 为平台, 利用面向对象的技术手段, 编写出一套针对模型 III 的等熵膨胀过程的计算程序, 在程序中利用了文献[18]中提供的气体性质经验公式, 包括定压比热容经验公式、焓值经验公式和 ϕ 函数经验公式等, 其均已温度和油气比的函数形式给出。

表 1、表 2 中给出了各涡轮部件的设计参数, 包括进口压力温度、流量、效率和膨胀比等。在程序计算时以膨胀比为计算目标, 因为进口参数和效率均为已知量。这也符合发动机总体性能计算的要求, 因为要通过膨胀比来计算出涡轮出口的压力值。表 3 中列出了上文中算例涡轮的膨胀比实验值, 以及模型 I、模型 II 和模型 III 的计算值。模型 I 和模型 II 的计算值也是由程序计算得出。

表 3 涡轮膨胀比的计算结果
Table 3 Results of turbine pressure ratio

算例涡轮	膨胀比			
	实验值	模型 I	模型 II	模型 III
WP6	3.076	3.112	3.044	3.049
NGTE-S	1.65	1.684	1.663	1.678
对转涡轮(高压)	2.738	2.777	2.659	2.711
对转涡轮(低压)	1.708	1.737	1.721	1.726

如表 3 中所示, 模型 I、模型 II 和模型 III 的计算结果与实验值都存在一定的误差, 这是因为物理模型的数值模拟要对实际情况进行数学简化, 简化的过程中就会或多或少的产生与实际情况的偏差, 从而导致误差的产生。

图 2 是实验结果与模型 I、模型 II 和模型 III 的计算结果的柱状图, 这样能更好地反映出计算

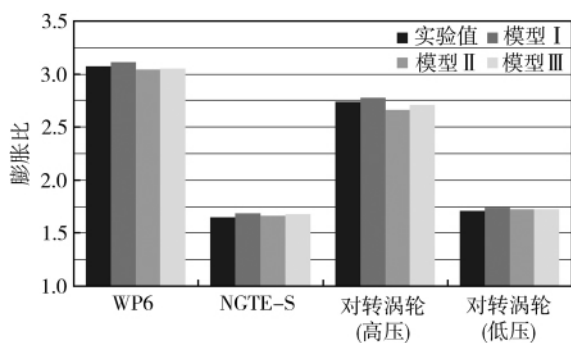


图 2 涡轮膨胀比的计算结果

Fig. 2 Results of turbine pressure ratio

值与计算值之间, 计算值与实验值之间的关系。

从柱状图 2 中可得出两点结论: 一是模型 I、模型 II 和模型 III 的计算值与实验值之间存在误差, 但是误差都很小, 在工程应用范围之内; 二是模型 III 的计算值与模型 I 和模型 II 的计算值相比是很接近的, 这说明模型 III 的精度是满足要求的, 因为模型 I 和模型 II 在实际中已经得到了应用。

为进一步说明模型 III 的精度, 就要对模型的计算值做误差分析。表 4 中列出了模型 I、模型 II 和模型 III 针对 4 种算例涡轮的计算误差值, 其误差值以绝对值的形式给出。

表 4 计算值与实际值的误差 (单位: %)

Table 4 Error of the calculated value and the actual value (unit: %)

算例涡轮	计算误差(绝对值)		
	模型 I	模型 II	模型 III
WP6	1.170	1.040	0.878
NGTE-S	2.061	0.788	1.698
对转涡轮(高压)	1.424	2.885	0.986
对转涡轮(低压)	1.698	0.761	1.054

从表 4 中不难看出模型 III 的精度要大于模型 I、模型 II 的精度, 这说明模型 III 在计算精度上具有一定的优越性。图 3 的误差折线图反应出了模型 I、模型 II 和模型 III 计算误差的分布。

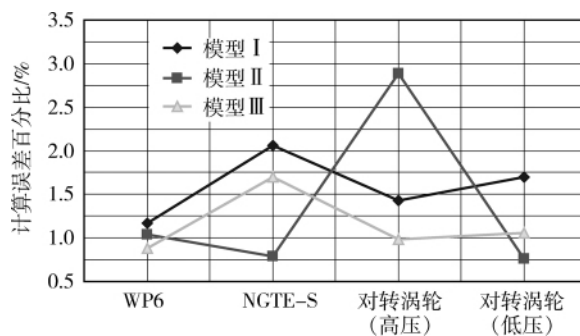


图 3 计算值与实际值的误差

Fig. 3 Error of the calculated value and the actual value

在折线图中, 模型 I 和模型 III 的误差曲线呈现出平缓走势。这说明针对不同的算例涡轮, 模型 I 和模型 III 的计算误差波动很小, 计算结果精确可靠。而模型 II 的计算误差波动就略显大了些, 模型 II 的普适性要差于模型 I 和模型 III。

另外, 比较模型 I 和模型 III 的误差曲线可发

现,模型Ⅲ的误差曲线在模型Ⅰ的误差曲线的下方,说明模型Ⅲ的精度要更好.虽然模型Ⅰ的精度已经可以满足工程要求,但是模型Ⅲ中只有一个方程,而模型Ⅰ中有两个方程,这就使体现出了模型Ⅲ在数值模拟编程计算时的优越性.

比较模型Ⅲ和模型Ⅱ可得出,模型Ⅱ的计算精度也可满足工程中的使用要求,且模型Ⅱ中也只有一个方程,那么模型Ⅲ的优势就体现在它的应用性上.从文献[7]中得知,在程序中应用模型Ⅱ时,运用了气体组分分析方法计算气体性质,从而计算出气体的熵值,这使得模型的应用性大为降低,因为气体成分比较复杂,导致气体组分分析方法较为繁琐.然而,模型Ⅲ在应用时仅使用 ϕ 函数的经验公式即可,而且大量文献都对 ϕ 函数的经验公式进行了研究,所以模型Ⅲ具有更强的应用性.

5 分析与结论

通过上述分析可以得出如下结论:

1) 模型Ⅲ的计算精度优于其他模型.模型Ⅲ与模型Ⅰ相比,模型Ⅲ中不含有理想状态值的计算,因为理想状态的处理隐含在了模型Ⅲ的推导过程中,这就减少一次误差的积累,毕竟理想状态并非“理想状态”.另外,模型Ⅲ的数学形式中省略了热焓关系式的应用.因为气体性质焓值经验公式也是一种经验近似,所以省略之后会减少误差的积累.

2) 模型Ⅲ具有较好的应用性.模型Ⅲ是基于 ϕ 函数经验公式的,而模型Ⅱ是基于熵值的,前者的应用较为简便,可以大大提高编程效率和计算效率.后者的熵值的计算在工程研究就较为少见,通过气体组分分析方法计算熵值又是比较繁琐的,同样也使得程序编程效率降低.

3) 模型Ⅲ具有较好的普适性.经过模型Ⅲ和模型Ⅱ的计算误差比较,模型Ⅲ的误差曲线呈平缓分布,而模型Ⅱ的计算误差波动较大.

参考文献:

- [1] 曹源,金世龙,孟光.航空发动机系统级仿真研究的回顾与展望[J].航空动力学报,2004,19(4):562-571.
CAO Yuan, JIN Xianlong, MENG Guang. Recent development and prospects of system-level modeling of aircraft engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 19(4): 562-571. (in Chinese)
- [2] Ramohalli K N R. Isothermal combustion for improved efficiencies[R]. AIAA-1987-1999, 1987.
- [3] Sirignano W, Delplanque A J P, Liu F. Selected challenges in jet and rocket engine combustion research[R]. AIAA-1997-2701, 1997.
- [4] Liu F, Sirignano W A. Turbojet and turbofan engine performance increases through turbine burners[R]. AIAA-2000-0741, 2000.
- [5] Liew K H, Urip E, Yang S L, et al. A complete parametric cycle analysis of a turbofan with interstage turbine burner[R]. AIAA-2003-685, 2000.
- [6] Chen G, Hoffman M A, Davis R L. Improvements in gas-turbine performance through the use of multiple turbine inter-stage burners[R]. AIAA-2004-374, 2004.
- [7] Chiu Y M. A performance study of a super-cruise engine with isothermal combustion inside the turbine[D]. Blacksburg, Virginia, USA: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2004.
- [8] Liew K H. Aerothermodynamic cycle analysis of a dual-spool, separate-exhaust turbofan engine with an interstage turbine[D]. Houghton, Michigan, USA: Michigan Technological University, 2006.
- [9] 孙鹏,任静,蒋洪德.基于顺序算法的灵活燃料燃气轮机气动热力性能分析[J].工程热物理学报,2011,32(1):29-32.
SUN Peng, REN Jing, JIANG Hongde. Sequential algorithm based flexible-fuel gas turbine thermodynamic analysis[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2011, 32(1):29-32. (in Chinese)
- [10] 吴虎,廉筱纯,沈韶瀛.某型加力涡扇发动机变几何扩稳优化模拟[J].航空动力学报,2001,16(4):390-393.
WU Hu, LIAN Xiaochun, SHEN Shaoying. A study of enlarging surge margin and optimization of variable geometry for afterburning turbofan engines[J]. Journal of Aerospace Power, 2001, 16(4):390-393. (in Chinese)
- [11] 周文祥,黄金泉.涡扇发动机高空起动模型研究[J].航空动力学报,2007,22(8):1384-1390.
ZHOU Wenxiang, HUANG Jinquan. Research on the start-up model of turbofan engine at high altitude[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(8):1384-1390. (in Chinese)
- [12] 于龙江,朴英.一种简化算法的航空发动机全状态数学模型[J].航空动力学报,2008,23(3):510-515.
YU Longjian, PIAO Ying. Full range modeling of aero engine systems based on a simplified algorithm[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(3):510-515. (in Chinese)
- [13] 黄国平,温泉,李博,等.微型涡喷发动机顶层设计研究[J].航空动力学报,2003,18(6):832-838.
HUANG Guoping, WEN Quan, LI Bo, et al. Top level design of micro turbine jet engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(6):832-838. (in Chinese)
- [14] 廉筱纯,吴虎.航空发动机原理[M].西安:西北工业大学出版社,2005.
- [15] 骆广琦,桑增产,王如根,等.航空燃气涡轮发动机数值仿真[M].北京:国防工业出版社,2007.
- [16] 程本林.提高涡轮发动机性能的新概念方法——涡轮通道

- 内补燃循环性能研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2011.
CHENG Benlin. A new concept of turbojet and turbofan engine performance increases through turbine inter-blade burner[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,2011. (in Chinese)
- [17] 彭泽琰,刘刚. 航空燃气轮机原理:上册[M]. 北京:国防工业出版社,2000.
- [18] Walsh P P, Fletcher P. Gas turbine performance [M]. Blackwell; Science Ltd. ,1998.
- [19] 沈维道,蒋智敏,童钧耕. 工程热力学[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- [20] 周勇,赵晓路,徐建中. WP6 涡轮部件设计状态及实验状态的数值模拟[J]. 工程热物理学报, 2005, 26 (5): 767-769.
ZHOU Yong, CHAO Xiaolu, XU Jianzhong. The numerical simulation of the design condition and test condition in WP6 turbine[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2005, 26(5): 767-769. (in Chinese)
- [21] 方德昌. 世界航空发动机手册[M]. 北京:航空工业出版社,1996.
- [22] 孙大伟,乔渭阳,许开富,等. 低雷诺数条件下涡轮性能的计算研究[J]. 航空动力学报, 2008, 23(7): 1253-1259.
SUN Dawei, QIAO Weiyang, XU Kaifu, et al. Study on turbine performance at low Reynolds number [J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(7): 1253-1259. (in Chinese)
- [23] Whitney W J, Schum H J, Behning F P. Cold-air investigation of a turbine for high-temperature-engine application IV: two-stage turbine performance [R]. NASA ND - 3751, 1972.
- [24] 刘思永,王屏,方祥军,等. 无导叶对转涡轮新技术在高推比航空发动机中的运用[J]. 航空动力学报, 2002, 17(4): 495-499.
LIU Siyong, WANG Ping, FANG Xiangjun, et al. Application of contra-rotating turbine without guide vanes to high thrust loading aeroengine[J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(4): 495-499. (in Chinese)