

文章编号:1000-8055(2012)01-0183-07

弧齿锥齿轮误差敏感性优化设计

苏进展, 方宗德

(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 从齿面结构上提出了通过优化差曲面全曲率来改善弧齿锥齿轮的安装误差敏感性问题的方法. 推导了啮合点处沿齿线方向的两啮合齿面全曲率作为敏感性系数, 分析了局部综合参数和参考点位置参数对参考点处的敏感系数的影响. 提出了通过优化传动比一阶导数、接触迹线方向、二阶变异性系数和三阶变异性系数, 获得对安装误差敏感性低的小轮加工参数. 算例表明: 优化后的齿轮副在啮合过程中的敏感性系数控制在较小范围之内, 传动误差的幅值和对称性均满足设计要求, 改善了齿轮副的啮合质量.

关 键 词: 弧齿锥齿轮; 敏感性; 局部综合法; 齿面印痕; 传动误差

中图分类号: V26; TH132

文献标志码: A

Optimization design of the error sensitivity for spiral bevel gears

SU Jin-zhan, FANG Zong-de

(School of Mechanical Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In order to improve the sensitivity of spiral bevel gears caused by assembly errors, the optimization total curvature of different surface was applied from the tooth surface topology structure. The total curvature of two meshing surface contact points which orients lengthwise, can be considered as sensitivity coefficient, and the effect of reference point sensitivity coefficient of local synthesis and location parameters was investigated. The machine-tool settings of pinion which reduce sensitivity of assembly errors can be obtained by the optimization of the first order gear ratio, contact path direction, second order modified and third roll coefficient. The numerical example reveals that sensitivity coefficients of whole mesh cycle is controlled in comparatively small range, the amplitude and symmetry of transmission curve can be achieved to design requirements, the meshing quality can be improved.

Key words: spiral bevel gears; sensitivity; local synthesis; contact patterns; transmission errors

弧齿锥齿轮在实际工况中不可避免地存在着安装误差、变形及其他随机误差. 因此齿面印痕必将偏离理想状态, 同时传动误差曲线也要发生变化, 引起诸如齿轮副运转不平稳、振动、冲击等不利因素, 甚至影响到齿轮副的正常运转. 考虑到现有制造业水平及加工成本因素, 通过提高齿轮副

及系统各部件的精度来减小这些不利因素的影响是困难的. 因此如何降低啮合质量对安装误差的敏感性成为弧齿锥齿轮齿面设计的关键.

美国 Gleason 公司的 Baxter^[1] 曾经研究过曲线齿锥齿轮副的敏感性问题, 用一个 4×2 矩阵表示了部分二阶啮合特性对安装误差的敏感性影

收稿日期: 2011-02-24; 修订日期: 2011-06-29

基金项目: 国家自然科学基金(50875211; 51175423)

作者简介: 苏进展(1982—), 男, 福建泉州人, 博士后, 主要从事复杂齿面设计与制造方向研究.

响,在计算中用差分法代替导数. Litvin F L, Arg-
yris J 等^[2-5]对接触迹线和传动误差曲线进行多项
式拟合,通过优化获得接触迹线为直线和传动误
差幅值满足要求的加工参数. 王小椿等^[6]用完全
解析的方法建立了安装误差对齿面啮合特性的影
响,并研究了敏感性矩阵与 V/H (vertical/hori-
zontal) 检验之间的关系. 徐晓俊等^[7]详细讨论了
啮合齿面的安装误差敏感特性,通过安装误差的
优化组合,在不提高加工精度的前提下改善了传
动副的啮合质量. 吴训成、毛世民、吴序堂等^[8-10]
推导了点接触齿面的接触点位置沿公切面内任意
垂直两方向的安装误差敏感性计算公式,并用于
主动设计中. 唐进元、杜晋^[11]考虑初始计算点位
置对安装误差敏感性的影响,对预定传动误差曲
线的弧齿锥齿轮主动设计方法进行了改进,确定
合理的初始计算点位置,降低误差敏感性系数. 随
后,唐进元等^[12]提出了安装误差敏感性和容差性
概念,建立安装误差敏感性和容差性分析模型,获
得安装误差对接触质量的影响规律和保证接触质
量的误差极限值,为锥齿轮制造质量和制定科学的
安装工艺参数提供了理论指导.

本文在推导了弧齿锥齿轮副在啮合点处沿齿
线方向的全曲率,分析了局部综合参数和设计参
考点位置参数对全曲率影响的基础上,通过优化
局部综合参数和变性系数,获得具有敏感性低和
预置传动误差曲线的小轮加工参数.

1 弧齿锥齿轮敏感性分析

1.1 差曲面的全曲率

设齿面 Σ_1 和 Σ_2 在 M_0 相切,它们在点 M_0 处
有相同的法向矢量和切平面(图 1 所示),设 Σ_1 沿
着 α 方向的法曲率为 $k_n^{(1)}$, 曲面 Σ_1 到切平面的距
离 δ_1 , 设 Σ_2 沿着 α 方向的法曲率为 $k_n^{(2)}$, 曲面 Σ_2
到切平面的距离 δ_2 , 两曲面之间的距离在 M_0 点
附件可以近似用 $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$ 表示,那么

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{1}{2}(k_n^{(1)} - k_n^{(2)})(\Delta s)^2 \quad (1)$$

其中 $\Delta k_n = k_n^{(1)} - k_n^{(2)}$ 称为曲面 Σ_1, Σ_2 在 M_0 点沿
 α 方向的相对曲率或差曲率.

设曲面 Σ_1 沿着 α_1, α_2 两个垂直方向的法曲率
和短程挠率为 $k_{n1}^{(1)}, k_{n2}^{(1)}$ 和 $\tau_{g1}^{(1)}$, 曲面 Σ_2 沿着 α_1, α_2
两个方向的法曲率和短程挠率为 $k_{n1}^{(2)}, k_{n2}^{(2)}$ 和 $\tau_{g1}^{(2)}$,
称 $k_{n1}^{(12)} = k_{n1}^{(1)} - k_{n1}^{(2)}, k_{n2}^{(12)} = k_{n2}^{(1)} - k_{n2}^{(2)}$ 和 $\tau_{g1}^{(12)} =$

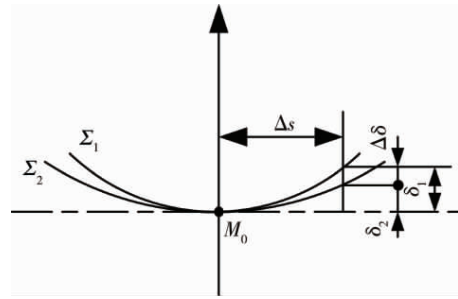


图 1 曲面间的距离

Fig. 1 Distance of tooth surfaces

$\tau_{g1}^{(1)} - \tau_{g1}^{(2)}$ 为曲面 Σ_1, Σ_2 在 M_0 点沿着 α_1, α_2 方向
的相对法曲率和相对短程挠率. 若 α 和 α_1 的夹角为
 θ , 由欧拉公式可知

$$\begin{cases} k_n^{(1)} = k_{n1}^{(1)} \cos^2 \theta + 2\tau_{g1}^{(1)} \sin \theta \cos \theta + k_{n1}^{(1)} \sin^2 \theta \\ k_n^{(2)} = k_{n1}^{(2)} \cos^2 \theta + 2\tau_{g1}^{(2)} \sin \theta \cos \theta + k_{n1}^{(2)} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (2)$$

两式相减即可得到

$$k_n^{(12)} = k_{n1}^{(12)} \cos^2 \theta + 2\tau_{g1}^{(12)} \sin \theta \cos \theta + k_{n2}^{(12)} \sin^2 \theta \quad (3)$$

其形式与欧拉公式完全一致的^[8].

若有一个曲面,它在两曲面公切面上的任意
切线方向的法曲率等于两曲面在该方向的法曲率
之差,这个曲面就称为两曲面的差曲面. 则差曲面
的全曲率可以表示成

$$k^{(12)} = k_{n1}^{(12)} k_{n2}^{(12)} - (\tau_{g1}^{(12)})^2 \quad (4)$$

线接触齿轮副的 $k^{(12)}$ 为 0, 点接触啮合齿面副的
 $k^{(12)}$ 因在接触方向有失配而不为 0. 随着 $k^{(12)}$ 趋
近于 0, 点接触就趋近于线接触, 误差敏感性的数
值将趋近于无穷大. 这就是线啮合齿面副的误差
敏感性比点啮合齿面副的误差敏感性大的原因^[5].
全曲率 $k^{(12)}$ 是误差敏感性的关键指标, 称
之为敏感性系数.

1.2 啮合点齿向方向的确定

由局部综合法可知, 接触迹线方向、参考点处
传动比一阶导数 m'_{21} 、接触椭圆长半轴 a 和参考
点位置 $(\Delta x, \Delta y)$ 对参考点 M_0 的全曲率均有影
响. 为便于分析比较这些参数对啮合点处的全曲
率影响, 取大轮的齿向方向 α 为参考方向, 如图 2
所示. 已知齿面 Σ_1 和 Σ_2 的主曲率和主方向, 则啮
合点 M_0 在其切平面的齿向方向可按如下步骤
确定:

步骤 1 确定啮合点 M_0 、内锥点 M_1 和外锥点
 M_2 的位置矢量 $r^{(M_0)}(\theta_0, \phi_0), r^{(M_1)}(\theta_1, \phi_1)$ 和

$r^{(M_2)}(\theta_2, \phi_2)$ 及 M_0 的法向矢量 $n^{(M_0)}(\theta_0, \phi_0)$.

步骤 2 确定内锥点 M_1 和外锥点 M_2 在切平面 T 的投影 M'_1 和 M'_2 , 则

$$\alpha = \overline{M_1 M'_2} / |\overline{M_1 M'_2}| \quad (5)$$

设 M_0 点处大轮两个主方向 e_s 和 e_q 对应的主曲率为 k_s 和 k_q , 小轮两个主方向 e_f 和 e_h 对应的主曲率为 k_f 和 k_h , θ_1 和 θ_2 分别为 e_f, e_s 和 α 的夹角. 因此确定啮合点的位置矢量和法向矢量后, 由式(2)和式(3)可以求解出齿面接触迹线上每个啮合点的全曲率.

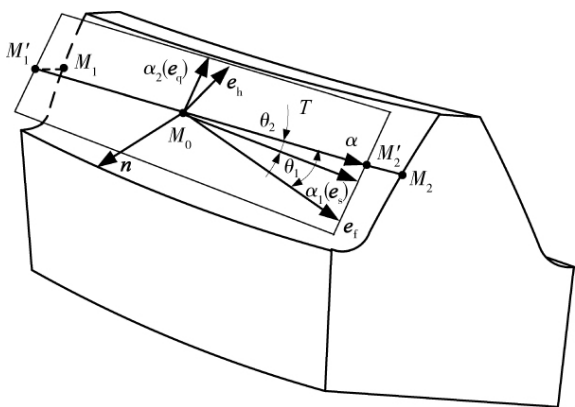


图 2 接触点全曲率

Fig. 2 Total curvature of contact point

1.3 敏感性分析

设计参考点处的安装误差敏感性是影响齿轮啮合质量的重要因素. 图 3 所示为某大轮右旋、小轮左旋弧齿锥齿轮工作面各参数对敏感性系数的影响, 包括: 参考点位置参数 $(\Delta x, \Delta y)$ 和局部综合参数 (η_2, m'_{21}, a) . Δx 为设计参考点 M_0 沿着节锥方向的移动量, 移向大端为正, 为负则向小端移动; Δy 为考点 M_0 沿着齿高方向的移动量, 移向齿顶为正, 移向齿根为负; η_2 为大轮齿面接触迹线的切线方向; m'_{21} 为传动比的一阶导数; a 为瞬时接触椭圆的长半轴.

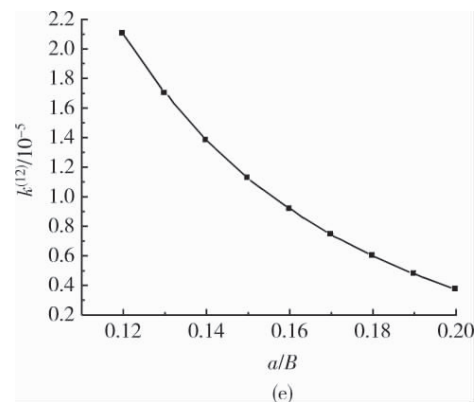
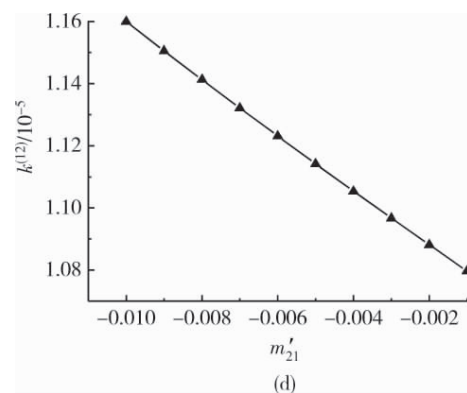
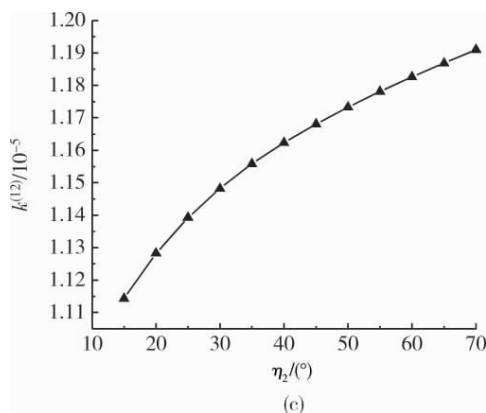
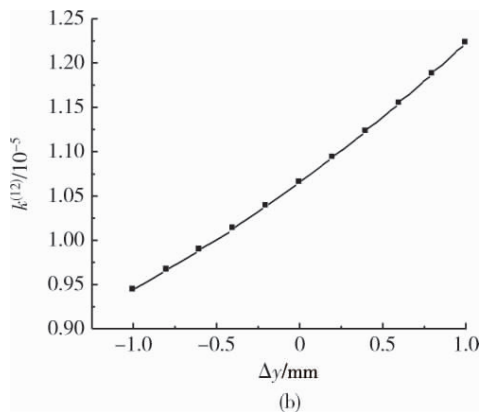
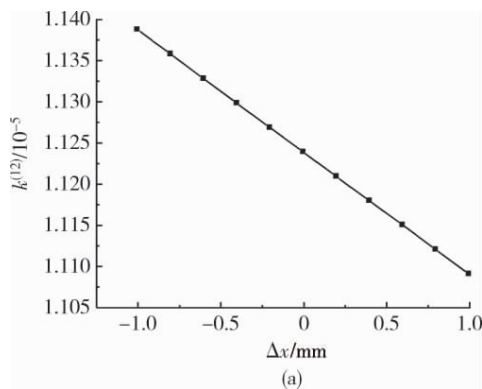


图 3 局部综合参数对 $k^{(12)}$ 影响

Fig. 3 Influence of local synthesis parameters on $k^{(12)}$

图 3(a)、图 3(b)为从设计参考点 M_0 的位置变化对敏感性系数的影响,可以看出 Δx 从小端向大端移动,敏感性系数 $k^{(12)}$ 减小,但可能出现偏载和小端边缘接触造成应力集中和振动噪声等问题; Δy 从齿根向齿顶移动,敏感性系数 $k^{(12)}$ 增大,同时也要考虑传动误差的对称性,避免加载时发生齿顶边缘接触.图 3(c)~图 3(e)分析了参考点处预置的 3 个局部综合参数对敏感性系数的影响,从图 3 上看出随着夹角 η_2 增大 $k^{(12)}$ 越大,接触迹线设计越倾斜,敏感性系数增大;当接触迹线近似垂直于根锥时敏感性最低,但此时齿轮副重合度也随之减小,啮合平稳性差;传动比一阶导数 m'_{21} 增大, $k^{(12)}$ 值减小;预置椭圆长半轴 a 增大则 $k^{(12)}$ 减小, a 增大表示齿轮副的承载能力增大,椭圆长半轴对敏感性影响最大.

同样,对于非工作面可得到类似的结果,在此不再赘述.以上仅单参数、定性分析局部综合参数对敏感性系数 $k^{(12)}$ 的影响和变化规律,设计中要综合考虑具体齿轮副工况、支承条件并结合 TCA (tooth contact analysis), LTCA (loaded-tooth contact analysis) 优化选择相关参数达到啮合稳定性要求.

2 敏感性设计

基于局部综合法的弧齿锥齿轮加工参数设计,通过预置二阶参数有效地预控齿轮副在参考点处及其附近的啮合性能,保证参考点附近的齿面二阶性质.但是远离参考点的齿面性质就无法控制,接触迹线可能出现严重弯曲、瞬时接触椭圆长轴的长度变化剧烈等现象,以至于齿面接触区域出现菱形、鱼尾形、扇形或梯形等情形.敏感性系数 $k^{(12)}$ 变化亦是如此,即在参考点及参考点附近变化幅度很小,而远离参考点处变化可能很大,因而对安装误差非常敏感.

本文提出了基于全曲率的敏感性设计方法,从齿面结构上提高啮合稳定性.齿轮副从进入啮合到退出啮合,每个啮合点处的全曲率 $k^{(12)}$ 不断变化,控制整个啮合过程 $k^{(12)}$ 波动范围,有助于提高啮合的稳定性.敏感性分析中,5 个参数对全曲率 $k^{(12)}$ 均有影响,实际设计中参考点位置在节锥中点附近微小变动, Δx 和 Δy 主要用于调整啮合斑点在齿面上的位置和传动误差的对称性.二阶接触参数 η_2, a 和 m'_{21} 是预置的, η_2 主要影响齿轮副的重合度和啮合平稳性, a 对齿轮强度和误

差敏感性有重要影响, m'_{21} 则影响传动误差幅值和方向.

通过优化传动比一阶导数 m'_{21} 来优化齿轮副在整个啮合周期内的全曲率 $k^{(12)}$,调整二阶变数系数 C 和三阶变数系数 D 满足传动误差幅值和对称性要求.

优化设计的流程如图 4 所示,由三部分组成:

1) 全曲率 $k^{(12)}$ 优化. 给定参考点 M_0 处局部综合参数 $\eta_2, 2a, m'_{21}$ 的值,通过局部综合获得用展成法加工的小轮加工参数,并计算设计参考点 M_0 的全曲率 $k_0^{(12)}$,借助 TCA 计算从进入啮合到退出啮合每个啮合点处的 $k_i^{(12)}$;以啮合点处 $k_i^{(12)}$ 偏离参考点的 $k_0^{(12)}$ 最小为目标,优化传动比一阶导数 m'_{21} .

$$f(m'_{21}) = \min_{i=1}^n \|k_i^{(12)} - k_0^{(12)}\|_2 \quad (6)$$

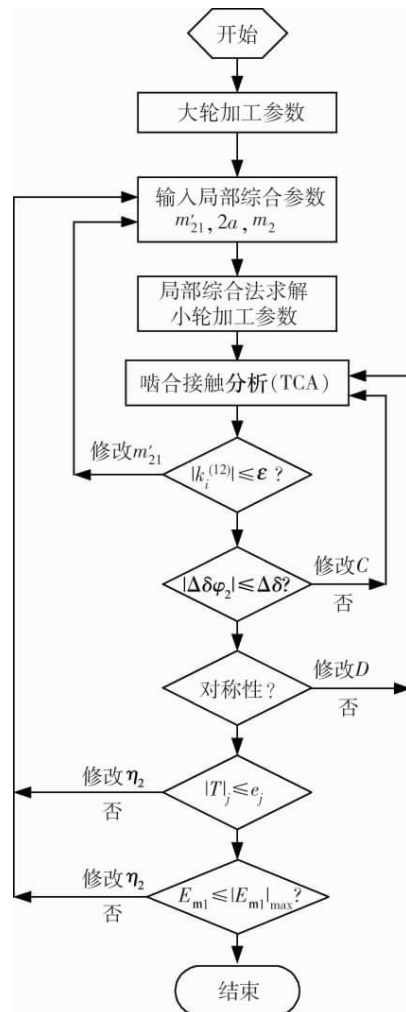


图 4 敏感性优化设计流程

Fig. 4 Design flow for sensitivity optimization

根据传动误差幅值设计要求,通过试算法确定 m'_{21} 的取值范围,作为自变量的约束条件.式(6)为单目标、单变量约束优化的问题,可采用直接法(坐标轮换法、复合形法、罚函数法等)求解,获得 m'_{21} 的值.

2) 优化 C, D 获得理想的传动误差. 优化 m'_{21} 得到小轮加工参数,并进行 TCA 计算,得到的传动误差可能不理想——传动误差不连续、不对称或者幅值过大,修改 C 获得给定传动误差幅值 $\Delta\delta$,调整 D 获得对称传动误差的曲线.

3) 调整 η_2 以满足容差和垂直轮位的要求. 预先给定 4 个安装误差^[4](小轮轴向错位量 H_p 、大轮轴向错位量 H_g 、中心距错位量 V 和轴交角错位量 Σ)的容差,再次调用 TCA 子程序,使齿面印痕在 4 种公差的极限值时仍有理想的齿面印痕和传动误差,若不满足则调整 η_2 ; 另一方面,传统摇台型机床对垂直轮位 E_{ml} 范围有一定的限制,经分析可知接触迹线的方向 η_2 对垂直轮位 E_{ml} 有较大影响, η_2 绝对值越小垂直轮位越大,反之垂直轮位越小,可以调整 η_2 获得合理的垂直轮位 E_{ml} .

通过弧齿锥齿轮敏感性优化,获得对误差敏感性低的小轮加工参数,提高啮合稳定性,最后得到满足要求的齿面印痕和传动误差曲线. 另外,经过优化得到的变性系数 C, D 可能无法用变性凸轮机构来实现,可将摇台机床的调整参数等价转换到 CNC(computer numerical control)锥齿轮机床,从而实现弧齿锥齿轮的加工.

3 算例

以一对弧齿锥齿轮为例来说明以上设计方法. 采用双重收缩设计弧齿锥齿轮齿坯,表 1 为主、动锥齿轮齿坯基本参数;表 2 列出了工作面和非工作面局部综合参数;大轮和小轮的加工参数分别列于表 3 和表 4;图 5 和图 6 分别为工作面和非工作面 TCA 结果,包括齿面印痕和传动误差.

表 1 主、从动锥齿轮参数

Table 1 Blank of the driving and driven bevel gears

项目	符号	主动锥齿轮	从动锥齿轮
齿数	Z	23	86
模数/mm	m	4.25	
法向压力角/(°)	α_n	20	
中点螺旋角/(°)	β_m	25	
螺旋方向		左	右

项目	符号	主动锥齿轮	从动锥齿轮
轴交角/(°)	Σ	51°9'7"	
节锥角/(°)	δ	10°6'48"	41°2'20"
顶锥角/(°)	δ_a	10°57'3"	41°24'
根锥角/(°)	δ_f	9°45'7"	40°12'4"
节圆直径/mm	d	97.75	365.50
外锥距/mm	R	278.341	
中点锥距/mm	R_m	256.841	
齿宽/mm	B	43	
齿顶高/mm	h_a	4.89	2.11
齿根高/mm	h_f	2.91	5.69
全齿高/mm	h	7.8	7.8
齿顶隙/mm	C	0.8	0.8
刀盘名义直径/mm	D_0	304.8	

表 2 局部综合参数

Table 2 Parameters for local synthesis

参数	工作面	非工作面
接触迹线方向 η_2 /(°)	20.643 2	15.849 3
传动比一阶导数 m'_{21}	-0.004 238	-0.005 148
接触椭圆长轴 $2a$ /mm	12.9	
弹性变形量 δ /mm	0.006 5	
Δx /mm	0.45	-0.25
Δy /mm	0.2	0.3

表 3 大轮加工参数

Table 3 Machine tool-settings for gear

参数	大轮加工参数
刀盘直径 D_{c2} /mm	152.4
刀顶距 P_{w2} /mm	3.429
刀具齿形角 α_2 /(°)	21(内刀)19(外刀)
径向刀位 S_{f2} /mm	236.879 2
角向刀位 q_2 /mm	35.669 9
滚比 m_{2c2}	1.522 95
垂直轮位 E_{m2} /mm	0
轴向轮位 X_{g2} /mm	0
床位 X_{b2} /mm	-1.623 470
轮坯安装角 γ_2 /(°)	40.201 1

表 4 小轮加工参数

Table 4 Machine tool-settings for pinion

参数	小轮凹面	小轮凸面
刀尖半径 R_p/mm	158.679 1	146.657 8
齿形角 $\alpha_1/(\text{^\circ})$	18.0	22.0
径向刀位 S_{r1}/mm	242.765 9	231.299 6
角向刀位 $q_1/(\text{^\circ})$	36.036 5	36.485 6
滚比 m_{1cl}	5.948 59	5.448 9
垂直轮位 E_{m1}/mm	-6.857 3	5.674 2
轴向轮位 X_{g1}/mm	9.965 7	-9.656 18
床位 X_{b1}/mm	-2.834 6	0.488 3
轮坯安装角 $\gamma_1/(\text{^\circ})$	9.75	9.75
二阶变数系数 C	0.103 244	-0.114 567
三阶变数系数 D	0.075 732	0.102 421

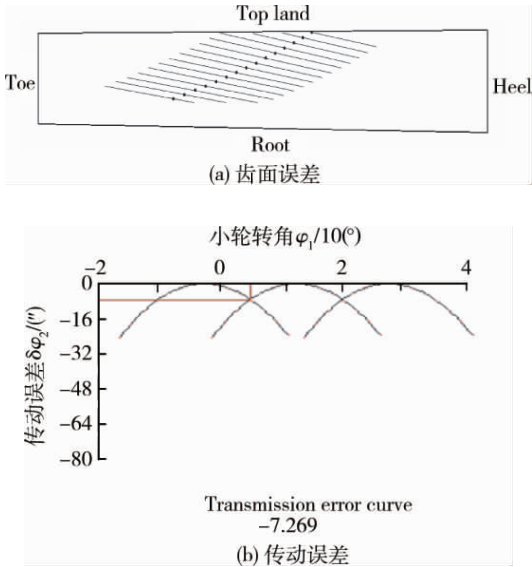


图 5 工作面齿面印痕和传动误差图

Fig. 5 Contact pattern and transmission errors of the working side

从图 5 工作面 TCA 结果可以看出,工作面齿面印痕位于齿宽中部偏小端,在加载条件下齿面印痕可能向中部、大端方向移动;接触迹线有一定的倾斜,这有利于提高齿轮副重合度及运动平稳性;传动误差幅值(7.269'')控制在较小的范围之内($\leq 8.0''$).图 6 为非工作面 TCA 结果图,从图中可以看出非工作面的齿面印痕则位于齿面中部,接触迹线较工作面倾斜,传动误差幅值为 10.706'.

图 7 和图 8 分别为啮合过程中工作面和齿面印痕位于齿面中部的敏感系数,表 5 为齿轮副错位量的容差范围.

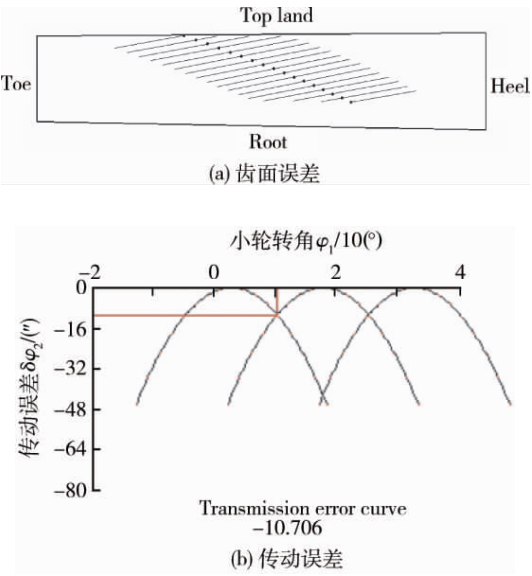


图 6 非工作面齿面印痕和传动误差

Fig. 6 Contact pattern and transmission errors of the non-working side

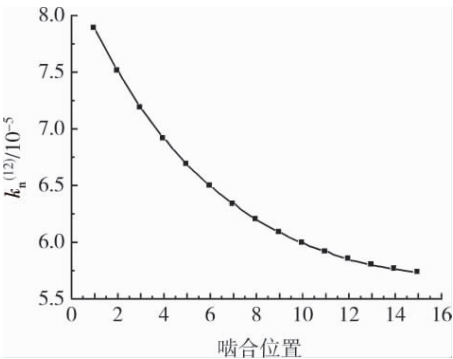


图 7 工作面敏感系数

Fig. 7 Sensitivity coefficient of working side

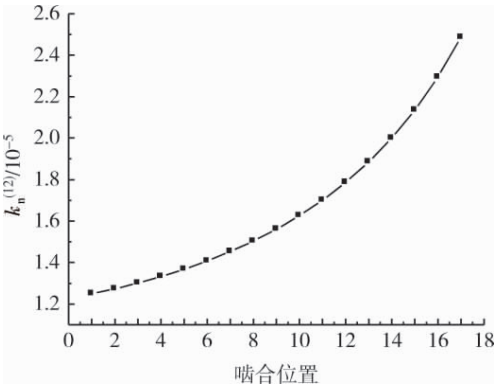


图 8 非工作面敏感系数

Fig. 8 Sensitivity coefficient of non-working side

表 5 错位量容差
Table 5 Errors of alignment allowed

参数	容差值	
	最大值	最小值
大轮轴向错位量 H_g/mm	0.4852	-0.3644
小轮轴向错位量 H_p/mm	0.4254	-0.7121
中心距错位量 V/mm	0.8032	-0.5486
轴交角错位量 $\Sigma/(\circ)$	2.8647	-2.3245

从接触迹线的全曲率图(图 7、图 8)可以看出,从进入啮合到退出啮合过程中,全曲率的波动范围很小,这有利于降低齿面印痕对误差的敏感性;全曲率变化越小,则接触迹线在旋转投影面上接近于直线;同时所获得的接触椭圆长轴大小相近,避免产生接触区接触缺陷.表 5 为综合考虑工作面和非工作面后得到齿轮副错位量的容差,在容差范围之内,齿轮副具有良好的齿面印痕和传动误差.

4 结 论

- 1) 优化传动比一阶导数可获低敏感性的小轮加工参数,调整接触迹线方向以减小垂直轮位和提高错位量的容差,优化二阶变性系数满足传动误差幅值的设计要求;优化三阶变性系数得到对称的传动误差曲线.
- 2) 验证了接触迹线设计为直线可以降低对安装误差的敏感性和避免接触区缺陷.
- 3) 设计较倾斜的接触迹线,可提高齿轮副的重合度,但敏感性会增加.

参考文献:

[1] Baxter M L. Effect of misalignment on tooth action of bevel and hypoid gears[R]. ASME Paper 61-MD-20,1962.

[2] Litvin F L,Fuentes A,Hayasaka K. Design,manufacture, stress analysis, and experimental tests of low-noise high endurance spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory,2006,41(1):83-118.

[3] Litvin F L,Fuentes A,Fan Q,et al. Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face milled format generated spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory,2002,37(5):441-459.

[4] Argyris J,Fuentes A,Litvin F L. Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel

gears[J]. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering,2002,191(11-12):1057-1095.

[5] Litvin F L,Chen J S,Sep T M,et al. Computerized simulation of transmission errors and shift of bearing contact for face milled hypoid gear drive[J]. Journal of Mechanical Design,1995,117(6):262-268.

[6] 王小椿,吴序堂. 空间点啮合齿面的接触特性对安装误差的敏感性分析[J]. 西安交通大学学报,1990,24(6):45-57.

WANG Xiaochun,WU Xutang. Sensitivity of the contact characteristics of skew point contact surfaces to the mounting errors[J]. Journal of Xi'an Jiao Tong University,1990,24(6):45-57. (in Chinese)

[7] 徐晓俊,唐德成,高业田,等. 失配点啮合齿面的安装误差敏感特性[J]. 哈尔滨工业大学,1994,26(5):113-117.

XU Xiaojun,TANG Dewei,GAO Yetian,et al. The assembling error sensitivity of conjugated tooth surfaces with point contact[J]. Journal of Harbin Institute of Technology,1994,26(5):113-117. (in Chinese)

[8] 吴训成,毛世民,吴序堂. 点接触齿面的安装误差敏感性研究[J]. 中国机械工程,2000,11(5):700-703.

WU Xuncheng,MAO Shinmin,WU Xutang. Research on the error sensitivity of point-contact tooth surfaces with respect to the mounting errors[J]. China Mechanical Engineering,2000,11(5):700-703. (in Chinese)

[9] 吴训成,毛世民,吴序堂. 点接触齿面啮合分析的基本公式及其应用研究[J]. 机械设计,2000,2(2):15-18.

WU Xuncheng,MAO Shinmin,WU Xutang. A study on the fundamental formula for the meshing a analysis of point-contact tooth surfaces and their application[J]. Ji Xie She Ji,2000,2(2):15-18. (in Chinese)

[10] 吴训成,毛世民,吴序堂. 点接触齿面在控制误差敏感性条件下的二阶参数设计[J]. 西安交通大学学报,1999,33(11):86-89.

WU Xuncheng,MAO Shinmin,WU Xutang. Effect of second-order parameters on design for point-contact tooth surface by controlling error sensitivity[J]. Journal of Xi'an Jiao Tong University,1999,33(11):86-89. (in Chinese)

[11] 唐进元,杜晋. 考虑安装误差敏感性的螺旋锥齿轮主动设计方法[J]. 中国机械工程,2009,20(10):1197-1201.

TANG Jinyuan,DU Jin. Active design method of spiral bevel gears considering mounting error sensitivity[J]. China Mechanical Engineering,2009,20(10):1197-1201. (in Chinese)

[12] 唐进元,雷国伟,杜晋,等. 螺旋锥齿轮安装误差敏感性与容差性研究[J]. 航空动力学报,2009,24(8):1878-1885.

TANG Jinyuan,LEI Guowei,DU Jin,et al. Research on alignment error sensitivity and tolerance limit analysis of spiral bevel gears[J]. Journal of Aerospace Power,2009,24(8):1878-1885. (in Chinese)