

文章编号:1000-8055(2012)07-1625-05

无迹增量滤波方法

傅惠民, 娄泰山, 吴云章

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 提出无迹增量滤波(UIF)的概念,建立一般无迹增量滤波模型及其分析方法,并对具有加性噪声的无迹增量滤波进行了详细讨论,给出其递推算法.在工程实际中,由于环境因素的影响、测量设备的不稳定性、模型和参数的选取不当等原因往往带来未知的系统误差.在这种情况下,传统的无迹 Kalman 滤波方法(UKF)在递推过程中会产生较大误差,甚至导致发散.提出的无迹增量滤波方法能够成功消除这种未知的系统误差,提高滤波的精度.该方法计算简单,便于工程应用.

关 键 词: 无迹增量滤波; 无迹 Kalman 滤波; 增量量测方程; 系统误差; 滤波精度; 深空探测

中图分类号: V448; O231

文献标识码: A

Unscented incremental filter method

FU Hui-min, LOU Tai-shan, WU Yun-zhang

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The unscented incremental filter(UIF)model and analysis method were put forward, in which its concept, basis equations and the recursive calculative steps were established, and special concern was given to UIF with additive noise. In practice, the measurement data have unknown system errors, for the environmental factors, the instability of measurement equipments and the improper models and parameters. Under these conditions, the classic unscented Kalman filter(UKF)have greater filtering error, and even lead to diverge. The presented UIF can successfully eliminate these unknown system errors and improve the filtering accuracy. The method is simple to calculate and easy to apply in engineering.

Key words: unscented incremental filter (UIF); unscented Kalman filter (UKF); incremental measurement equation; system error; filtering accuracy; deep space exploration

工程实践中,存在大量的非线性随机动态系统,如组合导航系统、深空探测器的导航系统、飞机和舰船的惯性导航系统、卫星轨道/姿态的估计系统和目标跟踪等.由于解决非线性滤波问题的最优方案需要精确描述其后验概率密度,而这一

条件在实际应用中无法满足.因此,人们提出了次优的非线性滤波方法近似贝叶斯估计的最优解^[1],比如基于非线性函数线性化近似的扩展 Kalman 滤波方法(extended Kalman filter,简称 EKF)^[2-3],基于确定性采样的无迹 Kalman 滤波

收稿日期:2012-02-15

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120801.1438.201207.1625_026.html

基金项目:国家重点基础研究发展计划(2012CB720000)

作者简介:傅惠民(1956—),男,浙江遂昌人,“长江学者”特聘教授,博士,从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法、可靠性及滤波理论研究.

方法(unscented Kalman filter, 简称 UKF)^[4-7]和基于随机采样的粒子滤波方法(particle filter, 简称 PF)^[8-9].

针对非线性高斯分布的情况,与非线性函数的近似相比,Julier 和 Uhlmann 认为高斯概率分布的近似更为简单,从而提出了 UKF^[4]. UKF 以无迹变换(unscented transformation, 简称 UT)为基础,采用 Kalman 线性滤波框架和确定性采样形式.这使得 UKF 的计算量与 EKF 算法相当,但性能优于 EKF^[4].

UKF 对量测方程有较高的精度要求,否则在递推过程中会产生较大误差,甚至导致发散.但是在工程实际中,量测数据往往含有未知的系统误差. UKF 无法对这种未知的系统误差进行有效地补偿和校正.为此,文献[10-12]分别提出了线性增量 Kalman 滤波方法、扩展增量 Kalman 滤波方法和自适应增量滤波方法.在此基础上,本文进一步针对非线性离散增量系统,提出一种无迹增量滤波方法(UIF),能够成功地消除上述未知的系统误差,有效地提高滤波的精度.

1 无迹增量滤波基本方程

一般非线性离散增量系统由下式给出^[11]:

$$X_k = f_{k-1}(X_{k-1}, W_{k-1}) \quad (1)$$

$$\Delta Z_k = h_k(X_k, X_{k-1}, V_k) \quad (2)$$

当系统噪声和量测噪声为加性噪声时,增量系统为

$$X_k = f_{k-1}(X_{k-1}) + W_{k-1} \quad (3)$$

$$\Delta Z_k = h_k(X_k, X_{k-1}) + V_k \quad (4)$$

工程中许多情况,式(4)为

$$\Delta Z_k = h_k(X_k) - h_{k-1}(X_{k-1}) + V_k \quad (5)$$

式中 X_k 为状态向量; $f_k(\cdot)$ 和 $h_k(\cdot)$ 为非线性向量离散函数; $\Delta Z_k = Z_k - Z_{k-1}$ 为量测向量增量; Z_k 为量测向量; W_k 和 V_k 分别为系统噪声向量和量测噪声向量.且 W_k 和 V_k 是互不相关的零均值高斯白噪声,方差阵分别为 Q_k 和 R_k ,并且满足

$$\begin{cases} E[W_k] = 0 \\ \text{Cov}[W_k, W_j] = E[W_k W_j^T] = Q_k \delta_{kj} \\ E[V_k] = 0 \\ \text{Cov}[V_k, V_j] = E[V_k V_j^T] = R_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}[W_k, V_j] = E[W_k V_j^T] = 0 \end{cases} \quad (6)$$

在工程实际中,通常量测向量 Z_k 存在系统误差,而增量 $\Delta Z_k = Z_k - Z_{k-1}$ 的系统误差为相对小量,可以忽略不计,也即增量量测方程式(2)、式(4)和式(5)已消除系统误差.

2 一般无迹增量滤波方法

在上述非线性离散增量系统式(1)和式(2)基础上,通过无迹变换对非线性函数 $f_k(\cdot)$ 和 $h_k(\cdot)$ 进行期望和协方差的非线性传递,即可得到 UIF 算法.

2.1 状态扩维

对于增量系统中的噪声项,采用状态扩维的形式进行处理,即令 $X^a = [X^T, W^T, V^T]^T$.

设非线性离散增量系统的状态初始条件为

$$\hat{X}_0 = E[X_0] \quad (7)$$

$$P_0 = E[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T] \quad (8)$$

则由式(7)和式(8)可知扩维后的状态初始化条件为

$$\hat{X}_0^a = E[X_0^a] = E[\hat{X}_0^T, 0, 0]^T \quad (9)$$

$$P_0^a = E[(X_0^a - \hat{X}_0^a)(X_0^a - \hat{X}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_0 & & \\ & Q_0 & \\ & & R_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.2 Sigma 点采样

本文采用 Scaled 无迹变换得到 Scaled Sigma 点,采样点个数 $2L+1$,其中 $L=n+r+m$,则采样公式为^[13]

$$\chi_i = \begin{cases} \bar{x}, & i=0 \\ \bar{x} + (\sqrt{(L+\lambda)P_x})_i, & i=1, \dots, L \\ \bar{x} - (\sqrt{(L+\lambda)P_x})_{i-L}, & i=L+1, \dots, 2L \end{cases} \quad (11)$$

计算均值和协方差所用的加权值公式如下:

$$\begin{cases} w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{L+\lambda} \\ w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{L+\lambda} + (1-\alpha^2+\beta) \\ w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2(L+\lambda)}, \quad i=1, \dots, 2L \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\lambda = \alpha^2(L+\kappa) - L$ 是一个比例因子, α 决定了 Sigma 点的范围,通常为一小的正数 ($0 < \alpha < 1$). κ 是另一个比例因子,通常设置为 $0(L > 3)$ 或 $3-L(L \leq 3)$. β 是一调节参数,对于高斯分布, $\beta=2$ 是最优的.

2.3 算法流程

下面根据 $k-1$ 时刻的状态估计 $\hat{X}_{k-1}$ 和 P_{k-1} ,给出 k 时刻的状态估计 $\hat{X}_k$ 和 P_k .

状态一步预测

$$\chi_{k-1}^a = [\hat{X}_{k-1}^a, \hat{X}_{k-1}^a \pm \sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}^a}] \quad (13)$$

$$\chi_{k/k-1}^x = f_{k-1}(\chi_{k-1}^x, \chi_{k-1}^w) \quad (14)$$

$$\hat{X}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} \chi_{i,k/k-1}^x \quad (15)$$

一步预测误差的方差阵

$$P_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\chi_{i,k/k-1}^x - \hat{X}_{k/k-1}] \times \\ [\chi_{i,k/k-1}^x - \hat{X}_{k/k-1}]^T \quad (16)$$

状态估计

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (\Delta Z_k - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}) \quad (17)$$

估计误差的方差阵

$$P_k = P_{k/k-1} - K_k \Omega_k K_k^T \quad (18)$$

滤波增益矩阵

$$K_k = P_{X_k} \widetilde{\Omega}_k \Omega_k^{-1} \quad (19)$$

式中

$$\chi^a = [(\chi^x)^T, (\chi^w)^T, (\chi^v)^T] \quad (20)$$

$$\Delta Z_{k/k-1} = h_k(\chi_{k/k-1}^x, \hat{X}_{k-1}^x, \chi_{k-1}^v) \quad (21)$$

$$\hat{\Delta Z}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} \Delta Z_{i,k/k-1} \quad (22)$$

$$\Omega_k = P_{\widetilde{\Delta Z}_k} \widetilde{\Delta Z}_k = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\Delta Z_{i,k/k-1} - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}] \times \\ [\Delta Z_{i,k/k-1} - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}]^T \quad (23)$$

$$P_{X_k} \widetilde{\Delta Z}_k = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\chi_{i,k/k-1}^x - \hat{X}_{k/k-1}] \times \\ [\Delta Z_{i,k/k-1} - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}]^T \quad (24)$$

$$\widetilde{\Delta Z}_k = \Delta Z_k - \hat{\Delta Z}_{k/k-1} \quad (25)$$

3 具有加性噪声的无迹增量滤波方法

对于具有加性噪声的非线性离散增量系统式(3)和式(4),通过无迹变换和 Sigma 点重采样可得到具有加性噪声的 UIF 算法。

采用一般的 UIF 进行扩维处理也可以处理具有加性噪声的增量系统,但是具有加性噪声的 UIF 算法只对状态进行 Sigma 点采样,将系统噪声和量测噪声的信息提取出来处理^[13],该算法要比一般的扩维 UIF 算法减少大量存储量和计算工作量,大大提高滤波的效率。

该算法中,初始条件仍由式(7)和式(8)给出, Sigma 点采样公式和权值公式分别为式(11)和式(12),采样个数 $L=n$ 。根据 $k-1$ 时刻的状态估

计 $\hat{X}_{k-1}$ 和 P_{k-1} ,给出 k 时刻的状态估计 $\hat{X}_k$ 和 P_k 的算法流程如下:

计算 Sigma 点

$$\chi_{k-1} = [\hat{X}_{k-1}, \hat{X}_{k-1} \pm \sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}}] \quad (26)$$

状态一步预测

$$\chi_{k/k-1}^* = f_{k-1}(\chi_{k-1}) \quad (27)$$

$$\hat{X}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} \chi_{i,k/k-1}^* \quad (28)$$

一步预测误差的方差阵

$$P_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\chi_{i,k/k-1}^* - \hat{X}_{k/k-1}] \times \\ [\chi_{i,k/k-1}^* - \hat{X}_{k/k-1}]^T + Q_{k-1} \quad (29)$$

重新计算 Sigma 点

$$\chi_{k/k-1} = [\hat{X}_{k/k-1}, \hat{X}_{k/k-1} \pm \sqrt{(L+\lambda)P_{k/k-1}}] \quad (30)$$

$$\Delta Z_{k/k-1} = h_k(\chi_{k/k-1}, \hat{X}_{k-1}) \quad (31)$$

$$\hat{\Delta Z}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} \Delta Z_{i,k/k-1} \quad (32)$$

状态估计

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (\Delta Z_k - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}) \quad (33)$$

估计误差的方差阵

$$P_k = P_{k/k-1} - K_k \Omega_k K_k^T \quad (34)$$

滤波增益矩阵

$$K_k = P_{X_k} \widetilde{\Delta Z}_k \Omega_k^{-1} \quad (35)$$

式中

$$\Omega_k = P_{\widetilde{\Delta Z}_k} \widetilde{\Delta Z}_k = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\Delta Z_{i,k/k-1} - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}] \times \\ [\Delta Z_{i,k/k-1} - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}]^T + R_k \quad (36)$$

$$P_{X_k} \widetilde{\Delta Z}_k = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\chi_{i,k/k-1} - \hat{X}_{k/k-1}] \times \\ [\Delta Z_{i,k/k-1} - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}]^T \quad (37)$$

特别地,增量量测方程由式(5)给出时,上述算法流程中只需将式(31)改为

$$\Delta Z_{k/k-1} = h_k(\chi_{k/k-1}) - h_{k-1}(\hat{X}_{k-1}) \quad (38)$$

即可。

4 计算机仿真验证

考虑单变量非平稳增长模型(univariate non-stationary growth model, 简称 UNGM 模型)^[9,14]。

$$X_k = 0.5X_{k-1} + \frac{2.5X_{k-1}}{1+X_{k-1}^2} + 8\cos(1.2k)$$

$$+W_{k-1} \tag{39}$$

$$Z_k=\frac{X_k^2}{20}+a_k+V_k \tag{40}$$

式中 W_k 和 V_k 是独立的高斯白噪声序列,且 W_k 的均值 $q=0$ 和方差 $Q=1$,量测噪声 V_k 的均值 $r=0$ 和方差 $R=1$,并取状态初始值 $X_0=0$,均方误差初值 $P_0=10$,量测系统误差 $a_k=4$ 为未知量.

从图 1 中可以看到,UIF 得到的状态估计比 UKF 更接近真实状态,即 UIF 能够消除量测数据中未知系统误差对滤波的影响.图 2 给出两种滤波结果与真值的误差比较,可以进一步看到,UIF 与真值的误差比 UKF 的误差波动要小很多,它们的均方误差分别为 2.4807 和 15.5716.这表明 UIF 能有效地消除未知系统误差的影响,提高滤波的精度.

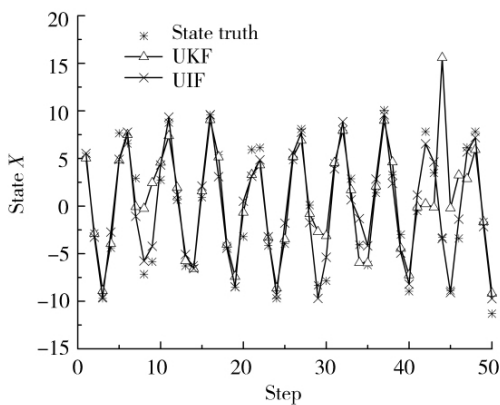


图 1 UKF 和 UIF 的状态估计比较

Fig. 1 Comparison of state estimation of UKF and UIF

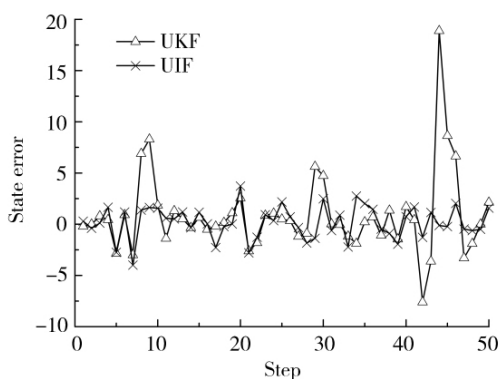


图 2 UKF 和 UIF 的状态误差比较

Fig. 2 Comparison of state error of UKF and UIF

5 结 论

1) 由于系统模型的不确定性,即环境因素的影响、测量设备的不稳定性、模型和参数的选取不当等原因,常常造成量测数据含有系统误差.本文提出的无迹增量滤波方法能成功消除这类系统误差.

2) 对于一般非线性增量系统,采用状态扩维和无迹变换,提出了扩维的无迹增量滤波方法.

3) 针对工程实际中具有加性噪声的非线性增量系统,采用无迹变换和 Sigma 点重采样,提出了具有加性噪声的无迹增量滤波方法,简化了计算量,提高了滤波效率.

4) 本文方法计算简单,便于工程应用.它既不需要增加新的外测系统和设备,也不需要增加太多的计算工作量,即可有效地提高非线性滤波的精度.

参考文献:

- [1] 付梦印,邓志红,闫莉萍. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2010.
- [2] Sunahara Y. An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems[J]. Journal Basic Engineering,1970,9(2):385-393.
- [3] Fujimoto O, Okita Y, Ozaki S. Nonlinearity compensation extended Kalman filter and its application to target motion[J]. Oki Technical Review,1997,63(159):1-12.
- [4] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear system[C]// Proceeding of the American Control Conference, Seattle, WA, USA: IEEE,1995:1628-1632.
- [5] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of Kalman filter to nonlinear systems[C]// The Proc. of AeroSense: The 11th Int. Symposium Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, Orlando, FL, SPIE,1997:182-193.
- [6] Julier S, Uhlmann J K. A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions [R]. Oxford, UK; Robotics Research Group, Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford, Tech. Rep. ,1996.
- [7] Julier S J. The scaled unscented transformation[C]// Proc. of American Control Conf. Jefferson City, MO, USA:IEEE,2002:4555-4559.
- [8] Van der Merwe R. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[D]. Beaverton, Oregon, USA; OGI School of Science & Engineering, 2004.
- [9] Gordon N, Salmond D. Novel approach to nonlinear and non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. Proceedings

- of Institute Electric Engineering, 1993, 140(2):107-113.
- [10] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山. 欠观测条件下的增量 Kalman 滤波方法[J]. 机械强度, 2012, 34(1):43-47.
FU Huimin, WU Yunzhang, LOU Taishan. Incremental Kalman filter method under poor observation condition [J]. Journal of Mechanical Strength, 2012, 34(1):43-47. (in Chinese)
- [11] 傅惠民, 娄泰山, 吴云章. 欠观测条件下的扩展增量 Kalman 滤波方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(4):777-781.
FU Huimin, LOU Taishan, WU Yunzhang. Extended incremental Kalman filter method under poor observation condition[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(4):777-781. (in Chinese)
- [12] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山. 自适应增量 Kalman 滤波方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(6):1225-1229.
FU Huimin, WU Yunzhang, LOU Taishan. Adaptive incremental Kalman filter method[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(6):1225-1229. (in Chinese).
- [13] Wan E A, Van der Merwe R. The unscented Kalman filter [M]// Haykin S. Kalman filtering and neural networks. New York: John Wiley & Sons, 2001:221-280.
- [14] Carlin B P, Polson N G, Stoffer D S. A Monte Carlo approach to nonnormal and nonlinear state-space modeling [J]. Journal of the American Statistical Association, 1992, 87(418):493-500.