

文章编号:1000-8055(2013)05-1057-09

间断 Galerkin 方法计算叶型转捩流动

宋 寅, 奉 凡, 顾春伟

(清华大学 热能工程系 热科学与动力工程教育部重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 使用间断 Galerkin 方法研究叶型转捩流动, 进行了大涡模拟 (LES) 和转捩模型的求解, 对 T106 低压透平和 Zierke-Deutsch 压气机叶栅内的流动进行了计算. 通过 T106 低压透平的计算对 LES 和转捩模型进行了比较, 结果表明两种方法得到的压力分布和分离泡位置均与实验值吻合良好. LES 得到的分离泡的轴向位置为 0.145~0.165 m, 转捩模型得到的分离泡的轴向位置为 0.150~0.156 m. LES 可以再现复杂的瞬时流动细节, 对于深入研究流动机理很有意义, 而转捩模型尽管无法获得足够的流动细节, 但是也能预测边界的分离和转捩现象, 并且结果与 LES 时均结果相差不大, 对于工程应用很有价值. 使用转捩模型计算 Zierke-Deutsch 压气机叶栅内的流动也获得了与实验值符合的结果.

关 键 词: 叶型; 转捩; 间断 Galerkin 方法; 大涡模拟; 转捩模型

中图分类号: V21; O357.1

文献标志码: A

Transitional flow on turbomachine blade using discontinuous Galerkin method

SONG Yin, FENG Fan, GU Chun-wei

(Key Laboratory for Thermal Science and Power Engineering of Ministry of Education,
Department of Thermal Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Large eddy simulation (LES) and a correlation-based transition model were applied with discontinuous Galerkin method (DGM) to investigate transitional flow on turbomachine blade. The methodology was used to simulate the flowfield within T106 turbine cascade and Zierke-Deutsch compressor cascade. Comparison was made between the results of transition model and LES for T106 cascade. The pressure distribution and the locations of separation bubbles calculated by the transition model and LES both agreed well with experimental results. The axial locations of separation bubbles predicted by LES and the transition model are 0.145~0.165 m and 0.150~0.168 m, respectively. The complex flow details, including the vortex structures in the separation bubble and the dynamic process of laminar separation, vortex shedding and wake diffusion, were simulated by LES, which can help to understand the transition mechanism. As for the transition model, although less flow details were captured, the calculated pressure distribution and the location of separation bubble agreed well with experimental data and LES results. The advantage of the transition model lies in the low computational costs, and it is more suitable for engineering applications. The accuracy of the transition model was further validated by the calculation of Zierke-Deutsch

收稿日期:2012-06-04

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130508.0949.201305.1057_013.html

基金项目: 国家自然科学基金重点基金(51136003); 高等学校博士学科点专项科研基金(20090002110052);
北京市自然科学基金(3112015)

作者简介: 宋寅(1987—), 男, 江苏靖江人, 博士生, 主要从事叶轮机械气动热力学研究.

compressor cascade.

Key words: blade; transition; discontinuous Galerkin method; large eddy simulation; transition model

边界层转捩对于压气机或是透平的性能都有重要影响. 对于低压透平, 吸力面尾缘的分离会导致转捩, 促使分离后的再附; 而对于压气机叶片, 前缘的分离和转捩会影响下游边界层的发展, 进而对叶型损失产生明显影响^[1]. 因此, 边界层转捩的准确计算对于叶轮机械内部流动机理的研究和压气机透平的叶型设计都具有重要意义.

随着计算流体动力学 (computational fluid dynamics, CFD) 和计算机的发展, CFD 技术已经在转捩流动的计算中得到了不少应用. 除了传统的稳定性分析方法, 目前对于转捩流动的 CFD 计算方法可以分为直接数值模拟 (direct numerical simulation, DNS)、大涡模拟 (large eddy simulation, LES) 和雷诺时均框架下的转捩模型 3 类方法.

在计算叶片边界层转捩时除了要研究合适的转捩模拟方法, 在数值方法上还需要考虑以下问题, 一是在边界层内要有足够的计算精度, 二是要具有处理低速流动的能力. 与常用的有限体积方法相比, 间断 Galerkin 方法 (discontinuous Galerkin method, DG 方法) 在处理上述问题时更有优势. DG 方法在精度上的优势, 一是体现在易于达到高阶精度, 二是体现在同等精度阶数时, DG 方法所达到的实际精度要优于有限体积方法^[2]. 另外, DG 方法在求解低速流动时与有限体积方法相比有更好的稳定性和精度^[3].

DG 方法由于结合了有限体积方法和有限元方法的优点, 在易于构造高阶精度的同时具有处理间断、捕获激波的能力, 被认为是 CFD 技术中最具前景的算法之一. DG 方法自 1973 年提出以来^[4], 经过几十年的发展, 已经被推广到了 Navier-Stokes (N-S) 方程的求解. Bassi 等^[5-6]通过引入混合有限元的思想, 将 DG 方法推广到 N-S 方程的求解和采用 $k-\omega$ 模型的 RANS (Reynolds averaged Navier-stokes) 方程的求解. 也有一些研究者使用 DG 方法进行了 LES 的研究, 主要集中于二维 LES 的计算^[7-9], 另外, Uranga 等^[10]使用隐式 LES 对低雷诺数下的绕翼型流动进行了三维计算.

近年来国内也对 DG 方法在无黏、层流和湍

流流动中的应用进行了大量研究^[11-15]. 本文将 DG 方法推广到转捩流动的求解中, 在转捩计算方法上选择了 LES 和基于 shear stress transport (SST) 湍流模型的 $\gamma-Re_\theta$ 转捩模型, 并对两者进行了比较. 对 T106 低压透平和 Zierke-Deutsch 压气机叶栅两个验证算例进行了计算, 计算结果与实验数据吻合良好.

1 控制方程

1.1 转捩模型控制方程

$\gamma-Re_\theta$ 转捩模型^[16]是 RANS 框架下的转捩模拟方法, 使用 SST 湍流模型^[17]计算湍流, 通过引入间歇因子的输运方程来模拟转捩过程, 间歇因子的输运方程如下:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \gamma)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] + P_\gamma - E_\gamma \quad (1)$$

式中生成项 P_γ 和耗散项 E_γ 的定义为

$$P_\gamma = F_{\text{length}} c_{a1} \rho S [\gamma F_{\text{onset}}]^{0.5} (1 - c_{e1} \gamma) \quad (2)$$

$$E_\gamma = c_{a2} \rho \Omega \gamma F_{\text{turb}} (c_{e2} \gamma - 1) \quad (3)$$

其中 F_{onset} 和 F_{length} 用于控制转捩起始位置和转捩区长度, 是涡量雷诺数和转捩起始雷诺数的函数, 而 F_{turb} 用于在边界层外或黏性底层中关闭耗散项.

转捩起始雷诺数通过经验关联式根据主流流动参数 (湍流度、压力梯度因子等) 得到, 为了实现转捩起始雷诺数的本地化以适应大规模并行计算 CFD 程序的要求, 引入转捩起始雷诺数的输运方程

$$\frac{\partial(\rho \overline{Re_{\theta t}})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \overline{Re_{\theta t}})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{\theta t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \overline{Re_{\theta t}}}{\partial x_j} \right] + P_{\theta t} \quad (4)$$

其中

$$P_{\theta t} = c_{\theta t} \frac{\rho}{t} (Re_{\theta t} - \overline{Re_{\theta t}}) (1.0 - F_{\theta t}) \quad (5)$$

式中 $Re_{\theta t}$ 为根据当地流动参数计算出的当地转捩起始雷诺数, $F_{\theta t}$ 为开关函数, 用于在边界层内关闭源项. 为了解决上述模型在计算分离流转捩时再附位置偏后的问题, 对间歇因子作如下修正:

$$\gamma_{\text{eff}} = \max(\gamma, \gamma_{\text{sep}}) \quad (6)$$

其中

$$\gamma_{\text{sep}} = \min \left\{ s_1 \max \left[0, \left(\frac{Re_v}{3.235 Re_{\theta c}} \right) - 1 \right] F_{\text{reattach}}, 2 \right\} F_{\theta t} \quad (7)$$

$$F_{\text{reattach}} = e^{-\left(\frac{R_t}{20}\right)^4} \quad (8)$$

$$s_1 = 2 \quad (9)$$

另外, 还需要对 SST 模型的耗散项和开关函数进行修改

$$\tilde{P}_k = \gamma_{\text{eff}} P_k \quad (10)$$

$$\tilde{D}_k = \min[\max(\gamma_{\text{eff}}, 0.1), 1.0] D_k \quad (11)$$

$$F_1 = \max(F_{\text{lorig}}, F_3) \quad (12)$$

$$R_y = \frac{\rho y \sqrt{k}}{\mu} \quad (13)$$

$$F_3 = e^{-\left(\frac{R_y}{120}\right)^8} \quad (14)$$

需要说明的是, 在 γRe_θ 转捩模型中, 并不是直接使用间歇因子来修正湍流黏度, 而是使用间歇因子来修正湍动能方程的生成项。

1.2 LES 控制方程

本文采用隐式模型进行 LES 的计算, 即 MI-LES(monotonically integrated large eddy simulation)方法^[18], 认为亚格子黏性的作用可以用格式黏性来代替, 因此控制方程形式与 N-S 方程一致, 不需要引入新的输运方程。

2 数值方法

2.1 DG 方法

经过坐标转换, 计算坐标系 (ξ, η, ζ) 下的控制方程可以写为

$$\frac{\partial JQ}{\partial t} + \nabla \cdot (f - f^v) - JS = 0 \quad (15)$$

式中 Q 为守恒变量, f 和 f^v 分别为无黏和黏性通量, S 为源项。

对于转捩模型, 守恒变量为

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e, \rho k, \rho \omega, \rho \gamma, \rho \overline{Re_{\theta t}}]^T \quad (16)$$

对于 LES, 守恒变量为

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e]^T \quad (17)$$

将式(15)乘以测试函数 ϕ , 并在求解域 Ω 上积分可以得到其变分形式

$$\int_{\Omega} \frac{\partial JQ}{\partial t} \phi dV + \int_{\Omega} \phi \nabla \cdot (f - f^v) dV - \int_{\Omega} JS \phi dV = 0 \quad \forall \phi \quad (18)$$

设方程的数值解 Q_h 在网格单元内为不超过 p 次的多项式分布, 则网格单元内的数值解可以

表示为一组基函数的线性组合, 即:

$$Q_h^{i,j,k}(t, \xi, \eta, \zeta) = \sum_{s=0}^{l-1} Q_s^{i,j,k}(t) \varphi_s^{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) \quad (19)$$

其中 l 为基函数的个数, 本文取 $p = 1$ 以实现 2 阶精度, 并取如下一组基函数:

$$\begin{aligned} \varphi_0^{i,j,k} &= 1 \\ \varphi_1^{i,j,k} &= \xi - i \\ \varphi_2^{i,j,k} &= \eta - j \\ \varphi_3^{i,j,k} &= \zeta - k \end{aligned} \quad (20)$$

用数值解代替方程的精确解, 并将测试函数 ϕ 取为与基函数相同的形式, 进行分部积分后可得到 DG 方法的半离散格式

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{l-1} \frac{dQ_s}{dt} \int_E J \varphi_s \varphi_m dV + \oint_{\partial E} \varphi_m f \cdot n dS - \\ & \oint_{\partial E} \varphi_m f^v \cdot n dS - \\ & \int_E (f - f^v) \cdot \nabla \varphi_m dV - \int_E JS \varphi_m dV = 0 \\ & m = 0, 1, \dots, l-1 \end{aligned} \quad (21)$$

对于上式中的面积分, 采用有限体积方法中的数值通量来计算界面上的通量。采用 3 步 Runge-Kutta 时间推进方法求解上述方程组来得到下一时刻的守恒变量的自由度。

2.2 全速度 Roe 格式

DG 方法通过求解 Riemann 问题来获得界面积分点上的数值通量, 本文在计算压气机和透平叶栅中的低速流动时使用了全速度 Roe 格式^[19], 以避免标准 Roe 格式在计算低速流动时收敛性和精度下降的问题。全速度 Roe 格式的数值通量如下:

$$\begin{aligned} h^{a-\text{roe}}(Q^-, Q^+) &= \bar{F}_c + \bar{F}_d \quad (22) \\ \bar{F}_c & \text{为考虑了动量平均的中心项} \\ \bar{F}_c &= f(Ma) \frac{\bar{F}(Q^-) + \bar{F}(Q^+)}{2} + \\ & [1 - f(Ma)] J \sqrt{g_{ii}} \left(\frac{Q^- + Q^+}{2} U_c + \frac{P^- + P^+}{2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$U_c = \frac{U^- + U^+}{2} - \frac{c_2(p^+ - p^-)}{\rho_0 u_0} \quad (24)$$

$$P = p[0, n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}, 0]^T \quad (25)$$

$$g_{ii} = \xi_{i,j} \xi_{i,j} \quad (26)$$

$\bar{F}_d$ 为耗散项

$$\bar{F}_d = -\frac{1}{2} R_{i+1/2} | \Lambda_{i+1/2}^{a-\text{roe}} | L_{i+1/2} (Q^+ - Q^-) \quad (27)$$

$L_{i+1/2}$ 和 $R_{i+1/2}$ 分别为左、右特征值矩阵, Λ 是由以下伪特征值组成的对角矩阵:

$$\lambda_{1,2,3}^{\text{ Roe}} = JU_i$$

$$\lambda_{4,5}^{\text{ Roe}} = JU_i \pm f(Ma) cJ \sqrt{g_{ii}} \quad (28)$$

$f(Ma)$ 是当地马赫数的函数,用于实现标准 Roe 格式和低速 Roe 格式之间的光滑过渡

$$f(Ma) = \min \left[Ma \frac{\sqrt{4 + (1 - Ma^2)^2}}{1 + Ma^2}, 1 \right] \quad (29)$$

3 计算结果

3.1 T106 低压透平叶栅

T106 叶栅是典型的高负荷低压透平叶型,图 1 给出了 T106 叶型示意图及其几何参数。

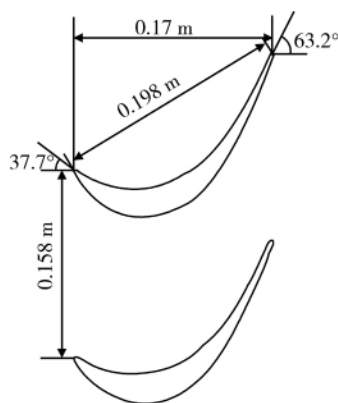


图 1 T106 叶型示意图及其几何参数

Fig. 1 Schematic diagram and geometric parameters of T106 cascade

对不同进口马赫数下的无黏流场进行了计算以说明 DG 方法在计算低速流动时的性质。图 2 给出了文献[20]使用有限体积法和标准 Roe 格式计算得到的压力等值线,可以看到当马赫数为 0.01 时压力等值线出现扭曲,马赫数继续降低至 0.001 时得到的流场已经不具有物理意义。图 3 给出了采用 DG 方法和标准 Roe 格式计算得到的压力等值线,可以看到,进口马赫数在 0.01 时计算结果仍然是合理的,当马赫数下降到 0.001 时,流道前部的压力线出现扭曲。而采用 DG 方法和全速度 Roe 格式后,在进口马赫数为 0.001~0.1 内均能得到合理的流场,如图 4。由此可见, DG 方法在求解低速流动时与有限体积法相比具有更好的稳定性及精度,但是在马赫数极低的条件下依然有其局限性,在 DG 方法求解低速流动时使用全速度 Roe 格式仍然是有必要的。

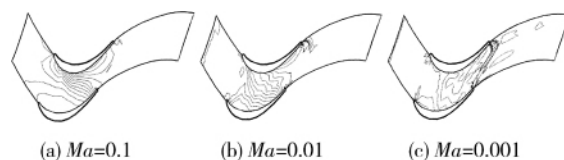


图 2 有限体积法(标准 Roe 格式)得到的压力等值线^[20]

Fig. 2 Contours of pressure (finite volume method with Roe scheme)^[20]

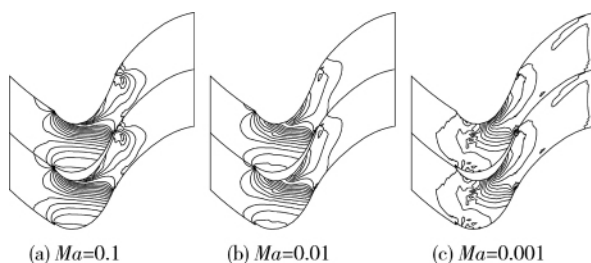


图 3 DG 方法(标准 Roe 格式)得到的压力等值线

Fig. 3 Contours of pressure (DG method with Roe scheme)

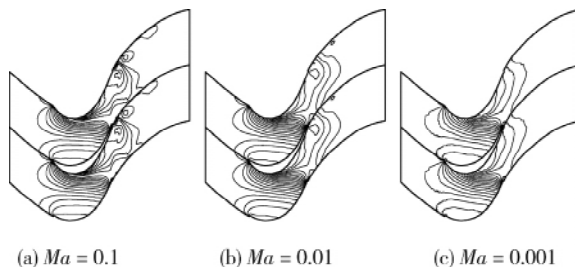


图 4 DG 方法(全速度 Roe 格式)得到的压力等值线

Fig. 4 Contours of pressure (DG method with all-speed-Roe scheme)

为了计算吸力面尾缘边界层的转捩现象,使用 DG 方法进行了 LES 和转捩模型的求解。计算时叶片进口马赫数为 0.13,气流角为 37.7°。使用转捩模型计算时二维网格数为 16 000,进行 LES 计算时对网格进行了加密,流面网格数为 87 000,如图 5 所示。

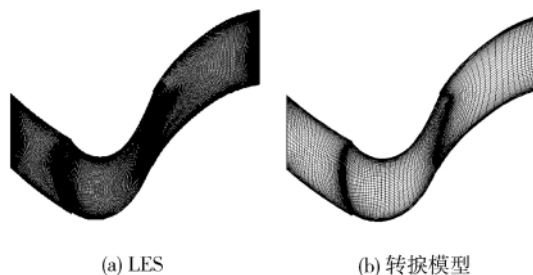


图 5 计算网格

Fig. 5 Computational grid

将转捩模型的计算结果、LES 时均结果与实验结果^[21]以及 Raverdy 的 LES 结果^[22]进行了比较. 图 6 给出了叶片表面的压力分布, LES 和转捩模型的计算结果都与实验值吻合, 并且捕获到了 0.9 倍弦长位置附近的压力平台区. 图 7 给出了尾缘附近的流线, 可以看到两种方法都得到了

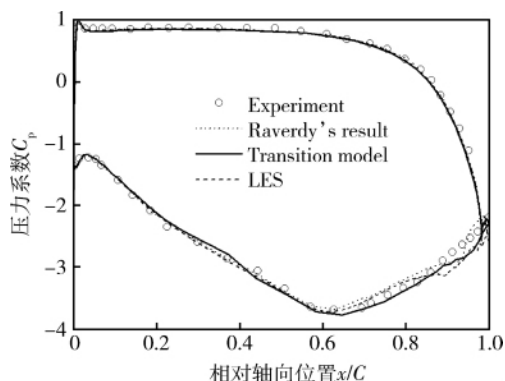
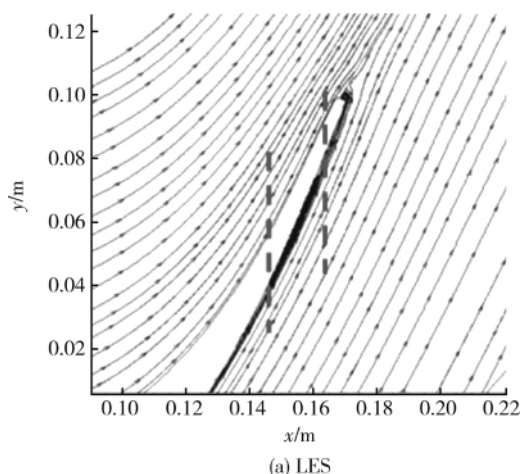
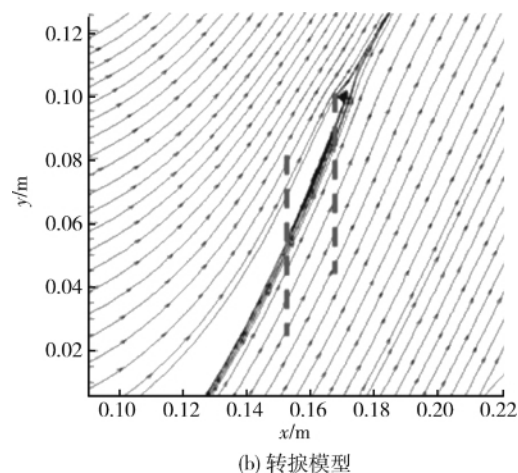


图 6 叶片表面压力分布

Fig. 6 Pressure distribution around blade surface



(a) LES



(b) 转捩模型

图 7 尾缘附近流线

Fig. 7 Streamlines around trailing edge

尾缘的层流分离以及湍流再附现象, 并且两种方法得到的分离泡位置和长度接近. LES 得到的分离泡的轴向位置为 0.145~0.165 m, 转捩模型得到的分离泡的轴向位置为 0.150~0.168 m. 下面分别对 LES 和转捩模型的计算结果进行详细分析. 首先对 LES 瞬时流场进行分析. 图 8 给出了出口质量流量的频率能谱, 图中峰值频率对应了不同的流动机理, 其中 2500 Hz 的频率对应尾缘涡脱落, 与实验测得的频率一致^[21], 2000 Hz 的频率对应分离泡的低频拍动^[22], 1000 Hz 的频率则对应尾缘脱落涡和分离泡的相互作用. 图 9 为叶片表面的瞬时压力系数分布, 可以看到吸力面层流分离泡中存在较大的压力波动, 分离泡处于不稳定状态. 图 10 和图 11 给出了流场的瞬时熵分布, 可以看到分离泡运动和脱落的过程, 同时也捕获到了尾缘涡的生成、脱落过程. 图 12 给出了尾缘附近的瞬时流线, 可以看到一系列的小分离区构成了层流分离泡. 分离泡从 $x=0.145$ m 处形成, 向下游运动并逐渐变大, 运动到尾缘后发生脱落, 分离泡脱落后进一步和尾缘脱落涡发生相互干扰.

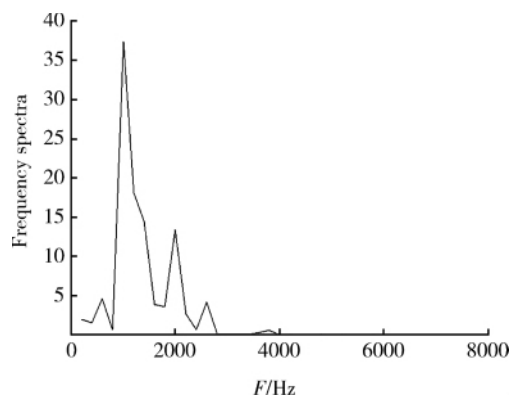


图 8 出口质量流量的频率能谱

Fig. 8 Frequency spectra of outlet mass flow rate

图 13 和图 14 给出了使用转捩模型计算得到的马赫数云图和湍流黏度云图. 图 15 给出了叶片尾缘附近流线和湍流黏度分布, 可以看到层流边界层分离后出现湍流黏性的增大, 表征了转捩的发生.

比较上述两种方法得到的计算结果可以看到, LES 可以再现复杂的瞬时流动细节, 如吸力面层流分离泡的生成、发展以及与尾缘涡脱落的物理过程, 对于深入研究流动机理很有意义. 同时, 使用转捩模型尽管无法获得足够的流动细节, 但是也能预测边界层的分离和转捩现象, 并且结果与 LES 时均结果相差不大. 考虑到转捩模型与

LES 相比在计算量上的巨大优势,使用转捩模型进行边界层转捩的计算对于工程应用是很有价值的.

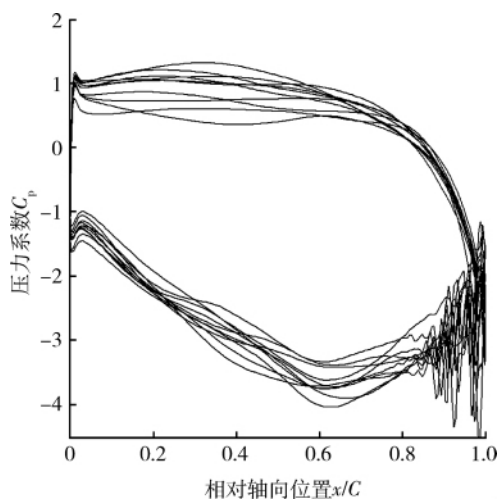


图 9 瞬时压力系数分布

Fig. 9 Instantaneous distribution of pressure coefficient

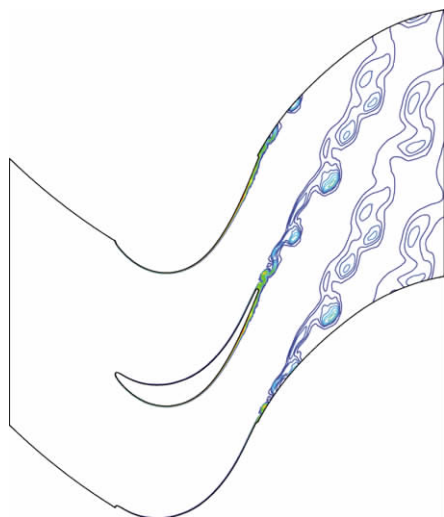


图 10 瞬时熵分布

Fig. 10 Instantaneous distribution of entropy

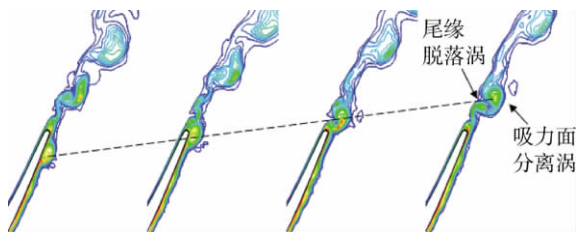


图 11 尾缘附近的瞬时熵分布

Fig. 11 Instantaneous distribution of entropy around trailing edge

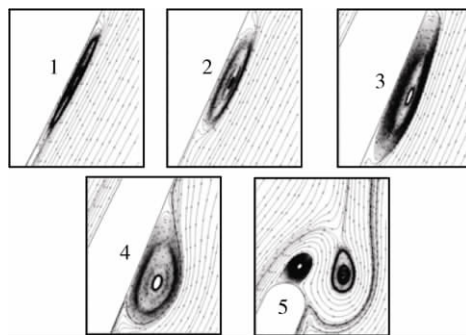
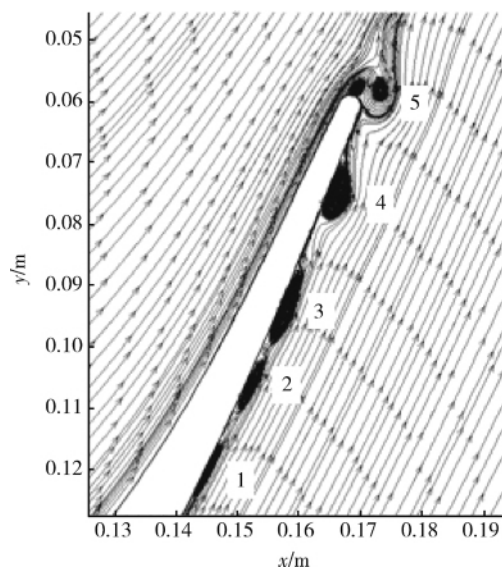


图 12 尾缘附近的瞬时流线

Fig. 12 Instantaneous streamlines around trailing edge

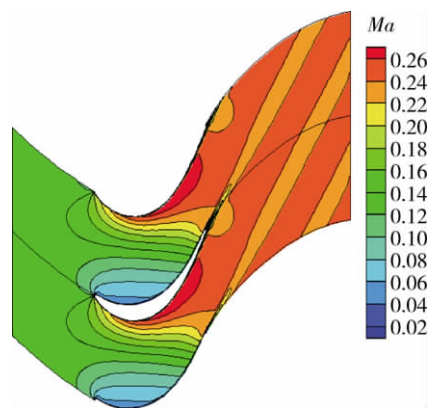


图 13 转捩模型计算得到的马赫数云图

Fig. 13 Contour of Mach number calculated by transition model

3.2 Zierke-Deutsch 压气机叶栅

Zierke-Deutsch 压气机叶栅^[23]为高负荷双圆弧叶型,该叶栅实验在低湍流度风洞中进行,来流湍流度为 0.18%,雷诺数为 5.01×10^5 ,在叶片吸

力面前缘发生分离,并在转捩后再附,这种前缘分离泡对边界层的发展有着重要的影响,会影响吸力面尾缘分离的位置,因此对前缘分离泡的预测决定了叶型损失的计算精度,非常重要。

使用 $\gamma-Re_\theta$ 转捩模型对该压气机叶栅进行计算。如图 16, 网格数为 61×165 , 进口总压为 1.016×10^5 Pa, 进口总温为 292.89 K, 攻角为 -1.5° , 背压为 1.013×10^5 Pa。

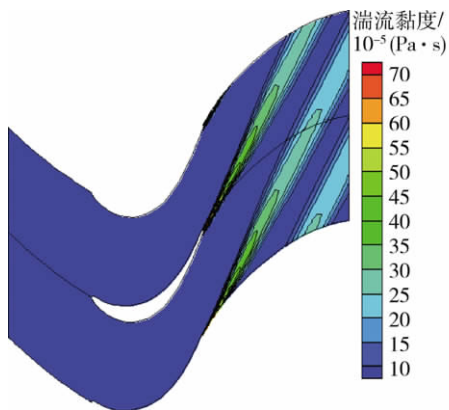


图 14 转捩模型计算得到的湍流黏度云图

Fig. 14 Contour of eddy viscosity calculated by transition model

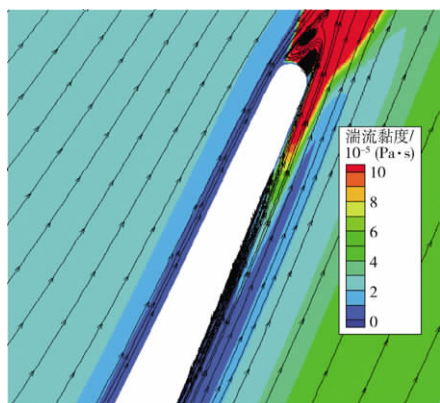


图 15 尾缘附近流线和湍流黏度分布

Fig. 15 Streamlines and eddy viscosity distribution around trailing edge

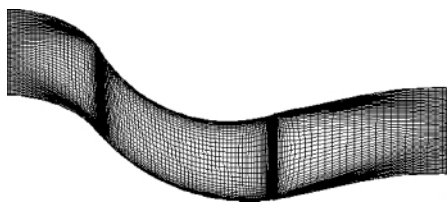


图 16 Zierke-Deutsch 压气机叶栅计算网格

Fig. 16 Computational grids of Zierke-Deutsch compressor cascade

图 17 为计算得到的叶栅表面压力系数分布,与文献[23]的实验结果相比大致符合,在尾缘稍有差别,但是与 Langtry 等人使用转捩模型的计算结果[24]基本一致。图 18 和图 19 给出了马赫数云图和湍流黏度云图。

图 20 给出了尾缘附近的流线和湍流黏度分布,由于实验工况下该叶栅进口马赫数为 0.1,属于低速流动,在计算时采用了全速度 Roe 格式,标准 Roe 格式的计算结果也一并列出以作比较。可以看到,使用全速度 Roe 格式可以捕获到前缘的分离和转捩现象,而标准 Roe 格式则无法捕捉到前缘的分离。

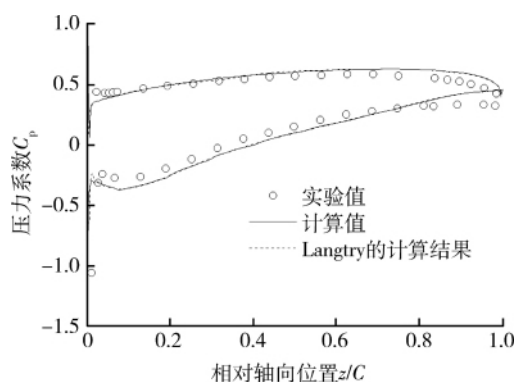


图 17 Zierke-Deutsch 压气机叶栅表面压力系数分布

Fig. 17 Pressure coefficient distribution around Zierke-Deutsch compressor cascade surface

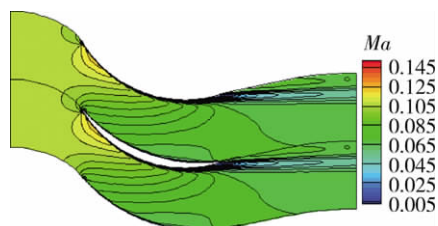


图 18 马赫数云图

Fig. 18 Contour of Mach number

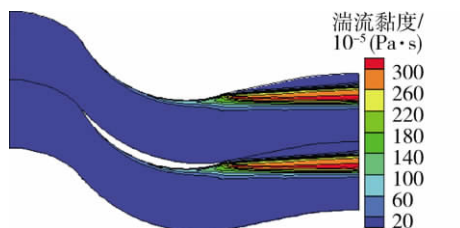


图 19 湍流黏度云图

Fig. 19 Contour of eddy viscosity

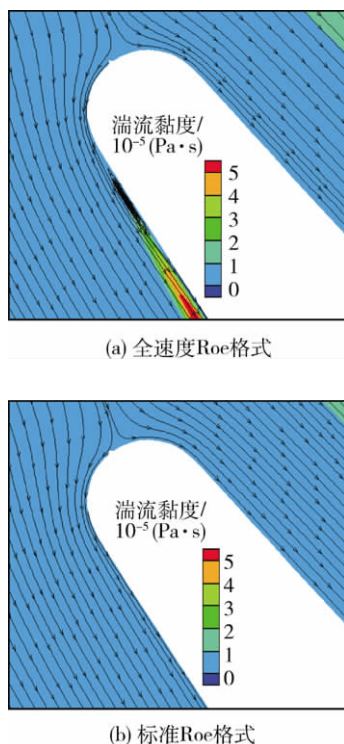


图20 尾缘附近流线和湍流黏度分布

Fig. 20 Streamlines and eddy viscosity distribution around trailing edge

4 结 论

本文将 DG 方法推广到转捩流动的求解中,在转捩计算方法上选择了 LES 和 $\gamma-Re_\theta$ 转捩模型,对 T106 低压透平和 Zierke-Deutsch 压气机叶栅两个验证算例进行了计算。

通过 T106 低压透平的计算对 LES 和 $\gamma-Re_\theta$ 转捩模型进行了比较,结果表明两种方法得到的压力分布和分离泡位置均与实验值吻合良好。LES 可以再现复杂的瞬时流动细节,如层流分离泡的生成、发展以及与尾缘涡脱落的物理过程,对于深入研究流动机理很有意义,而转捩模型尽管无法获得足够的流动细节,但是也能预测边界层的分离和转捩现象,并且结果与 LES 时均结果相差不大,对于工程应用很有价值。

使用转捩模型计算 Zierke-Deutsch 压气机叶栅内的流动也获得了与实验值符合的结果,并且捕捉到了吸力面前缘的分离、转捩、再附等流动现象。通过对全速度 Roe 格式与标准 Roe 格式的计算结果进行比较,发现尽管 DG 方法在计算低马赫数流动时与有限体积法相比具有一定的优势,但是为保证计算的精度,使用全速度 Roe 格式或其他预处理格式仍然是有必要的。

参考文献:

- [1] Tain L, Cumpsty N A. Compressor blade leading edges in subsonic compressible flow[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2000, 214(1): 221-242.
- [2] Luo H, Baum J D, Lohner R. A discontinuous Galerkin method based on a Taylor basis for the compressible flows on arbitrary grids[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(20): 8875-8893.
- [3] Feistauer M, Kucera V. On a robust discontinuous Galerkin technique for the solution of compressible flow[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 224(1): 208-221.
- [4] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory, LA-UR-73-479, 1973.
- [5] Bassi F, Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131(2): 267-279.
- [6] Bassi F, Crivellini A, Rebay S, et al. Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and $k-\omega$ turbulence model equations[J]. Computers & Fluids, 2005, 34(4/5): 507-540.
- [7] Collis S. The DG/VMS method for unified turbulence simulation[R]. AIAA 2002-3124, 2002.
- [8] Ramakrishnan S, Collis S. Multiscale modeling for turbulence simulation in complex geometries[R]. AIAA 2004-241, 2004.
- [9] Zhang X, Stanescu D, Naughton J W. Development of a spectral element DNS/LES method for turbulent flow simulations[R]. San Diego: ASME, FEDSM 2007-37443, 2007.
- [10] Uranga A, Persson P O, Drelal M, et al. Implicit large eddy simulation of transition to turbulence at low Reynolds number using a discontinuous Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 87(1/2/3/4/5): 232-261.
- [11] 苏铭德, 张景明. Runge-Kutta 间断 Galerkin 法在求解 Navier-Stokes 方程中的应用[J]. 计算物理, 1999, 16(2): 167-176.
SU Mingde, ZHANG Jingming. Application of RKDG in solution of N-S equation[J]. Chinese Journal of Computation Physics, 1999, 16(2): 167-176. (in Chinese)
- [12] 卢义, 袁新. 隐式间断有限元方法的参数化边界修正[J]. 工程热物理学报, 2009, 30(7): 1116-1118.
LU Yi, YUAN Xin. Parametric boundary modification for implicit discontinuous Galerkin method[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2009, 30(7): 1116-1118. (in Chinese)
- [13] 郝海兵, 杨永, 李喜乐. p 型多重网格间断 Galerkin 有限元方法研究[J]. 空气动力学学报, 2010, 12(6): 715-719.
HAO Haibing, YANG Yong, LI Xile. The research of p-multigrid solution for high-order discontinuous galerkin finite element method [J]. Acta Aerodynamica Sinica,

- 2010, 12(6): 715-719. (in Chinese)
- [14] 贺立新, 张来平, 张涵信. 任意单元间断 Galerkin 有限元计算方法研究[J]. 空气动力学学报, 2007, 25(2): 157-162.
HE Lixin, ZHANG Laiping, ZHANG Hanxin. Discontinuous Galerkin finite element method on 3D arbitrary elements[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2007, 25(2): 157-162. (in Chinese)
- [15] 于剑, 阎超. Navier-Stokes 方程间断 Galerkin 有限元方法研究[J]. 力学学报, 2010, 42(5): 962-970.
YU Jian, YAN Chao. Study on discontinuous Galerkin method for Navier-Stokes equations[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 42(5): 962-970. (in Chinese)
- [16] Langtry R, Menter F. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes[J]. AIAA Journal, 2009, 47(12): 2894-2906.
- [17] Menter F. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1598-1605.
- [18] Boris J P, Grinstein F F, Oran E S, et al. New insights into large eddy simulation[J]. Fluid Dynamics Research, 1992, 10(4/5/6): 199-228.
- [19] LI Xuesong, GU Chunwei. An all-speed Roe-type scheme and its asymptotic analysis of low Mach number behaviour [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(10): 5144-5159.
- [20] 李雪松. 基于可压缩流方法的大涡模拟及其工程化应用 [D]. 北京: 中国科学院, 2006.
LI Xuesong. Large eddy simulation based on the computational method of compressible flows and its application to engineering [D]. Beijing: Chinese Academy of Sciences, 2006.
- [21] Engber M, Fottner L. The effect of incoming wakes on boundary layer transition of a highly loaded turbine cascade [C]//The Proceeding of AGARD REP 85th Symposium on Loss Mechanisms and Unsteady Flows in Turbomachines. Derby, UK: AGARD, 1996: 21.
- [22] Raverdy B, Mary I, Sagaut P, et al. High-resolution large-eddy simulation of flow around low-pressure turbine blade [J]. AIAA Journal, 2003, 41(3): 390-397.
- [23] Zierke W, Deutsch S. The measurement of boundary layers on a compressor blade in cascade: Volume 1 experimental technique, analysis and results [R]. NASA/CR-185118, 1989.
- [24] Langtry R, Menter F, Likki S R, et al. A correlation-based transition model using local variables: Part II test cases and industrial applications [R]. ASME Paper GT2004-53454, 2004.