

文章编号:1000-8055(2012)11-2499-06

一种适用于热流计算的改进 WENO 格式

王 超, 吴颂平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 数值格式是影响高超声速热流数值计算准确度的主要因素之一. 根据高超声速流场的特性合理的控制了数值黏性, 对 WENO(weighted essentially non-oscillatory)格式进行了改进, 使其适用于高超声速热流计算. 研究表明, 改进后的格式在捕捉激波时具有良好的激波分辨率, 在壁面附近尽量减小了数值黏性, 提高了格式的黏性分辨率. 数值试验也表明了这种改进算法的有效性.

关 键 词: 高超声速; 热流; WENO 格式; 数值格式; 数值耗散

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Improved weighted essential non-oscillatory methods in hypersonic heat-flux simulation

WANG Chao, WU Song-ping

(School of Aeronautic Science and Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Numerical scheme is one of the most important factors for hypersonic heat-flux numerical simulation. Weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme was improved to meet the above requirementsutilizing hypersonic flow characteristics to control the numerical dissipation. The improved scheme can effectively distinguish shock and other regions of large gradients with high resolution, and reduce numerical dissipation to improve numerical high-resolution near the wall. Three numerical experiments indicate that the numerical method proposed here is effective.

Key words: hypersonic; heat-flux;

weighted essentially non-oscillatory(WENO) scheme;

numerical scheme; numerical dissipation

高超声速热流的数值计算一直是计算流体力学(CFD)中的一个难点. 这主要是因为在高超声速流动中, 边界层内温度非单调的剧烈变化, 给热流的准确计算带来了很大困难.

在高超声速流动的数值模拟中, 数值格式对计算结果有着很大的影响. 由于在流场中存在着强间断(激波), 算法中无黏通量的处理需要高分辨率格式, 例如 TVD(total variation diminishing)格式^[1-3],

Roe 格式^[4]等. 这类格式能够分辨出流场中的强间断, 计算也比较稳定. 但这些数值方法的精度一般为 2 阶, 数值耗散较大, 特别是在壁面附近, 导致计算的热流值经常偏小.

Harten 和 Osher 等^[5]提出的 ENO(essentially non-oscillatory)格式是采用非固定插值模板的思想, 放宽了数值解总变差不能增长的限制, 从而使格式在理论上可以达到任意高阶精度并基

收稿日期:2011-11-12

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20121115.1028.015.html>

基金项目: 国家自然科学基金(91016006)

作者简介: 王超(1983—), 男, 汉族, 河北沧县人, 博士生, E-mail: wangchaoa564@126.com

本消除了数值震荡. Liu 等^[6]对高精度的 ENO (essentially non-oscillaory) 格式进行改进, 利用模板加权平均的思想提高了方法的计算效率, 构造了 WENO (weighted essentially non-oscillao-ry) 格式. WENO 格式具有较高计算精度, 同时还能够光滑捕捉激波, 具有很好的鲁棒性. 随后 Jiang 等^[7]为 WENO 格式构造了新的光滑度量因子, 进一步提高了计算效率. 目前, WENO 格式已广泛应用在多种流场的数值模拟中. Titarev 和 Toro^[8]实现了三维有限体积的 WENO 格式, 对于非结构网格的三维流场计算, 同等精度的有限体积的 WENO 格式比有限差分计算量要多 8 倍^[9]. William 等^[10]针对超声速和高超声速流场的数值模拟, 考察了结构和非结构网格对 WENO 格式的影响. Rehman 等^[11]利用 WENO 格式研究了高超声速边界层的感受性问题. Lee 等^[12]用高阶 WENO 格式研究了具有真实气体效应的高超声速流的数值计算. SHEN 等^[13]研究了高阶的 WENO 格式计算高超声速激波和边界层干扰现象时的鲁棒性.

1 数值方法

1.1 WENO 格式

考虑标量双曲型守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

将空间离散成 $x_i = i\Delta x$, 其中 Δx 是网格间距, $u_i(t) = u(x_i, t)$, 方程(1)的半离散化格式为

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) \tag{2}$$

其中 $f_{i+1/2}$ 是 $f(u(x_{i+1/2}))$ 的数值通量. 为保持迎风性质, 将通量分裂成 $f^+(u)$ 以及 $f^-(u)$, $f^+(u)$ 是通过重构多个包含 r 个网格点的插值多项式进行计算的, $f^-(u)$ 可利用对称原则求得. WENO 格式具有 $2r-1$ 阶精度, 其中总共有 $r+1$ 个模板. 例如 5 阶 WENO 格式可以把网格基分为 $\{i-2, i-1, i\}, \{i-1, i, i+1\}, \{i, i+1, i+2\}, \{i+1, i+2, i+3\}$ 四个模板, 如图 1 所示.

$f^+(u)$ 数值近似可以表达成如下形式:

$$f_{i+1/2}^+ = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k q_k^r \tag{3}$$

这里 q_k^r 是包含 r 个点的第 k 个模板的重构后的值, ω_k 是第 k 个模板的权重. ω_k 和 q_k^r 分别可以定义为以下的形式:

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}} \tag{4}$$

$$q_k^r = \sum_{l=0}^{r-1} a_{kl}^r f(u_{i-r+k+l+1}) \tag{5}$$

式中 $f(u_{i-r+k+l+1})$ 是算数平均值, a_{kl}^r 是重构插值多项式的因子, 式(4)中的 α_k 可以定义为如下形式:

$$\alpha_k = \frac{C_k^r}{(S_k + \epsilon)^p} \tag{6}$$

其中 ϵ 是一个小量以防止分母为 0, 一般取 $10^{-6} \sim 10^{-8}$. p 是一个整数, 通常取 1 或是 2, 取 1 时耗散更小一些, 取 2 时稳定性更好, 本文计算时取 1; C_k^r 是平滑区域的“理想”光滑因子; S_k 是模板的光滑度量因子, 在光滑区该量很小; 而在间断附近该量相对较大, 保证包含间断的模板权重 ω_k 很小. Jiang 和 Shu 给出了如下形式的光滑度量因子:

$$S_k = \sum_{m=1}^{r-1} \Delta x^{2m-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} q_k^r(x) \right]^2 dx \tag{7}$$

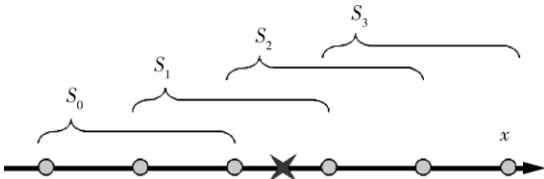


图 1 5 阶 WENO 格式的备选模板
Fig. 1 WENO candidate stencils

1.2 WENO 格式的数值耗散

对于 WENO 格式, 无论在光滑或是间断流场, 若是光滑因子 S_k 大于 ϵ , 则权重的大小主要由 S_k 决定. WENO 格式设计的初衷是希望在光滑流场 S_k 非常小, 而在流场间断附近有一个较大的值, 以此影响权重的取值.

以 5 阶格式为例分析 WENO 格式的数值黏性. 公式(7)中的插值多项式为二次多项式 $q(x) = ax^2 + bx + c$, 利用模板上的函数信息可以确定该多项式. 容易证明插值多项式 $q(x)$ 应该具备如下形式:

$$q(x) = f_i + (x - x_i)f'_i + \frac{1}{2}(x - x_i)f''_i \tag{8}$$

其中 f'_i, f''_i 分别为利用网格节点信息构造出的 i 点的 1 阶, 2 阶导数的差分逼近. 将式(8)带入到式(7)可得

$$S_k = (\Delta x f_i^{(k)})^2 + \frac{13}{12}(\Delta x^2 f_i^{(k)})^2 \tag{9}$$

其中 $f_i^{(k)}, f_i^{(k)}$ 分别为利用模板 k 的节点信息构

造出的 i 点的 1 阶, 2 阶导数的 2 阶精度差分逼近. 式(9)可写成式

$$S_k = D[1 + O(\Delta x^2)] \tag{10}$$

这里 $D = \Delta x^2 [f'(u_i)]^2, k = 0, 1, 2$. 可见在光滑区 3 个模板上的构造出的 S_k 都趋向于同一个 2 阶小量 D , 彼此之间的差距为 4 阶小量. 在模板存在间断的情况下, S_k 是一个有限量, 因而由式(6)可知, 若某个模板中存在间断, 该模板的权重 ω_k 相对于其它模板的权重为 2 阶小量 $O(\Delta x^2)$. 若所有模板的都充分光滑后, 且忽略 ϵ 由公式(4)和式(6)则可以得到

$$\omega_k = C_k^r + O(\Delta x^2) \tag{11}$$

式(11)保证了 WENO 格式具有 5 阶精度. 若考虑了 ϵ , 则公式(11)可以改写成如下形式:

$$S_k = (D + \epsilon)[1 + O(\Delta x^2)] \tag{12}$$

仍然可以得到公式(11), 这表明 ϵ 的取值不会影响 WENO 格式的精度.

如果 S_0, S_1, S_2 相同, 则 ω_k 会等于“理想”权重 C_k^r , 此时的 WENO 格式是严格的 5 阶精度格式, 也就是说若在平滑区域能够使 ω_k 和 C_k^r 相等, 就可以使数值耗散最小; 而当 ω_k 偏离 C_k^r 时, 由公式(11)可知数值耗散增大, 在激波处的间断流场区域应当加大数值耗散避免震荡. 从而可以得出 ϵ 的取值标准: 在光滑流场, ϵ 应该比 S_k 大得多, 从而使 ω_k 接近 C_k^r , 得到最小的数值耗散; 在间断或是流场变化较大的流场区域, ϵ 应该小于 S_k , 增加格式的数值耗散, 保证格式的稳定性.

1.3 数值耗散的控制方法

在热流计算的关键区域, 即壁面附近的边界层内, 若数值耗散太大, 则会影响热流的计算结果, 使得热流值偏小, 所以在此区域需要尽量减小数值黏性; 与此相反为了正确的捕捉激波, 需要在激波附近添加较大的数值黏性, 因此控制边界层内数值耗散以及对高超声速激波的捕捉是正确计算热流的关键.

引进总变差的概念, 首先计算每个模板上的变量总变差

$$V^k = |u_{i-3+k} - u_{i-2+k}| + |u_{i-2+k} - u_{i-1+k}| \tag{13}$$

其中 $k=0, 1, 2$. 数值计算中变量 3 个模板变量总变差最大的值 $V_{\max}$ 作为光滑判据, 若 $V_{\max}$ 小于给定的限定值, 则认为是光滑流场区域. 根据上一节中 ϵ 的取值标准以及本节光滑判断依据可以给出 ϵ 的取值方法

$$\epsilon = \begin{cases} 10^2 S_k & V_{\max} \leq \epsilon_0 \\ 10^{-6} \sim 10^{-8} & V_{\max} > \epsilon_0 \end{cases} \tag{14}$$

在实际计算中, 当 $V_{\max} \leq \epsilon_0$ 时, 即在光滑流场区 ϵ 取 $10^2 S_k$, 能够保证 ϵ 比 S_k 大得多, 此时格式的数值黏性最小, 但 ϵ 并没有改变格式的精度, 格式仍然是耗散的, 可以保持较好的鲁棒性; 当 $V_{\max} > \epsilon_0$ 时, 即在流场中断位置 ϵ 取 $10^{-6} \sim 10^{-8}$, 即格式还原为原始形式, 保证格式在分辨激波时有足够的数值黏性, 此时格式的鲁棒性和原格式相同.

2 结果和讨论

在高超声速流场中, 激波位置的压强梯度很大, 而在流场的其它的绝大部分包括壁面附近的压强梯度较小, 利用高超声速流场的这一特性可以对数值格式黏性进行控制. 在实际算例中总变差变量使用的压强, 本文给定的限定值是 0.1 (在计算 $V_{\max}$ 时, 压强 p 已无量纲化).

本文进行了 3 个算例的数值实验用于验证本文提出改进 WENO 格式的有效性, 将上述格式推广应用于三维可压缩层流 N-S 方程组. 数值求解中, 时间推进采用隐式的 LU-SGS(lower-upper symmefficient Gauss-Seide)算法; 黏性项用中心差分格式进行离散. 边界条件包括: 壁面采用等温壁和无滑移边界条件, 压力由法向压力零梯度条件确定; 出口边界采取零阶外插.

1) 为考察改进格式对网格的依赖性, 本文首先进行了球头热流的计算. 球头半径为 27.94 mm, 球头网格采用代数方法生成, 由于本文不考虑侧滑角影响, 所以仅生成了半个球头网格. 计算网格数为 $25 \times 80 \times 25$ (流向 $\times$ 法向 $\times$ 周向) 如图 2 所示, 通过改变法向网格分布, 得到了法向网格雷诺数为 40, 20, 10, 5 四套疏密程度不同的网格. 法向网格雷诺数的定义为

$$Re_n = Re \times \Delta n \tag{14}$$

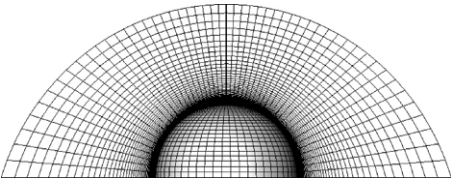


图 2 球头网格

Fig. 2 Grid of sphere

表 1 为 3 种格式 4 个网格雷诺数计算的驻点

热流系数. 文献[14]给出的热流值约为 0.009, 由表可以看出, TVD 格式计算的热流系数随着网格雷诺数的不同变化较大, 其中网格雷诺数 5 的网格计算热流系数值比网格雷诺数 40 网格计算的热流系数值增大了 156.7%, Jiang-WENO 格式的计算结果中增大了 90.3%, 而本文的 Im-WENO 格式计算结果中增加了 25.3%, 这说明本文构造的 WENO 格式可以提高格式的黏性分辨率, 减少计算结果对网格的依赖, 改善热流计算精度.

表 1 不同格式不同网格雷诺数的球头驻点热流系数
Table 1 Stagnation heating-rates of grid Reynolds numbers and different schemes of sphere

	$Re_n=5$	$Re_n=10$	$Re_n=20$	$Re_n=40$
TVD	0.0172	0.0106	0.0072	0.0067
Jiang-WENO	0.0137	0.0115	0.0088	0.0072
Im-WENO	0.0109	0.0098	0.0091	0.0087

2) 作为算例, 本文还计算了绕钝锥的高超声速流动. 计算外形由半径为 27.94 mm 的球头和半锥角为 15°的锥组成. 来流条件参照 Cleary^[14]的实验: 来流马赫数 $Ma=10.6$, 来流气体的单位雷诺数 $Re=3.937\times10^6$, 来流温度 $T=47.3\text{ K}$, 壁面温度 $T_{\text{wall}}=294.44\text{ K}$, 攻角为 0°. 计算网格使用的是结构多块对接网格, 如图 3 所示.

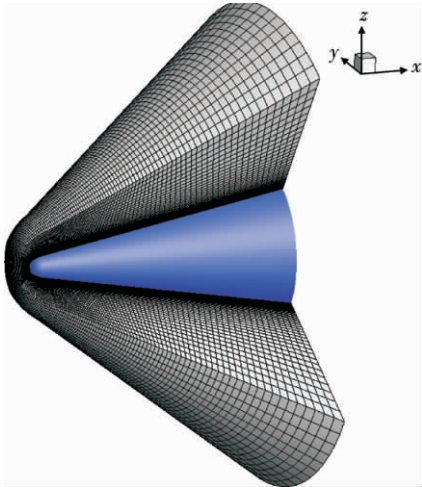


图 3 单锥计算网格
Fig. 3 Grid of single cone

图 4 为对称面流场等马赫线. 本文使用了 3 种不同数值耗散的格式进行了研究, 3 种格式中 TVD 的数值耗散最大, 本文改进的 WENO 格式 Im-WENO 最小. 使用驻点热流值将钝锥母线上

的热流值无量纲化, x 方向上的长度使用球头半径无量纲化, 与文献[14]中的实验值作比较, 如图 5 所示. 结果表明: 用本文提出的数值格式进行计算的热流值与实验值符合较好, 说明本文对 WE-NO 格式的改进是有效可靠的.

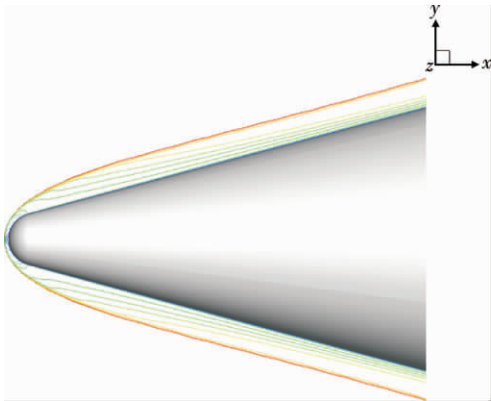


图 4 钝锥对称面流场等马赫线
Fig. 4 Mach lines of plane of symmetry of single cone

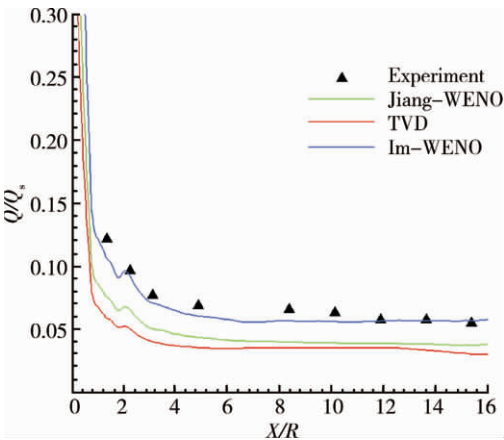


图 5 零攻角钝锥母线上的热流分布
Fig. 5 Longitudinal heating-rate distributions on single cone of 0°angle of attack

3) 再考虑文献[15]中三维钝双锥高超声速绕流的计算. 钝双锥外形及其对称面网格如图 6 所示, 双锥模型总长 122.24 mm, 头部曲率半径 3.835 mm, 前锥半锥角 12.84°后锥半锥角 7°, 来流条件为: 马赫数 $Ma_\infty=9.9$, 攻角 20°, 雷诺数为 2.2×10^5 . 表 2 为 3 种不同数值格式计算的双锥驻点热流值, 由表可以看出: 本文提出的改进 WENO 格式计算结果与文献[12]给出的结果最为接近. 图 7 为对称面流场等马赫线, 图 8 和图 9 分别为钝双锥迎风和侧面子午线表面热流分布. 由结果可以看出: 迎风面子午线上的热流误差稍

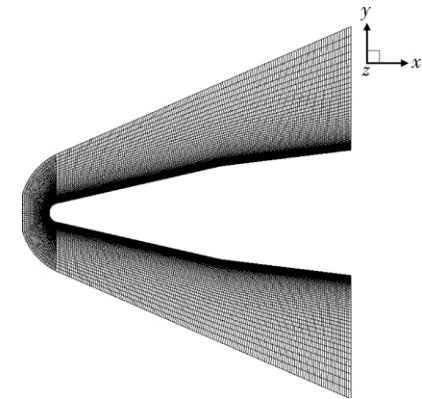


图 6 双锥对称面的计算网格

Fig. 6 Grid of plane of symmetry of biconic

表 2 不同格式的双锥驻点热流系数

Table 2 Stagnation heating-rates of different schemes of biconic

文献结果	TVD	Jiang WENO	Im-WENO
0.0305	0.0164	0.0186	0.0297

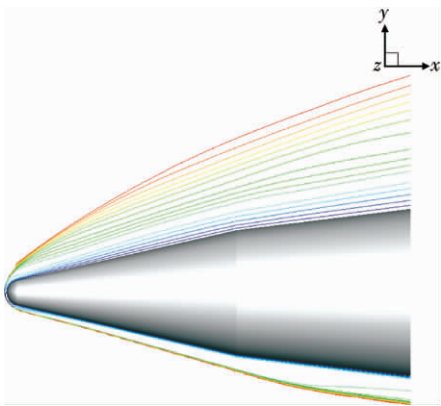


图 7 钝双锥对称面流场等马赫线

Fig. 7 Mach lines of plane of symmetry of biconic

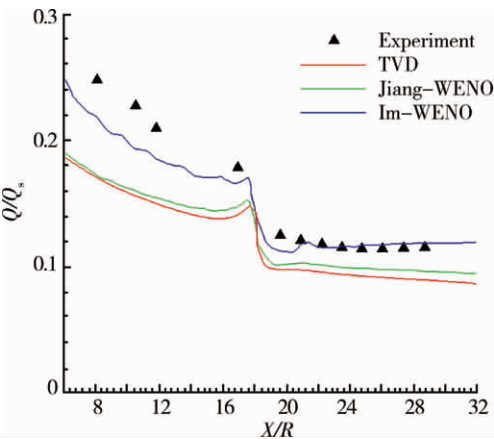


图 8 钝双锥迎风子午线表面热流分布

Fig. 8 Longitudinal heating-rate distributions on biconic on windward side

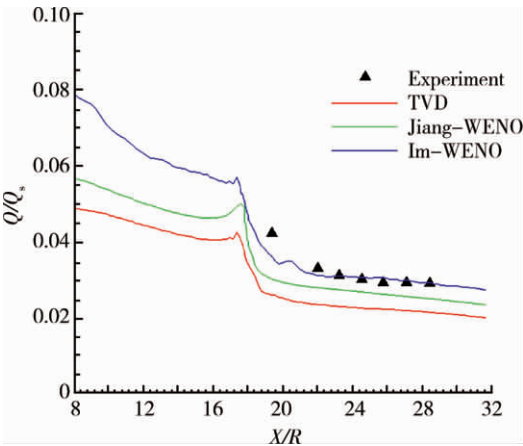


图 9 钝双锥侧面子午线表面热流分布

Fig. 9 Longitudinal heating-rate distributions of bicone of sideward

大,这主要是由于迎风面的激波层较薄,激波和边界的相互干扰使得准确温度梯度计算更加困难.本文提出的数值方法在壁面的耗散更小,与另外 2 种算法相比,热流计算结果更接近实验值.

3 结 论

高超声速热流的计算既需要数值格式能够有效的分辨出激波结构,具有较好的鲁棒性,还需要在壁面附近降低格式的数值黏性,提高对流场的黏性分辨率.

1) 本文分析了 WENO 格式中的小量 ϵ 对格式数值黏性的影响,当 ϵ 比 S_k 大时, ω_k 会接近 C_k^r , 此时的数值耗散较小; ϵ 小于 S_k 时,会增加格式的数值耗散,保证格式的稳定性.

2) 本文利用高超声速流场的特性,并引进了压强总变差,实现了对 WENO 格式的数值黏性的控制,使得数值格式在光滑区和边界层内的数值粘性较小,在流场间断处有较大的数值黏性.

3) 本文进行了球头,钝锥和钝双锥 3 个数值实验对本文提出的数值方法进行了验证,结果表明:本文提出的数值方法降低了格式计算时的网格依赖性,以及在具有较好的鲁棒性的同时可以在壁面附近降低数值耗散.本文提出的数值方法对于高超声速热流的计算是有效的.

参考文献:

[1] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic systems of conservation laws[J]. Journal of Computational Physics,1983,49(3):357-393.
[2] Jameson A, Lax P D. Condition for the construction of multi-point total variation diminishing difference schemes

- [R]. ICASE Reptot 86-18,1986.
- [3] Yee H C. Upwind and symmetric shock capturing schemes [R]. NASA TM 89464,1987.
- [4] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and different schemes[J]. Journal of Computational Physics,1981,43(2):357-372.
- [5] Harten A,Engquist B,Osher S,et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics,1989,71(2):231-303.
- [6] Liu X D,Osher S,Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. Journal of Computational Physics,1994,115(1):200-212.
- [7] Jiang X D,Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics,1996,126(1):202-228.
- [8] Titarev V A,Toro E F. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws [J]. Journal of Computational Physics,2004,201(1):138-260.
- [9] Zhou T,Li Y,Shu C W. Numerical comparison of WENO finite volume and runge-kutta discontinuous galerkin methods[J]. Journal of Scientific Computing,2001,16(2):145-171.
- [10] Wolf W R,Joao L F. Azevedo. Supersonic and hypersonic flow computations using high-order non-oscillatory schemes [J]. AIAA-2006-3169,2006.
- [11] Rehman S F,Eldredge J D,ZHONG Xiaolin. An evaluation of shock-capturing methods on a hypersonic boundary layer receptivity problem[R]. AIAA-2009-941,2009.
- [12] Lee J,Huerta M A,ZHA Gecheng. Hypersonic 3-D blunt body equilibrium air flow using high order WENO schemes [R]. AIAA-2010-4765,2010.
- [13] SHEN Yiqing,ZHA Gecheng,Huerta M A. Simulation of hypersonic wave/boundary layer interaction using high order WENO scheme[R]. AIAA-2010-1047,2010.
- [14] Cleary J W. Effects of angle of attack and bluntness on laminar heating-rate distributions of a 15° cone at a Mach number of 10. 6[R]. NASA TN D-5450,1969.
- [15] Miller C G. Experimental and predicted heating distributions for biconics at incidence in air at Mach 10 [R]. NASA-TP-2334,1984.