

文章编号:1000-8055(2013)03-0695-06

低速下水滴撞击固体表面运动模拟

徐 爽¹, 赵 宁¹, 王春武², 吴 杰¹

(1. 南京航空航天大学 航空宇航学院, 南京 210016;

2. 南京航空航天大学 理学院, 南京 210016)

摘 要: 以水滴撞击飞机部件造成结冰问题为背景, 运用 level set 界面追踪方法, 把不可压黏性方程组中的表面张力用 level set 函数表示, 并利用 2 阶变密度投影算法求解二维不可压 Navier-Stokes 方程组, 数值模拟了低速下的水气界面追踪问题. 为了能够处理密度比为 1000 的水气界面问题, 在界面处引入了一定宽度的光滑过渡带宽, 进而消除了由于界面两边大密度比引起的数值震荡, 由此较为成功地模拟了大水滴在不同表面张力时撞击平板后的形态变化及其运动轨迹. 数值实验结果表明本算法可以有效地处理界面处密度比和黏性很大的不可压多相流问题. 考虑界面处的表面张力, 本算法可模拟不同表面张力下的界面运动变化.

关 键 词: 结冰; level set; 投影算法; 大密度比; 水滴

中图分类号: V211

文献标志码: A

Simulation of droplets impacting on solid surface at low velocity

XU Shuang¹, ZHAO Ning¹, WANG Chun-wu², WU Jie¹

(1. College of Aerospace Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. College of Science,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: In the background of icing problem caused by the droplets which impacted on the surface of aircraft, the level set interface tracking method was used, the surface tension in the incompressible N-S equations was denoted by the level set function and the second-order projection method for variable-density flows was used to solve 2-D incompressible Navier-Stokes equations; the water and gas multiphase problems at low velocity were simulated. In order to simulate the water and gas multiphase problems of the density ratio up to 1000, the numerical oscillations caused by the large density ratio between the interface can be eliminated by smoothing the density at the interface within a few grids. So the topological changes and movements of large droplets, which are different in surface tension when impacting on the solid interface, can be successfully simulated. The numerical results show that the method can be used to model the incompressible multi-phase flow with large density and viscosity density. Considering the surface tension, the movements of the surface at different surface tensions can be simulated.

Key words: icing; level set; projection method; large density ratio; droplet

收稿日期: 2012-03-22

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130326.1743.201303.695_030.html

基金项目: 国家自然科学基金(10972106)

作者简介: 徐爽(1984—), 男, 安徽六安人, 博士生, 主要从事流体力学中的多相流研究.

过冷雨滴撞击在飞行器上会造成结冰进而会对飞行器的飞行安全造成隐患. 当大尺度的水滴撞击到飞行器部件表面后会发生变形、飞溅等运动, 所以对这一现象的细致模拟可以更准确地捕捉水滴累计位置, 为进一步地除冰提供基础^[1]. 因此运用界面追踪方法进行不同表面张力的水滴撞击固体表面数值模拟, 进而了解水滴撞击特性具有重要意义.

Level set 界面追踪方法能够很好地处理复杂的界面拓扑结构变化, 隐式追踪界面, 能自动处理界面的融合和分裂现象, 而且能够更准确地计算表面张力, 另外 level set 方法可以很好地发展到三维情形^[2]. 本文利用文献[3-4]中方法, 在界面处引入了一定宽度的光滑过渡带宽, 进而可以处理密度比为 1 000 的水气界面问题. 在低速情况下, 全流场的控制方程可以用不可压 N-S 方程组, 把表面张力用 level set 函数表示, 结合 2 阶变密度投影算法数值模拟计算. 为了更准确地捕捉界面, 用 5 阶 weighted essentially non-oscillatory (WENO) 格式离散 level set 方程和重新初始化方程^[5]. 本文模拟了不同表面张力的水滴从静止到落地发生反弹、破裂和飞溅等运动变化, 同时模拟了水平方向上一定速度运动的水滴落到固体表面时的形变和运动轨迹.

1 数学模型

1.1 控制方程

对于低马赫数下的黏性问题, 用二维不可压 N-S 方程作为控制方程, 整个速度场满足散度为 0, 如下:

$$U_t = -\frac{\nabla p}{\rho} - (U \cdot \nabla)U + \frac{1}{\rho}[\nabla \cdot (2\mu D) - \sigma k \delta(d)n] + F \quad (1)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2)$$

其中 $U = (u, v)$ 为速度场, ρ 为密度, p 为压强, μ 为黏度, $D = \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T)$ 为黏性压力张量, σ 为表面张力, k 为曲率, δ 为 Diracdelta 函数, n 为单位外法向量, F 为源项.

假设边界条件全部为无穿透滑移边界条件, 即在界面处有: $U \cdot n = 0$, U 为速度向量场.

分别令水和气的密度为 ρ_l 和 ρ_g , 黏度为 μ_l 和 μ_g , 以上不可压 N-S 方程组无量纲化后有

$$U_t = -\frac{\nabla p}{\rho} - (U \cdot \nabla)U + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{Re} \nabla \cdot (2\mu D) - \frac{1}{B} \sigma k \delta(d)n \right] + g \quad (3)$$

其中 $\rho = \rho/\rho_l$ 为无量纲密度, $\mu = \mu/\mu_l$ 为无量纲黏度, Re 为雷诺数, $Re = \rho_l RU/\mu_l$, $B = \rho_l RU/\sigma$, 用来衡量张力大小, g 代表无量纲重力源项.

1.2 Level set 函数

在全流场中定义 level set 函数 $\phi(x, y, t)$, 其中 $\phi(x, y, t) = 0$ 处即为界面的位置, 在液体中 ϕ 为负值, 在气体中 ϕ 为正值. 界面处的单位外法向量从液体指向气体, 单位外法向量和曲率都可以由 ϕ 表示

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}, \quad R = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (4)$$

全流场 ϕ 的更新方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \cdot \nabla \phi = 0 \quad (5)$$

为了防止由于界面拓扑结构变化大, level set 等值线会出现交织等情况, 需要对 level set 函数进行重新初始化, 重新初始化方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + S(\phi_0)(|\nabla \phi| - 1) = 0 \quad (6)$$

其中 $\phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y)$, $S(\phi_0)$ 为光滑符号函数.

对于界面两边为大密度比时, 由于梯度太大, 数值计算时会产生数值震荡等不稳定现象, 甚至无法计算下去. 为了消除这种不稳定现象, 界面处光滑过渡密度具体如下:

$$\hat{\rho} = \left(1 + \frac{\rho_g}{\rho_l}\right)/2, \quad \check{\rho} = \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right)/2$$

$$\rho(\phi) = \begin{cases} 1.0 & \text{如果 } \phi < -\alpha \\ \rho_g/\rho_l & \text{如果 } \phi > \alpha \\ \hat{\rho} - \check{\rho} \sin[\pi\phi/(2\alpha)] & \text{其他情况} \end{cases} \quad (7)$$

以上处理即是在界面处用宽度为 2α 的带宽光滑过度了界面两边的密度, α 与网格步长成一定比例, 在计算过程中 α 保持不变, 本文计算中 α 为 1.5 倍网格步长, 以上处理是基于 ϕ 为界面的距离符号函数的.

1.3 投影法

在投影法^[6-7]中有, 如果给定的一个矢量场 V , 那么就存在着唯一的一个 Hodge 分解, 使得 $V = V_d + \nabla \psi$. 在变密度投影法^[8]中有, 在定义一个密度加权内积的前提下, 对于一个矢量场 V , 可

以唯一的分解为 $V = V_d + \nabla\psi/\rho$, 其中 V_d 为散度为 0 的矢量场, ψ 为标量, ρ 为密度, 此时有 $V_d \perp \nabla\psi/\rho$, 在这种情况下, V_d 就称为 V 的投影, $V_d = P_\rho(V)$. 对于式(3), 可以写成以下形式: $U_t = V - \nabla p/\rho$, 由于 U_t 为散度为 0 的矢量场, 且 Hodge 分解是唯一的, 那么有 $U_t = P_\rho(V)$, 即 U_t 是 V 的基于密度加权内积下的无散度投影. 对于 $U_t + \nabla p/\rho = V$ 有 $\rho U_t + \nabla p = \rho V$, 对两边做卷积分

$$\nabla \times (\rho U_t) = \nabla \times (\rho V) \quad (8)$$

对于任意一个散度为 0 的向量 U_t , 存在一个流函数 φ 使得 $U_t = \nabla \times \varphi$, 对于二维情况下有 $U_t = (\varphi_y - \varphi_x)$, 带入式(8)后精简得

$$-\nabla(\rho \nabla \varphi) = \nabla \times (\rho V) \quad (9)$$

根据边界条件 $U \cdot n = 0$, 在边界上 φ 为常数. 通过数值求解式(9), 求出 φ , 再求出 U_t , 然后通过时间方向上的离散求出速度场.

1.4 表面张力

在动量方程组(3)中的表面张力可以表达成 level set 函数的形式^[9]

$$-\frac{1}{B}k\delta(d)n = \frac{1}{B}k(\phi)\delta(\phi)\nabla\phi \quad (10)$$

其中 n 和 k 分别为单位法向量及曲率.

基于 ϕ 为界面的距离符号函数, 可以做类似于对密度的处理, 在界面处对 $\delta(\phi)$ 进行光滑过渡^[10]

$$\delta_\alpha(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 + \cos(\pi\phi/\alpha)]/\alpha & \text{如果 } |\phi| < \alpha \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (11)$$

这样表面张力就完全由 level set 函数表示出来.

在投影计算中, 式(9)中的 $\nabla \times (\rho V)$ 中的表面张力贡献的部分为以下形式:

$$-\frac{1}{B}\{[k(\phi)\delta_\alpha(\phi)\phi_y]_x - [k(\phi)\delta_\alpha(\phi)\phi_x]_y\} \quad (12)$$

定义一个标量函数 $H(\phi)$:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0.5 & \text{如果 } \phi > \alpha \\ -0.5 & \text{如果 } \phi < -\alpha \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\phi}{\alpha} + \frac{1}{\pi}\sin(\pi\phi/\alpha)\right] & \text{其他情况} \end{cases} \quad (13)$$

$\delta_\alpha(\phi) = \frac{\partial H(\phi)}{\partial \phi}$, 式(12)可简化成下面形式:

$$-\frac{1}{B}[k(\phi)_x H(\phi)_y - k(\phi)_y H(\phi)_x] \quad (14)$$

通过以上操作可以消除在投影算法中由于对 delta 函数差分操作引起的数值不稳定现象.

2 数值离散方法

2.1 对流项的离散

本文中对于速度场和 level set 函数 ϕ 使用了交错网格的离散形式, h 为网格步长. 在动量方程中, 对流项 $(U \cdot \nabla)U$, 可以写成以下守恒形式:

$$(U \cdot \nabla)U = f_x + g_y \quad (15)$$

其中

$$f = \begin{cases} u^2 \\ uv \end{cases} \quad g = \begin{cases} uv \\ v^2 \end{cases}$$

可以离散如下:

$$\begin{aligned} [(u^2)_x + (uv)_y]_{i,j} = & (u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j})(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})/2h + \\ & (v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2})(u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2})/2h \\ [(uv)_x + (v^2)_y]_{i,j} = & (u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j})(v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j})/2h + \\ & (v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2})(v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})/2h \end{aligned}$$

其中 $u_{i+1/2,j}, v_{i,j+1/2}$ 等用 2 阶 ENO(essentially non-oscillatory) 格式^[11] 得到.

2.2 黏性项的离散

对于黏性压力张量内的偏导, 用中心差分, 其中

$$\begin{aligned} (u_x)_{i+1/2,j+1/2} &= (u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + \\ & u_{i+1,j} - u_{i,j})/2h \\ (u_y)_{i+1/2,j+1/2} &= (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} + \\ & u_{i,j+1} - u_{i,j})/2h \end{aligned} \quad (16)$$

类似处理 v_x, v_y . 对于黏性压力张量散度的离散如下:

$$\begin{aligned} [(\mu D)_x]_{i,j} &= \{[(\mu D)_{i+1/2,j+1/2} - (\mu D)_{i-1/2,j+1/2} + \\ & (\mu D)_{i+1/2,j-1/2} - (\mu D)_{i-1/2,j-1/2}]/2h \\ [(\mu D)_y]_{i,j} &= \{[(\mu D)_{i+1/2,j+1/2} - (\mu D)_{i+1/2,j-1/2} + \\ & (\mu D)_{i-1/2,j+1/2} - (\mu D)_{i-1/2,j-1/2}]/2h \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\mu_{i+1/2,j+1/2} = (\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1})/4$$

左边界处, 离散如下:

$$\begin{aligned} (u_x)_{-1/2,j+1/2} &= (u_{0,j} + u_{0,j+1})/h \\ (\mu_{-1/2,j+1/2}) &= (\mu_{0,j} + \mu_{0,j+1})/2 \end{aligned} \quad (18)$$

其余边界类似处理.

2.3 投影法的离散

对于投影法中的散度和梯度, 用以下方式定

义离散^[8]:

散度离散

$$(\nabla \cdot \mathbf{U})_{i+1/2, j+1/2} = \\ (u_{i+1, j+1} - u_{i, j+1} + u_{i+1, j} - u_{i, j})/2h + \\ (v_{i+1, j+1} - v_{i+1, j} + v_{i, j+1} - v_{i, j})/2h$$

梯度离散

对于标量 ϕ 有

$$(G_x \phi)_{i, j} = (\phi_{i+1/2, j+1/2} - \phi_{i-1/2, j+1/2} + \\ \phi_{i+1/2, j-1/2} - \phi_{i-1/2, j-1/2})/2h \\ (G_y \phi)_{i, j} = (\phi_{i+1/2, j+1/2} - \phi_{i+1/2, j-1/2} + \\ \phi_{i-1/2, j+1/2} - \phi_{i-1/2, j-1/2})/2h$$

在式(9)中,把 φ 定义到网格节点 $i+1/2, j+1/2$ 上,对于(9)式推导有

$$-G_x[\rho(G_x \varphi)] - G_y[\rho(G_y \varphi)] = \\ G_x(\rho \mathbf{V}_2) - G_y(\rho \mathbf{V}_1) \quad (19)$$

$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ 分别为 $\mathbf{V}$ 的分量.

按照以上对散度和梯度的离散式(19)有

$$-[\rho_{i, j} \varphi_{i-1/2, j-1/2} + \rho_{i, j+1} \varphi_{i-1/2, j+3/2} + \\ \rho_{i+1, j} \varphi_{i+3/2, j-1/2} + \rho_{i+1, j+1} \varphi_{i+3/2, j+3/2} - \\ (\rho_{i, j} + \rho_{i+1, j} + \rho_{i, j+1} + \rho_{i+1, j+1}) \varphi_{i+1/2, j+1/2}] = \\ G_x(\rho \hat{\mathbf{V}}_2) - G_y(\rho \hat{\mathbf{V}}_1) - \\ \frac{1}{B}[G_x(k(\phi))G_y(H(\phi))] - \\ G_y[k(\phi)]G_x(H(\phi))$$

其中 $\hat{\mathbf{V}}_1, \hat{\mathbf{V}}_2$ 为 $\mathbf{V}$ 中除去表面张力后的分量.

用预处理共轭梯度法^[12]求解上述方程组得到 φ ,通过 $\mathbf{U}_t = (\varphi_y, -\varphi_x)$,可以求得 $\mathbf{U}_t$.

2.4 level set 函数推进和时间离散

用 5 阶 WENO 格式离散 level set 方程和重新初始化方程中的对流项^[6].对 level set 函数和重新初始化方程中的时间方向推进以及通过 $\mathbf{U}_t$ 求解速度场全部用 3 阶 TVD(total variation diminishing),Runge-Kutta 方法离散^[13].

2.5 时间步长

由于对流项的存在,时间步长 Δt 的计算需要满足 CFL(Courant-Fridrichs-Lewy)条件,并且由于黏性和表面张力的存在,用下式计算时间步长^[14]:

$$\Delta t_c = \min\left(\frac{h}{|\mathbf{U}|}\right) \\ \Delta t_s = \sqrt{(\rho_l + \rho_s)B/8\pi h^{\frac{3}{2}}} \\ \Delta t_v = \min\left[\frac{3}{14}(\rho Re h^2/\mu)\right] \\ \Delta t^{n+1} = \frac{1}{2}\min(\Delta t_c, \Delta t_s, \Delta t_v) \quad (20)$$

3 数值结果

通过算例 1 和算例 2 模拟了不同表面张力的水滴自由落体到固体表面后发生的反弹和摊开的过程.计算区域为矩形区域, $6.0R \times 12.0R$, 网格为 72×144 , 其中 $R=1.0$, 为水滴半径.

算例 1 计算了 $Re=10.0, B=1.0$, 密度比为 $1000:1$, 黏度比为 $100:1$ 时水滴的落地过程.由于水滴表面张力较大,水滴落地发生变形后又反弹,然后落下保持静止.图 1 给出了水滴落地后反弹又落下的运动过程.图 2 给出了下降过程中,水滴垂直方向上的速度-时间图,由图可以看出水滴下落过程中先以加速度为 -1 的速度下降,落到地面后反弹起来,后又落下静止.

算例 2 计算了 $Re=10.0, B=10.0$, 密度比

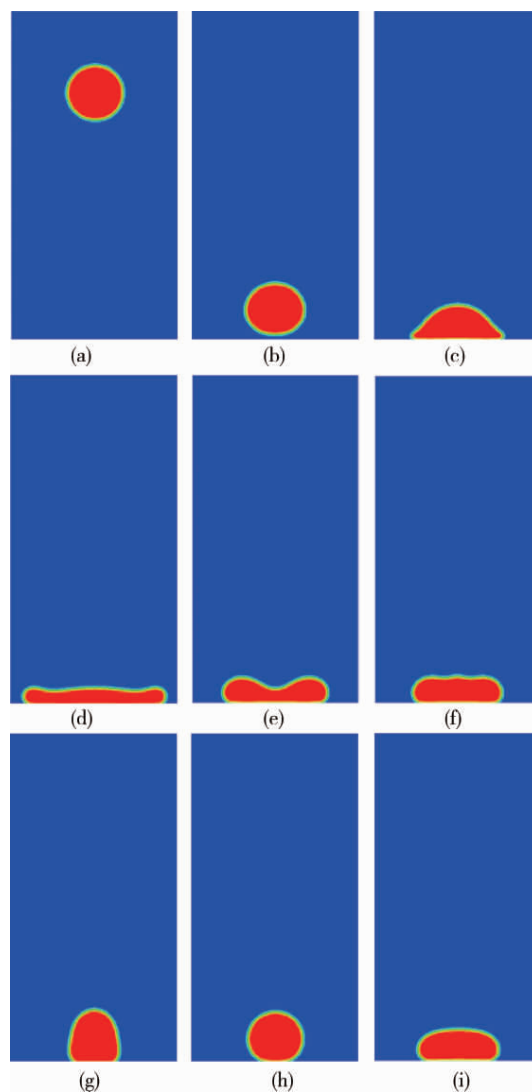


图 1 $Re=10.0, B=1.0$ 时水滴垂直下落运动图

Fig. 1 Movement of droplet falling on the ground when $Re=10.0, B=1.0$

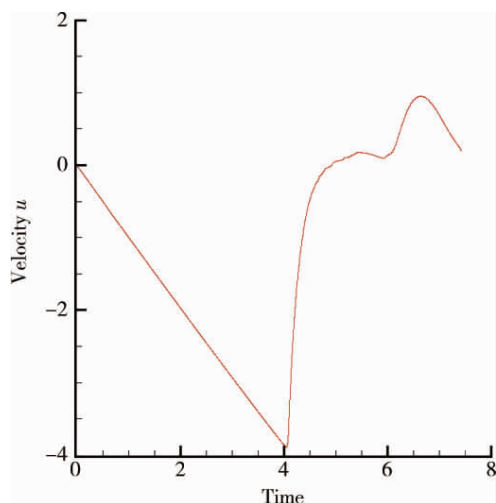


图 2 水滴垂直下落运动中垂直速度变化图

Fig. 2 Variation of vertical velocity of droplet falling on the ground

为 1000 : 1, 黏度比为 100 : 1 时水滴的落地过程, 与算例 1 相比水滴的表面张力比较小的多, 水滴落到地面后完全平摊下来, 与物理原理相一致. 运动过程如图 3 所示.

算例 3 模拟了水平方向上一定速度的水滴落在固体表面时的运动过程. $Re=10.0$, $B=0.1$, $u=0.5$, 密度比为 1000 : 1, 黏度比为 100 : 1, 计算区域为 $12.0R \times 12.0R$, 网格为 144×144 , 其中

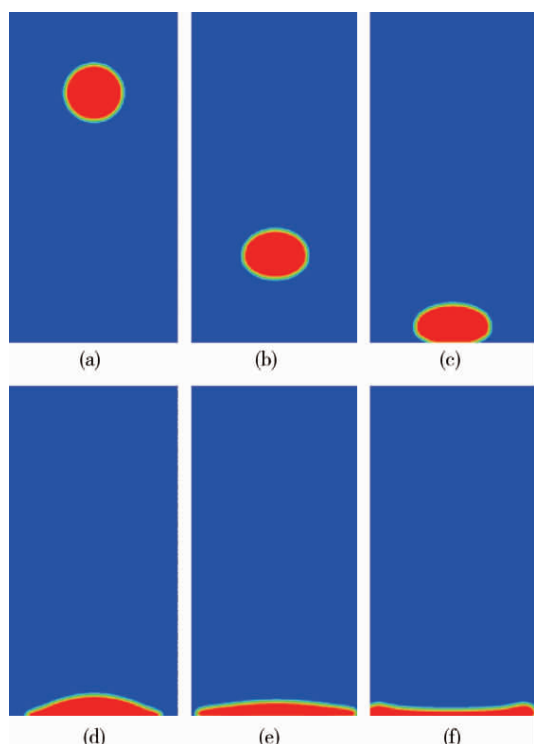
图 3 $Re=10.0$, $B=10.0$ 时水滴垂直下落运动图

Fig. 3 Movement of droplet falling on the ground when $Re=10.0$, $B=10.0$

$R=1.0$, 为水滴半径. 由于表面张力很大, 水滴落体后反弹 2 次, 并同时保持水平方向上的运动, 如图 4 所示. 图 5 给出了下落过程中, 水滴的运动轨迹线, 两次落地后又反弹起来, 反弹的高度逐渐变小, 与图 4 中的水滴运动过程图像相吻合.

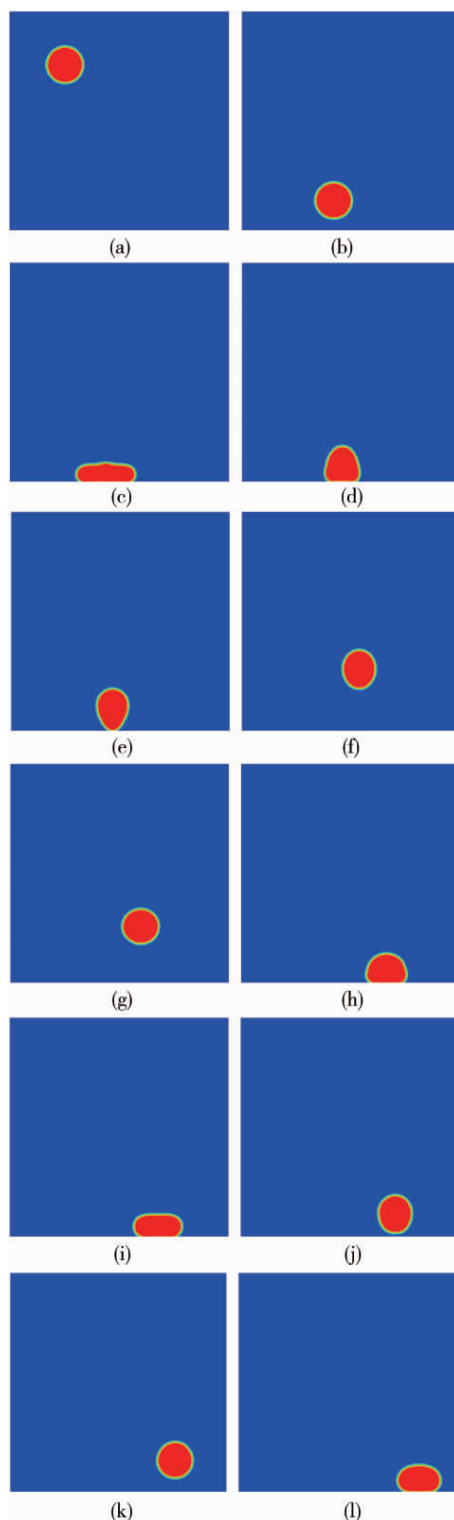
图 4 $Re=10.0$, $B=0.1$, $u=0.5$ 时水滴下落运动图

Fig. 4 Movement of droplet falling on the ground when $Re=10.0$, $B=0.1$, $u=0.5$

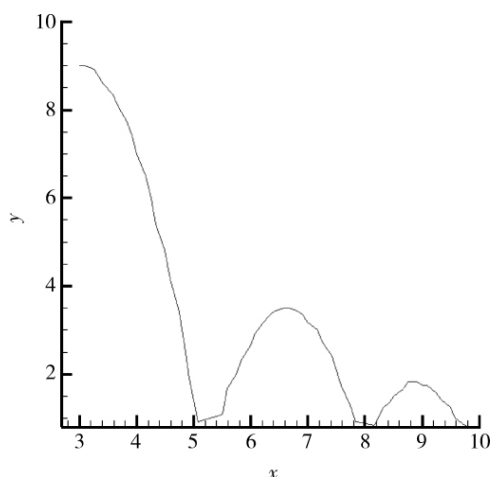


图 5 水滴下落运动转迹线图

Fig. 5 Trace line of the droplet falling on the ground

通过上述 3 个算例可以看出:本文发展的数值方法有效地模拟了具有大密度比的水滴下落问题.

4 结 论

本文利用 level set 界面追踪方法,通过在界面处用一定的带宽光滑过渡了界面两边的密度,并结合变密度投影法模拟计算了二维时不同表面张力的水滴落到固体表面时发生的形变及其运动轨迹,并用高阶格式离散 level set 方程和重新初始化方程,实现了水滴运动问题的精确数值模拟,并为下一步针对过冷水滴与机翼相互作用过程分析奠定了良好的基础^[15].

参考文献:

- [1] 朱春玲,李宇钦,张泉. 基于旋转多圆柱的冰风洞液滴参数分析方法[J]. 航空动力学报, 2007, 22(2): 180-186.
ZHU Chunling, LI Yuqin, ZHANG Quan. Analysis method of droplets parameters based on rotating multicylinder in an icing wind tunnel[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(2): 180-186. (in Chinese)
- [2] Mark S, Ann S A. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 148(1): 81-124.
- [3] Mark S, Peter S, Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two phase flow[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(1): 146-159.
- [4] Mark S, Emad F, Peter S, et al. A level set approach for computing solutions to incompressible two phase flow II [R]. Lawrence Livermore National Labreport, UCRL-JC-121224, 1995.
- [5] Fedkiw R P, Tariq A, Barry M, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interface in multimaterial flows (the ghost fluid method)[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 152(2): 457-492.
- [6] John B, Phillip C. A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equation [J]. Journal of Computational Physics, 1985, 85(2): 257-283.
- [7] Joho B, Phillip C, Louis H. An efficient second-order projection method for viscous incompressible flow[C]// AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference. Honolulu Hawaii: AIAA, 1991: 360-367.
- [8] Joho B, Daniel L. A second-order projection method for variable-density flow[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 101(2): 334-348.
- [9] Brackbill J U, Kothe D B, Zemach C. A continuum method for modeling surface tension[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 100(2): 335-354.
- [10] Peskin C S. Numerical analysis of blood flow in the heart [J]. Journal of Computational Physics, 1977, 25(3): 220-252.
- [11] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing: schemes II [J]. Journal of Computational Physics, 1989, 83(1): 32-78.
- [12] Tatebe O. The multigrid preconditioned conjugate gradient method. [EB/OL]. [2011-9-19]. <http://www.hpcs.cs.tsukuba.ac.jp/~tatebe/research/paper/SWoPP92.pdf>.
- [13] Shu C W. Total-variation-diminishing time discretization [J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1988, 9(6): 1073-1084.
- [14] Mulder W, Osher S, James. A computing interface motion in compressible gas dynamics[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 100(2): 209-228.
- [15] Mark S, Perer S. Axisymmetric free boundary problems [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1997, 341(1): 269-294.