

文章编号:1000-8055(2013)08-1764-05

# 自适应增量粒子滤波方法

傅惠民, 吴云章, 娄泰山

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

**摘 要:** 提出自适应增量粒子滤波(AIPF)的概念和定义,建立 AIPF 模型,给出了分析方法和主要的计算步骤.对于许多实际工程(如深空探测)中存在的由未知系统误差的影响而无法精确建立量测似然函数及滤波过程中的粒子匮乏等问题,通过增量粒子滤波模型对滤波过程中的粒子数进行自适应调整,从而消除这种未知系统和滤波粒子匮乏的影响,自动调整粒子,提高非线性滤波的精度.仿真计算中,滤波误差均值和方差分别降低为原来的 3.8%和 19.6%.该方法有效地改善了滤波效果,计算简单,便于工程应用.

**关 键 词:** 自适应增量粒子滤波; 自适应粒子滤波; 系统误差; 滤波精度; 深空探测

中图分类号: V448; O231

文献标识码: A

## Adaptive incremental particle filter method

FU Hui-min, WU Yun-zhang, LOU Tai-shan

(Research Center of Small Sample Technology,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** An adaptive incremental particle filter (AIPF) model was put forward, and its concept, model, basic equations and key calculative steps were given. For the measurement data with unknown system errors in many actual engineering (such as deep space exploration) and the considerable filter errors, accurate measurement model cannot be established. The presented AIPF method applied the accurate incremental particle filter model to automatically conduct adaptive adjustment of the number of particles, so the effects of these unknown measurement system errors and the lack of particles were eliminated. This method can automatically adjust the particles (sample points) and finally improve the nonlinear filtering accuracy. In simulation, the mean and covariance of filtering error decrease by 3.8% and 19.6%, respectively. The method can effectively improve the performance of filter, so it can be easily applied to engineering with simple calculation process.

**Key words:** adaptive incremental particle filter (AIPF); adaptive particle filter (APF); system error; filtering accuracy; deep space exploration

粒子滤波(particle filter, PF)是一种能对动态系统进行估计的有效方法<sup>[1-3]</sup>,并且成功地应用于语音增强、目标跟踪、导航、故障诊断和计算机视觉等诸多领域<sup>[1-11]</sup>.其关键技术是选取恰当

的概率密度分布表征粒子(样本点)集.标准粒子滤波的粒子数在整个状态估计过程中是固定不变的.

为了使整个状态估计过程中所用的粒子数不

收稿日期:2012-07-24

网络出版地址: [http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130802.1224.201308.1764\\_012.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130802.1224.201308.1764_012.html)

基金项目:国家重点基础研究发展计划(2012CB720000)

作者简介:傅惠民(1956—),男,浙江遂昌人,“长江学者”特聘教授,博士,从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法、可靠性及滤波理论研究.

再固定不变,提出了自适应粒子滤波(adaptive particle filter, APF)来解决这一问题<sup>[1]</sup>. 目前,自适应粒子滤波主要有以下两种方式来改变滤波过程中的粒子数:一种是通过所需的粒子数应能保证非归一化似然值的和超过某一预定的门限的似然函数的 APF(L-APF);另一种是通过粒子数的自适应变化来保证后验密度的真值与估计值之间的误差限(通常这种误差限用 KLD 表示)的 Kullback-Leibler(KL)信息数或 KL 距离(KLD)采样的 APF(KLD-APF). 这两种方法都是基于当概率密度集中在状态空间的小范围内(即状态分部不确定性较小)时采用少量的粒子数,反之采用较多的粒子数的思路来自适应改变粒子数.

但是,工程中环境因素不断变化,从而出现测量设备不稳定、模型和参数选取不当等问题. 这些问题往往带来未知时变的系统误差. 传统自适应粒子滤波方法无法很好地对这种测量系统误差进行补偿和修正,结果产生较大的滤波误差,甚至导致发散. 文献[12]提出了一种基于增量量测方程的增量 Kalman 滤波方法,它能够成功消除未知的系统误差,提高滤波精度;文献[13-15]将这一线性增量 Kalman 滤波方法推广到了非线性条件下. 文献[15]基于增量量测方程提出了一种增量粒子滤波方法,即将增量滤波方法推广到了非线性非高斯系统中,更接近工程实际. 本文通过增量粒子滤波模型对滤波过程中的粒子数进行自适应调整,从而消除这种未知系统和滤波粒子匮乏的影响,自动调整粒子,提高非线性滤波的精度.

## 1 基本方程

对于工程实践中非线性随机系统,描述其系统的状态方程和量测方程通常都是非线性方程. 其对应的非线性离散增量系统可以给出以下表达式<sup>[13-15]</sup>:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

工程实际中,式(2)还可以写成如下形式:

$$\Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{h}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (3)$$

式中  $\mathbf{x}_k$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{f}_k(\cdot)$  为  $n$  维非线性向量离散函数;  $\mathbf{w}_k$  为  $n$  维系统噪声向量;  $\Delta \mathbf{z}_k$  为  $m$  维量测向量增量,  $\Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}$ ;  $\mathbf{z}_k$  为  $m$  维量测向量;  $\mathbf{h}_k(\cdot)$  为  $m$  维非线性向量离散函数;  $\mathbf{v}_k$  为  $m$  维量测噪声向量.  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  为相互独立的噪声.

## 2 自适应增量粒子滤波方法的计算步骤

### 2.1 增量粒子滤波方法

1) 初始化.  $k=0$ , 由先验概率  $p(\mathbf{x}_0)$  采样, 得到粒子  $\mathbf{x}_0^i, i=1, \dots, N$ .

2) 更新. 在  $k$  时刻, 更新粒子权值

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{p(\Delta \mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i) p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \Delta \mathbf{z}_k)} \quad (4)$$

$$i=1, \dots, N$$

并且归一化

$$\omega_k^i = \omega_k^i / \sum_{i=1}^N \omega_k^i \quad (5)$$

则可得  $k$  时刻未知参数  $\mathbf{x}_k$  的最小均方估计

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \mathbf{x}_k^i \quad (6)$$

3) 重采样. 若  $\hat{N}_{\text{eff}} < N_{\text{th}}$ , 则进行重采样, 将原来的带权样本  $\{\mathbf{x}_k^i, \omega_k^i; i=1, \dots, N\}$  映射为等权样本  $\{\mathbf{x}_k^i, 1/N; i=1, \dots, N\}$ ; 反之, 不需要进行重采样. 式中有有效粒子数  $\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2}$ , 阈值  $N_{\text{th}}$  一般取为  $2N/3$ .

4) 预测. 方差估计为

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \sum_{i=1}^N \omega_k^i (\mathbf{x}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \quad (7)$$

5) 判断是否结束, 若是则退出算法, 若否则返回步骤 2).

### 2.2 似然分布自适应调整

基于似然函数的 APF(L-APF)方法通常通过改变粒子对应权值的分布, 改变似然函数分布来实现自适应算法. 类似地, 对标准增量粒子滤波算法中的权值更新作自适应改进, 就可以得到一种自适应增量滤波方法.

更新权值  $\omega_k^{i*} = p(\Delta \mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{i*})$  后, 存储最大权值  $\omega_k^{i_{\omega-\max}^*}$  及最小权值  $\omega_k^{i_{\omega-\min}^*}$  和相对应的序号  $i_{\omega-\max}, i_{\omega-\min}$ , 并进一步求得量测增量信息  $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\max}^*} = \Delta \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^{i_{\omega-\max}^*} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ ,  $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\min}^*} = \Delta \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^{i_{\omega-\min}^*} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ , 从而计算  $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\max}^*}$  与  $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\min}^*}$  之间的欧氏距离  $L_{\max} = (\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\max}^*} - \Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\min}^*})(\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\max}^*} - \Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega-\min}^*})^T$ . 重新计算权值  $\omega_k^{i*} = \omega_k^i + (\omega_k^{i_{\omega-\min}^*} / N) \sin[(L^i / L_{\max})(\pi/2)]\beta$ , 其中  $\beta$  为自适应系数, 由量测噪声的统计特性决定.

由上面的计算和分析可知,在这种自适应算法中 $\beta$ 值尤为重要.当量测噪声较低时, $\beta=0$ ,不对似然分布作调整;当量测噪声较高,即当似然分布呈尖峰状态或位于转移先验分布尾部时, $\beta>0$ ,即人为使得似然分布较广一些.

$$\beta = \begin{cases} K/\alpha & \alpha \leq \epsilon \\ 0 & \alpha > \epsilon \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\epsilon$ 为阈值,根据经验确定; $K$ 为比例常数, $K/\alpha > 0$ .

似然分布自适应调整滤波方法:

1) 初始化.  $k=0$ ,由先验概率 $p(\mathbf{x}_0)$ 采样,得到粒子 $\mathbf{x}_0^i, i=1, \dots, N$ .

2) 更新粒子.  $\mathbf{x}_k^{i*} = p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i), i=1, \dots, N$ ,计算每个粒子的似然函数概率 $p(\Delta \mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{i*})$ ,更新权值 $\omega_k^{i*} = p(\Delta \mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{i*})$ .

3) 存储最大权值 $\omega_k^{i* \max}$ ,最小权值 $\omega_k^{i* \min}$ 和对应的序号 $i_{\omega \max}, i_{\omega \min}$ ,求得量测信息 $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega \max}} = \Delta \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}^{i_{\omega \max}} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ ,  $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega \min}} = \Delta \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}^{i_{\omega \min}} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ ,计算 $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega \max}}$ 与 $\Delta \mathbf{z}_k^{i_{\omega \min}}$ 之间的欧氏距离 $L_{\max}$ 及 $L_{\min}$ .

4) 计算确定 $\beta$ 值,重新计算权值 $\omega_k^{i*} = \omega_k^{i*} + (\omega_k^{i_{\omega \min}} / N) \sin[(L^i / L_{\max})(\pi/2)]\beta$ .

5) 归一化权值,  $\omega_k^{i*} = \omega_k^{i*} / \sum_{j=1}^N \omega_k^{j*}$ ,可得 $k$ 时刻未知参数 $\mathbf{x}_k$ 的最小均方估计 $\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N (\omega_k^{i*} \mathbf{x}_k^i)$ .

6) 重采样. 对 $\{\mathbf{x}_k^i, \omega_k^i; i=1, \dots, N\}$ 进行重采样得到新粒子群 $\{\mathbf{x}_k^i, \omega_k^i; i=1, \dots, N\}$ ,  $\omega_k^i = 1/N$ .

7) 返回步骤2).

$\beta$ 值的选取需要根据工程经验确定,因此也可以采用线性方法重新计算权值

$$\omega_k^{i*} = \omega_k^{i_{\omega \max}} + \frac{\omega_k^{i_{\omega \max}} - \omega_k^{i_{\omega \min}}}{L_{\max} - L_{\min}} (L^i - L_{\max}) \quad (9)$$

### 2.3 Kullback-Leibler 距离采样

对标准的粒子滤波、增量粒子滤波算法而言,其样本数是固定不变的,不变的样本容量直接影响计算效果,使得算法的实时性和精度变差.自适应 KLD 粒子滤波算法在估计过程中采样粒子数不是保持固定值,而是根据滤波性能动态改变.利用 Kullback-Leibler 距离来描述粒子滤波的近似误差.该方法为了保证后验密度的真实分布与估计值之间的误差,需要自适应改变粒子数来实现,即根据样本的近似分布与真实分布之间的 KL 距

离来调整粒子数目.同理自适应 KLD 增量粒子滤波也可以采用相同的方法来描述. KLD 用于表示不同概率分布 $p, q$ 之间差异的测度,即

$$K(p, q) = \sum_x p(x) \lg \frac{p(x)}{q(x)} \quad (10)$$

选择样本数目

$$n = \frac{1}{2\epsilon} \chi_{k-1, 1-\delta}^2 \quad (11)$$

式中 $\chi_{k-1, 1-\delta}^2$ 表示具有 $k-1$ 个自由度的中 $\chi^2$ 分布 $1-\delta$ 分位数.通常由 Wilson-Hilferty 变换给出 $n$ 的近似计算表达式

$$n = \frac{1}{2\epsilon} \chi_{k-1, 1-\delta}^2 \approx$$

$$\frac{k-1}{2\epsilon} \left[ 1 - \frac{2}{9(k-1)} + \sqrt{\frac{2}{9(k-1)}} z_{1-\delta} \right]^3 \quad (12)$$

式中 $z_{1-\delta}$ 为标准正态分布的 $1-\delta$ 上侧分位数.

自适应 KLD 增量粒子滤波计算步骤:

1) 输入.  $t-1$ 时刻对其后验区域 $\text{Bel}(\mathbf{x}_{t-1})$ 进行重采样得到表示对应时刻的粒子集合 $\mathbf{S}_{t-1} = \{\langle \mathbf{x}_{t-1}^i, \omega_{t-1}^i \rangle | i=1, \dots, n\}$ ;量测增量 $\Delta \mathbf{z}_t$ 预测后验概率密度与真实后验概率密度之间的误差限 $\epsilon$ ,标准正态分布上分位数 $z_{1-\delta}$ ,粒子数的最小值 $n_b$ ,  $t-1$ 时刻的粒子数 $n_{t-1}$ ,小区域阈值 $\Delta$ .

2) 初始化. 令 $t$ 时刻的预测粒子集合 $\mathbf{S}_k = \Phi$ ,  $n=0, k=0, \alpha=0$ .

3) 产生样本,直到满足 KLD 条件.

在集合 $\mathbf{S}_{t-1}$ 所表示的离散分布中根据权值进行抽样,得到粒子对应的序号 $j$ ;

时间更新,  $t$ 时刻的粒子 $\mathbf{x}_t^i$ 由抽样得到的粒子 $\mathbf{x}_{t-1}^i$ 根据状态转移概率 $P(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ 产生;

将新抽样粒子添加到集合中,  $\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_t \cup \{\langle \mathbf{x}_t^i, \omega_t^i \rangle\}$ ;

计算更新重要性权值:

测量更新,  $\omega_t^i = P(\Delta \mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t^i)$ ;

$$\alpha = \alpha + \omega_t^i$$

判断 $\mathbf{x}_t^i$ 属于空的小区域 $\mathbf{b}_k$ ;更新空的小区域及序号;

若 $\mathbf{x}_t^i$ 属于空区域 $\mathbf{b}_k$ ,则

$$k = k + 1$$

将 $\mathbf{b}_k$ 标识为非空;

反之,不更新空的小区域及序号,结束判断;

$$n = n + 1$$

当 $n < \frac{1}{2\epsilon} \chi_{k-1, 1-\delta}^2$ 时,重复进行步骤3),直到满足 $t$ 时刻的粒子数 $n_t$ 为止;

$$n_t = \frac{1}{2\epsilon} \chi_{k-1,1-\delta}^2 \approx$$

$$\frac{k-1}{2\epsilon} \left[ 1 - \frac{2}{9(k-1)} + \sqrt{\frac{2}{9(k-1)}} z_{1-\delta} \right]^3$$

4) 权值归一化及更新.  $\omega_t^{i*} = \omega_t^i / \alpha$ ;  $i=1, \dots, n$ , 更新权值  $\omega_t = \omega_t^{i*}$ .

5) 返回  $t$  时刻的粒子及其状态值集合; 按照重采样规则在预测粒子集  $S_t$  中选取  $n_t$  个样本, 组成样本集  $S_t = \{ \langle x_t^i, \omega_t^i \rangle \mid i=1, \dots, n_t \}$ ; 则可得  $t$

时刻未知参数  $x_t$  的最小均方估计  $\hat{x}_t = \sum_{i=1}^{n_t} \omega_t^i x_t^i$ .

### 3 计算机仿真验证

针对一维非线性系统状态估计问题进行仿真研究, 仿真采用的非线性系统状态方程和量测方程如下:

$$x_k = 10 + 0.5x_{k-1} + \frac{2.5x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 2\cos[1.2(k-1)] + w_{k-1} \quad (13)$$

$$z_k = \frac{x_k^2}{5} + a_k + v_k \quad (14)$$

式中  $w_k$  和  $v_k$  是独立的高斯白噪声序列, 且量测噪声  $v_k$  的均值  $r=0$ , 方差  $R=1$ . 量测系统误差  $a_k=3$  为未知量, 采样粒子数  $n=150$ . 系统噪声  $w_k$  的均值  $q=0$  和方差  $Q$  的变化如下式:

$$Q_k = \begin{cases} 0.1 & k \in [1, 50) \\ 0.5 & k \in [50, 100) \\ 0.2 & k \in [100, 150] \end{cases}$$

分别采用似然分布 APF、似然分布 AIPF(采用线性修正方式)两种方法进行滤波, 状态初始值取为  $\hat{x}_k = x_0 = 1$ , 估计均方误差阵初值为  $P_0 = 2$ .

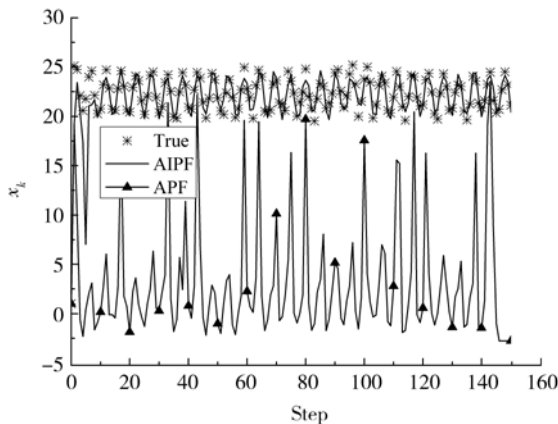


图1 APF 和 AIPF 的状态估计

Fig. 1 State estimation of APF and AIPF

图1给出其仿真结果. 从图1可以看到, AIPF得到的状态估计能够较好地跟踪真值, 减弱系统误差对滤波的影响. 图2给出了APF和AIPF的估计值与真值的误差比较, 能够明显地发现, AIPF与真值的误差较小, 主要分布0值附近, 能够满足精度要求; 而APF与真值的误差较大, 已偏离0值很远. 图1与图2说明AIPF能有效地消除未知的系统误差的影响, 提高滤波的精度, 从而实现较好地跟踪状态  $x_k$  的变化.

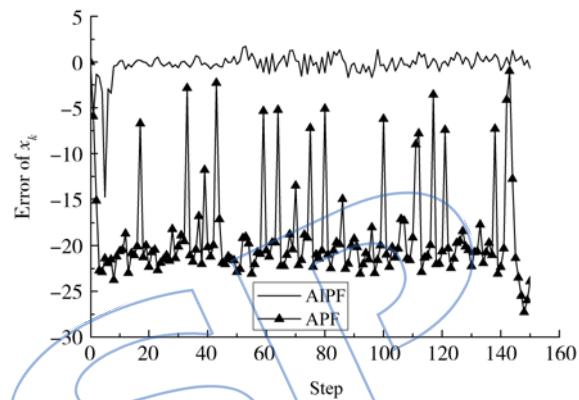


图2 APF 和 AIPF 的状态误差

Fig. 2 State error of APF and AIPF

图1和图2中, AIPF的滤波误差的均值和方差为0.7250和3.5335; APF的滤波误差的均值和方差为19.0409和18.1580. 由图1、图2可知: 量测的系统误差对自适应粒子滤波结果影响较大, 但自适应增量粒子滤波能够消除这种未知的系统误差对滤波的影响, 滤波误差的均值和方差分别降低为原来的3.8%和19.6%.

### 4 结论

1) 自适应增量粒子滤波方法可以应用在线性条件下. 与自适应粒子滤波方法相比能够消除量测方程中的系统误差, 提高滤波精度, 增强滤波鲁棒性.

2) 本文提出的两类自适应增量粒子滤波方法分别是调整似然分布和利用KLD调整粒子数目. 这两种方法都是通过增量量测方程并基于当前概率密度集中在状态空间的小范围内(即状态分布不确定性较小)时采用少量的粒子数, 反之采用较多的粒子数的思路来自适应改变粒子数, 从而对增量粒子滤波方法起到自适应作用.

3) 实际工程应用中, 自适应粒子滤波也需要根据经验确定阈值、误差限.

## 参考文献:

- [1] 朱志宇. 粒子滤波算法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 4-8, 114-125.
- [2] 付梦印, 邓志红, 闫莉萍. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2010: 185-202.
- [3] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.
- [4] Gustafsson F, Gunnarsson F, Bergman N, et al. Particle filters for positioning, navigation, and tracking [J]. IEEE Transactions Signal Processing 2002, 50(2): 425-437.
- [5] Kim J S, Serpedin E, Shin D R. Improved particle filtering-based estimation of the number of competing stations in IEEE 802. 11 networks[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 87-90.
- [6] ZHOU Jian, PEI Fujun, ZHENG Lifang, et al. Nonlinear state estimating using adaptive particle filter [C]//Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing: IEEE, 2008: 6377-6380.
- [7] 宋琛, 韩潮, 耿建中. 自适应粒子滤波在紫外导航中的应用[J]. 中国空间科学技术, 2009, 29(1): 32-39.  
SONG Chen, HAN Chao, GENG Jianzhong. Application of adaptive particle filtering in ultraviolet sensors[J]. Chinese Space Science and Technology, 2009, 29(1): 32-39. (in Chinese)
- [8] 崔平远, 孙新蕊, 裴福俊. 一种基于自适应粒子滤波的捷联初始对准方法研究[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(10): 5714-5717.  
CUI Pingyuan, SUN Xinrui, PEI Fujun. Research of initial alignment method for SINS based on adaptive particle filter[J]. Journal of System Simulation, 2008, 20(10): 5714-5717. (in Chinese)
- [9] Fox D. Adapting the sample size in particle filters through KLD-sampling[J]. International Journal of Robotics Research, 2003, 22(12): 985-1003.
- [10] 郭子伟, 缪玲娟, 赵洪松, 等. 一种改进的类高斯和粒子滤波在大失准角传递对准中的应用[J]. 航空学报, 2013, 34(1): 164-172.  
GUO Ziwei, MIAO Lingjuan, ZHAO Hongsong, et al. Application of an improved Gaussian-like sum particle filter to large misalignment transfer alignment[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(1): 164-172. (in Chinese)
- [11] 陈志敏, 薄煜明, 吴盘龙, 等. 基于自适应粒子群优化的新型粒子滤波在目标跟踪中的应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 193-200.  
CHEN Zhimin, BO Yuming, WU Panlong, et al. Novel particle filter algorithm based on adaptive particle swarm optimization and its application to radar target tracking[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 193-200. (in Chinese)
- [12] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山. 欠观测条件下的增量 Kalman 滤波方法[J]. 机械强度, 2012, 34(1): 43-47.  
FU Huimin, WU Yunzhang, LOU Taishan. Incremental Kalman filter method under poor observation condition [J]. Journal of Mechanical Strength, 2012, 34(1): 43-47. (in Chinese)
- [13] 傅惠民, 娄泰山, 吴云章. 欠观测条件下的扩展增量 Kalman 滤波方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(4): 777-781.  
FU Huimin, LOU Taishan, WU Yunzhang. Extended incremental Kalman filter method under poor observation condition[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(4): 777-781. (in Chinese)
- [14] 傅惠民, 娄泰山, 吴云章. 无迹增量滤波方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(7): 1625-1629.  
FU Huimin, LOU Taishan, WU Yunzhang. Unscented incremental filter method[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(7): 1625-1629. (in Chinese)
- [15] 傅惠民, 娄泰山, 吴云章. 增量粒子滤波方法[J]. 航空动力学报, 2013, 28(6): 1201-1207.  
FU Huimin, LOU Taishan, WU Yunzhang. Incremental particle filter method[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(6): 1201-1207. (in Chinese)