

基于泰勒展开法的转子系统动力特性区间分析方法

郝 勇^{1,2}, 陈 萌², 洪 杰¹, 马艳红¹

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;
2. 中国航空工业集团公司 沈阳发动机设计研究所, 沈阳 110015)

摘 要: 对转子系统动力特性运用一种非概率-区间分析方法进行分析. 基于区间数学和 1 阶泰勒展开理论的区间分析方法将非确定参数支承刚度和连接结构刚度视为区间向量, 运用泰勒展开法建立了转子系统固有频率的公式. 区间分析方法降低了传统的概率分析方法对不确定参数信息的过分要求, 为解决含有非确定参数的转子系统动力特性问题提供了一个途径. 应用区间泰勒展开法和概率方法对数值算例进行了分析, 并比较了结果. 当参数非确定性小于 20% 时, 计算得到的转子系统固有频率区间上下界与真实值区间上下界误差小于 2.2%. 建立了转子系统动力特性试验装置, 试验结果验证了方法的有效性.

关 键 词: 转子系统动力特性; 非确定性; 泰勒展开法; 区间分析方法; 区间向量

中图分类号: V231.96

文献标志码: A

Interval analysis method of rotordynamics based on Taylor expansion method

HAO Yong^{1,2}, CHEN Meng², HONG Jie¹, MA Yan-hong¹

(1. School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. Shenyang Engine Design and Research Institute,
Aviation Industry Corporation of China, Shenyang 110015, China)

Abstract: A non-probabilistic interval analysis method was presented to solve the rotordynamics with these uncertain parameters. Based on interval mathematics and 1st step Taylor expansion method, interval analysis method simplified the uncertain parameters such as support stiffness and connecting structure stiffness to interval vectors. The formula of rotor natural frequencies using interval Taylor expansion analysis method was formulated and compared with the probabilistic method. The proposed method can be used to estimate the intervals of rotordynamics requiring the intervals of uncertainties only, so it can be used to solve rotordynamics problems with uncertainties. A numerical example of comparison between Taylor expansion method and probabilistic method was given. The natural frequency regions yielded by interval Taylor expansion method are very close to the accurate ones, and the separation margin is less than 2.2% as the deviation coefficient β is taken as 20%. A rotordynamic test rig was set up and the test result demonstrates the efficiency of interval analysis method.

Key words: rotordynamics characteristic; uncertainty; Taylor expansion method;

interval analysis method; interval vector

在航空发动机设计中转子系统动力特性分析占有十分重要的地位. 在传统的航空发动机结构设计准则中, 结构的物理模型和数学计算模型均为确定性模型, 在评价准则中, 采用规定安全裕度的方法来考虑结构和环境的非确定性因素的影响. 传统的计算分析只是针对发动机进行了转子系统动力特性的确定性研究, 没有考虑转子系统动力特性的个体差异和发动机工作状态变化、装配工艺不同对动力学特征参数, 乃至对转子系统动力特性的影响, 这样对某些发动机设计安全裕度可能过大, 形成浪费, 而对其他发动机安全裕度则可能过小, 又会影响使用安全. 因此, 迫切需要进行航空发动机转子系统动力特性的非不确定性分析. 在航空发动机的非不确定性中, 航空发动机典型动力学特征参数: 转子支承刚度和连接结构刚度, 对转子系统动力特性具有显著影响.

如图 1 所示, 航空发动机转子支承刚度由支承结构刚度 K_{str} 、油膜刚度 K_{sfd} 以及轴承刚度 K_{br} 3 部分组成^[1-4].

由于受加工、装配工艺的非不确定性及工作状态变化的影响, 支承结构刚度 K_{str} 、油膜刚度 K_{sfd} 以及轴承刚度 K_{br} 均是非确定的, 由此带来转子系统支承刚度也是非确定的.

在航空发动机转子系统中, 由于结构设计要求 and 材料的不同, 连接结构是必须存在的. 如图 2 所示为航空发动机高低压转子连接结构示意图, 图中广泛使用了套齿连接及螺栓连接结构. 转子

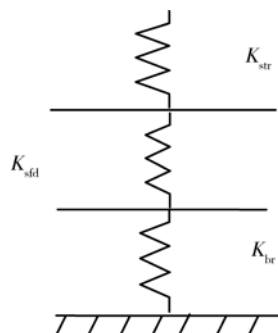


图 1 转子支承刚度示意图

Fig. 1 Sketch map of support stiffness of rotor

连接结构刚度主要对弯曲型模态影响较大.

已有研究表明, 载荷参数和装配工艺参数对连接结构刚度具有显著影响, 由于载荷参数和装配工艺参数均具有区间分布特征, 因此连接结构刚度也将具有非确定区间分布特征^[5-6].

概率方法(随机方法)、模糊方法和区间分析方法是目前研究非不确定性问题的 3 种主要方法^[7-12]. 当知道非不确定性参数的概率分布特征时, 概率方法结果较为准确; 当知道参数的隶属函数时, 模糊方法能够得到较好的应用; 区间分析方法将非不确定性变量视为“未知然而有界”变量, 当由于结构参数的样本较少, 无法得到参数概率分布或隶属函数时, 区间分析方法结果将更符合客观实际.

目前, 针对转子系统动力特性非不确定性的研

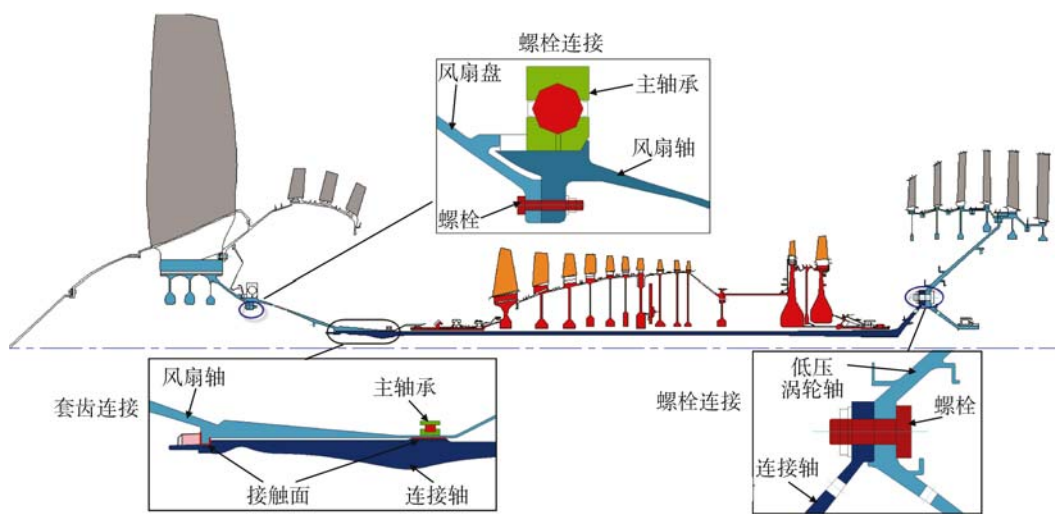


图 2 航空发动机转子连接结构示意图

Fig. 2 Sketch map of joint structures of aero-engine rotor

究主要集中在转子系统动力特性的概率非确定性上^[13-14].针对转子系统动力特性的区间分析方法的研究仍然处于探索阶段,笔者已基于摄动理论研究了转子系统动力特性的区间分析方法^[15].本文基于区间数学和1阶泰勒展开理论,建立了转子系统固有频率区间分析方法,分析比较了本文建立的区间泰勒展开法、概率摄动方法和组合法结果.建立了转子系统动力特性试验装置,以验证区间分析方法的有效性.

1 数值仿真方法

1.1 区间泰勒展开法

转子系统动力特性分析可归结为求解振动微分方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = 0 \quad (1)$$

式中 $\mathbf{M} = (m_{ij})$ 为正定质量矩阵, $\mathbf{C} = (c_{ij})$ 为半正定的阻尼矩阵, $\mathbf{G} = (g_{ij})$ 为反对称陀螺矩阵, $\mathbf{K} = (k_{ij})$ 为半正定刚度矩阵.

根据非确定性参数的中心表示法

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}^c + \delta\mathbf{a} & |\delta\mathbf{a}| \leq \Delta\mathbf{a} \\ a_i = a_i^c + \delta a_i & |\delta a_i| \leq \Delta a_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

式中 $\mathbf{a}^c$ 即参数 $\mathbf{a}$ 的中值.

将结构的特征值 λ_j 在非确定量的中值 $\mathbf{a}^c = (a_i^c)$ 附近进行1阶泰勒展开,仅保留一次项,得

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda_j(\mathbf{a}^c + \delta\mathbf{a}) = \\ &\lambda_j(\mathbf{a}^c) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda_j(\mathbf{a}^c)}{\partial a_i} \delta a_i \\ i &= 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \underline{\alpha} &\leq \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

利用区间数学中的区间扩张,由上式可得到转子系统特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_j^i &= \lambda_j(\mathbf{a}^c + \delta\mathbf{a}) = \\ &\lambda_j(\mathbf{a}^c) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda_j(\mathbf{a}^c)}{\partial a_i} \Delta a_i \end{aligned} \quad (4)$$

经过区间运算和区间相等的充要条件,从式(4)可得特征值的区间上界 $\bar{\lambda}_j$; 和下界 $\underline{\lambda}_j$ 分别为

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j(\mathbf{a}^c) + \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \lambda_j(\mathbf{a}^c)}{\partial a_i} \right| \Delta a_i \quad (5)$$

$$\underline{\lambda}_j = \lambda_j(\mathbf{a}^c) - \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \lambda_j(\mathbf{a}^c)}{\partial a_i} \right| \Delta a_i \quad (6)$$

设 $\mathbf{u}_j$ 是特征值 λ_j 的右特征向量, $\mathbf{v}_j^T$ 是特征值 λ_j 的左特征向量,则它们满足方程

$$\mathbf{D}\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{D}^T = \lambda_j \mathbf{v}_j^T \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_j = 1 \quad (9)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{M}^{-1})\mathbf{G} & -(\mathbf{M}^{-1})\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

式(7)的两端对参数 a_i 求1阶导数,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}(a)}{\partial a_i} \mathbf{u}_j + \mathbf{D}(a) \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial a_i} = \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_i} \mathbf{u}_j + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial a_i} \end{aligned} \quad (10)$$

$\mathbf{u}_j^T$ 左乘式(10)两端并利用式(9),从式(10)整理得

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_i} = \mathbf{u}_j^T \frac{\partial \mathbf{D}(a)}{\partial a_i} \mathbf{u}_j \quad (11)$$

将 $\mathbf{a}^c = (a_i^c)$ 代入式(11),得

$$\frac{\partial \lambda_j^c}{\partial a_i^c} = \mathbf{u}_{jc}^T \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{a}^c)}{\partial a_i^c} \mathbf{u}_{jc}^c \quad (12)$$

令

$$\Delta \lambda_j = \sum_{i=1}^m \left| \mathbf{u}_{jc}^T \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{a}^c)}{\partial a_i^c} \mathbf{u}_{jc}^c \right| \Delta a_i \quad (13)$$

则式(5)和式(6)可简化为

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_j &= \lambda_j(\mathbf{a}^c) + \Delta \lambda_j \\ \underline{\lambda}_j &= \lambda_j(\mathbf{a}^c) - \Delta \lambda_j \end{aligned} \quad (14)$$

这样,转子系统特征值为

$$\lambda_j^i = [\underline{\lambda}_j, \bar{\lambda}_j] \quad (15)$$

根据式(15),可得转子系统固有频率所在的区间为

$$f_j^i = [f_{cj} - \Delta f_j, f_{cj} + \Delta f_j] \quad (16)$$

式中

$$f_{cj} = \frac{\lambda_{cj}}{2\pi} \quad \Delta f_j = \frac{\Delta \lambda_j}{2\pi}$$

其中 λ_{cj} 为区间变量 λ_j 的中值.

1.2 概率摄动方法

为了便于和区间分析方法进行比较,用概率方法表示不确定量时,将不确定结构参数向量 $\mathbf{a} = (a_i)$ 处理成随机变量,因而结构特征值(固有频率)也是随机的.根据均值计算的性质得到特征值的均值 $\lambda_{j0} = E(\lambda_j)$,第 i 阶特征值可表示为

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda_{j0} + \Delta \lambda_j = \\ &\lambda_{j0} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda_j(\mathbf{a}^c)}{\partial a_i} \delta a_i \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\mathbf{a}^c$ 为 $\mathbf{a}$ 的均值.

将 λ_j 在 $\mathbf{a}^c$ 附近1阶泰勒级数展开并结合方差计算的性质,略去高阶小量,整理可得

$$\text{Var}[\lambda_j(\mathbf{a})] =$$

$$E[(\Delta \lambda_j)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_i} \delta a_i\right)^2\right] =$$

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} \right]^2 \text{Var}(a_i) \quad (18)$$

相应的标准方差为

$$\sigma[\lambda_j(a)] = \sqrt{\text{Var}[\lambda_j(a)]} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} \right]^2 \text{Var}(a_i)} \quad (19)$$

通过式(17)和式(18)可以得到特征值距离其均值 k 倍标准方差的区间为

$$\lambda_j^* = [\underline{\lambda}_j^*(a), \bar{\lambda}_j^*(a)] = [\lambda_{j0} - k\sigma(\lambda_j(a)), \lambda_{j0} + k\sigma(\lambda_j(a))] \quad (20)$$

因而由概率分析方法求得的动力响应的上界和下界分别为

$$\bar{\lambda}_j^*(a) = \lambda_j(a^e) + k \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} \sigma(a_i) \right]^2} \quad (21)$$

$$\underline{\lambda}_j^*(a) = \lambda_j(a^e) - k \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} \sigma(a_i) \right]^2} \quad (22)$$

1.3 两种方法比较分析

取 $\Delta a_i = k\sigma(a_i)$, 根据式(14), 可得区间分析方法解得的响应的上界、下界分别为

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j(a^e) + \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} \right| k\sigma(a_i) \quad (23)$$

$$\underline{\lambda}_j = \lambda_j(a^e) - \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} \right| k\sigma(a_i) \quad (24)$$

此时非确定性参数 a 的取值区间为 $a^i = [a, \bar{a}] = [a^e - k\sigma(a), a^e + k\sigma(a)]$. 不确定结构参数向量 a 的均值 $a^e \in a^e$, 由于

$$\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} \right| k\sigma(a_i) \geq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \lambda_j(a^e)}{\partial a_i} k\sigma(a_i) \right]^2} \quad (25)$$

所以由式(21)~式(24)可得

$$\underline{\lambda}_j \leq \underline{\lambda}_j^* \quad \bar{\lambda}_j^* \leq \bar{\lambda}_j \quad (26)$$

式(26)说明当 $a^e = a^e$ 时, 由区间分析方法得到的转子系统特征值集合包含概率摄动法的解集合.

2 算例分析

选用文献[15]中的单盘非对称转子模型, 如图3所示, 转子系统参数为: 盘质量为 20 kg, 转动惯量为 144 000 kg·mm², 轴长为 750 mm, 直径为 60 mm, $L_1 = 100$ mm, $L_2 = L_3 = 150$ mm, 设 2 支点支承刚度 K_2 , 弹性模量 E 和密度 ρ 是区间参数,

取 $K_2 = [K_2^e - \beta K_2^e, K_2^e + \beta K_2^e]$, $\rho = [\rho^e - \beta \rho^e, \rho^e + \beta \rho^e]$, $E = [E^e - \beta E^e, E^e + \beta E^e]$, 其中 $K_2^e = 3.0 \times 10^3$ N/mm, $\rho^e = 7.8 \times 10^{-6}$ kg/mm³, $E^e = 200$ GPa, 1 支点支承刚度 $K_1 = 1.0 \times 10^5$ N/mm.

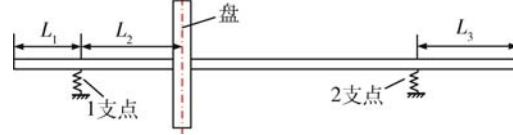


图3 单盘非对称转子模型

Fig. 3 Model of single-disk asymmetric rotor

取非确定性系数 $\beta = 0.05$, 应用本文方法进行转子系统固有频率的区间分析, 前 3 阶固有频率区间结果如表 1 所示, 表 1 中频率序号 1, 3, 5 为反进动频率, 2, 4, 6 为正进动频率. 图 4 给出了 1, 2, 3 阶模态振型.

表 1 不同方法分析得到的转子固有频率区间
Table 1 Nature frequency intervals calculated with different methods

频率序号	f_i^e	固有频率/Hz					
		区间泰勒展开法		组合法		概率摄动法	
		f_i^{Tay}	f_i^{Tay}	f_i^a	f_i^s	f_i^{pro}	f_i^{pro}
1	93.7	89.0	98.3	89.7	97.8	90.5	96.8
2	99.6	96.1	103.2	95.4	103.9	96.3	103.2
3	251.1	242.9	259.2	242.8	259.5	245.5	256.7
4	251.2	243.1	259.3	243.0	259.5	245.8	256.9
5	582.0	567.2	596.7	567.0	597.4	571.4	592.5
6	644.8	628.0	661.7	627.8	662.7	632.0	657.6

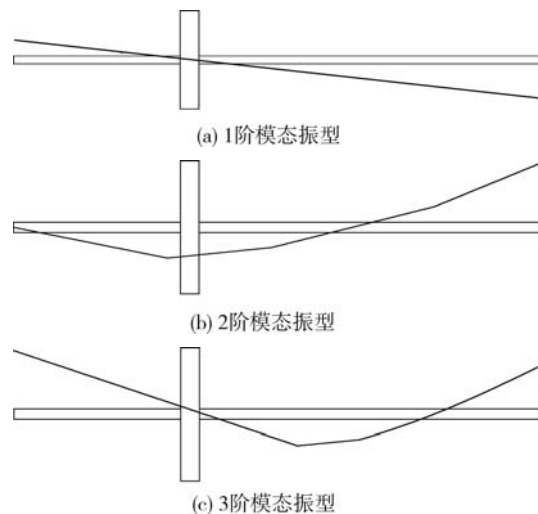


图4 转子系统模态振型

Fig. 4 Vibration mode shapes of rotor system

从表1中可以看出本文建立的区间泰勒展开法计算得到的转子系统固有频率区间上下界与真实值区间上下界误差非常小,小于2%。图5中列出了随着非确定系数 β 的变化,区间泰勒展开法求得的转子系统前3阶正进动固有频率区间上下界曲线、真实值曲线以及概率方法曲线之间的对比。

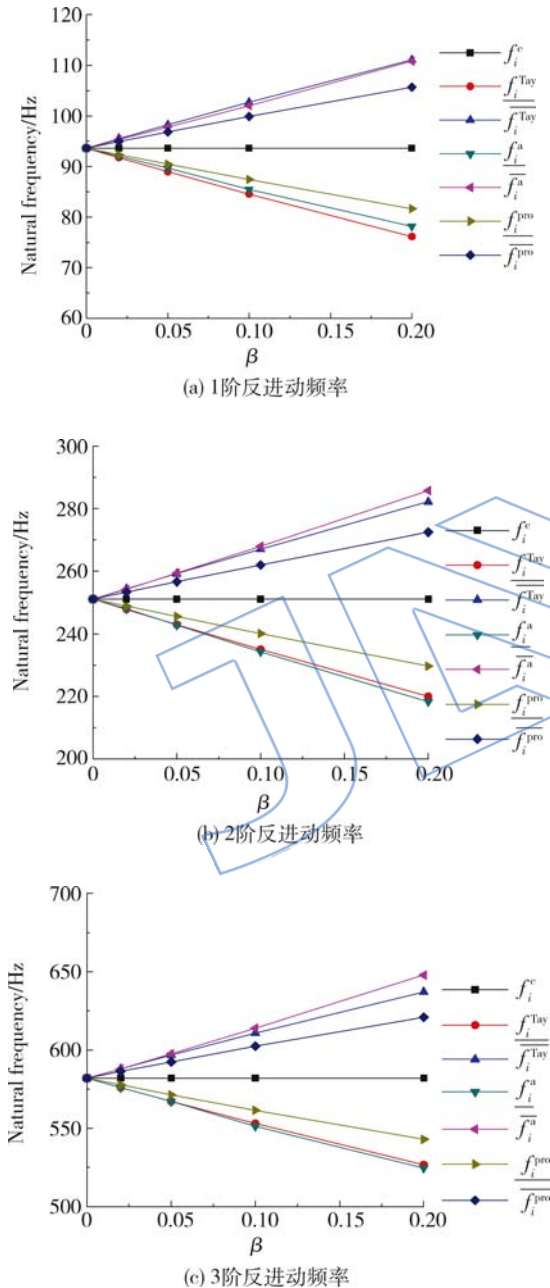


图5 转子系统固有频率随 β 的变化曲线

(区间泰勒展开法、精确解、概率方法结果)

Fig. 5 Bound curves of natural frequencies of rotor system vary with β (interval Taylor expansion method, probabilistic method and actual solution)

从表1和图5中可以得出如下结论:

1) 当非确定系数 β 小于等于0.05时,运用本文方法计算得到的转子系统固有频率区间基本等于真实值区间,随着 β 升至0.2,误差逐渐增大,但不超过2.2%。这有效地证明了本文区间分析方法的正确性和计算精度均能满足工程需求。

2) 本文的区间泰勒展开法得到的具有不确定参数转子系统固有频率结果区间略大于概率分析方法所得结果。这也证明本文的理论,即式(26)的正确性。

3) 相对于概率分析方法,本文基于泰勒展开法的区间分析方法虽然趋于保守,但结果更加接近真实值,结果可靠性更高。

3 试验验证

转子系统动力特性试验台如图6所示,试验转子通过花键联轴器与防过载小轴输出端连接,传递扭矩。一端刚性支承,一端为弹性支承,弹性支承的刚度区间为 $[810, 980]$ N/mm。试验器框架如图7所示。

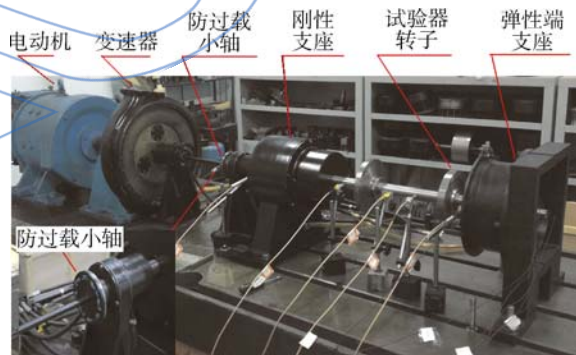


图6 转子系统动力特性试验器

Fig. 6 Test rig of rotordynamics

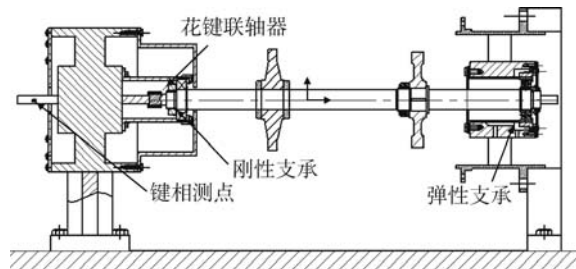


图7 试验器总体框架示意图

Fig. 7 Sketch map of frame work of test rig

转子系统1阶临界转速振型仿真与试验结果对比如图8所示。从图8中可以看出:转子系统1

阶临界转速为俯仰模态, 仿真结果和试验结果具有非常好的一致性. 计算得到转子系统 1 阶临界转速真实结果与实测结果对比如表 2 所示.

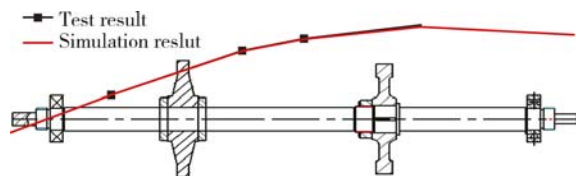


图 8 转子系统 1 阶临界转速振型仿真与试验结果对比

Fig. 8 Comparison of test and simulation result of rotor 1st step critical speed vibration mode shape

表 2 转子 1 阶临界转速试验与仿真分析结果对比
Table 2 Comparison of test and simulation result of rotor 1st step critical speed

	临界转速下界		临界转速上界	
	转速/ (r/min)	频率/ Hz	转速/ (r/min)	频率/ Hz
仿真分析结果	3810	63.5	4176	69.6
试验结果	3847	64.1	4248	70.8
误差/%	0.96		1.7	
确定性方法误差/%			0~10.3	

从表 2 可以看出, 仿真分析得到的临界转速区间和试验结果具有较好的一致性, 误差小于 1.7%, 验证了本文区间分析方法的有效性.

4 结 论

本文结合区间数学、泰勒展开理论和转子动力学, 提出了一种求解转子系统固有频率区间的泰勒展开法. 当无法确定非确定参数的概率分布特征, 而只知道参数的变化区间时, 该方法能够发挥优势. 跟有限元法结合后该方法可应用于复杂转子系统, 符合转子系统动力特性计算的工程需求. 建立了相关试验装置, 仿真分析得到的临界转速区间和试验结果具有较好的一致性, 误差小于 1.7%, 试验结果验证了区间分析方法的有效性和可行性.

参考文献:

[1] HONG Jie, CHEN Meng, LIU Shuguo. Application of whole engine finite element models in aero-engine rotordynamic simulation analysis[C]//Proceedings of ASME Tur-

bo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air. Montréal, Canada: ASME, 2007: 771-778.

- [2] Moore J J, Vannini G, Camatti M, et al. Rotordynamic analysis of a large industrial turbo-compressor including finite element substructure modeling[C]//Proceedings of ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air. Barcelona: ASME, 2006: 1233-1243.
- [3] Shinozaki M, Funatogawa O, Kobayashi M. Study of stator structure modeling for rotor dynamic analysis[C]//Proceedings of ASME Turbo Expo 2001: Power for Land, Sea and Air. New Orleans, Louisiana, USA: ASME, 2001: 4-7.
- [4] Cavalca K L, Cavalcante P F, Okabe E P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2005, 19(1): 157-174.
- [5] LIU Shuguo, WANG jun, HONG Jie, et al. Dynamics design of the aero-engine rotor joint structures based on experimental and numerical study[C]//Proceedings of ASME Turbo Expo 2010: Power for Land, Sea and Air. Glasgow, Scotland: ASME, 2010: 49-60.
- [6] 李俊慧. 航空发动机转子连接结构动力学设计方法研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2009.
- LI Junhui. A study on dynamics design method and test of aero-engine rotor joint structures[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2009. (in Chinese)
- [7] 李剑中, 杨秀宽, 黄洪钟, 等. 单圆盘转子系统模糊动力可靠性设计研究[J]. 大连理工大学学报, 2003, 43(6): 768-770.
- LI Jianzhong, YANG Xiukuan, HUANG Hongzhong, et al. Research on fuzzy dynamic reliability design of single-rotor system[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2003, 43(6): 768-770. (in Chinese)
- [8] QIU Yazhao, Singiresu S R. A fuzzy approach for the analysis of unbalanced nonlinear rotor systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 284(1/2): 299-323.
- [9] YAO Hongliang, HAN Qingkai, WEN Bangchun. The application of fuzzy random finite element method on rotor dynamics[C]//The 8th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics. Seoul, Korea: IFToMM, 2010: 103-107.
- [10] 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [11] QIU Zhiping, WANG Xiaojun. Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using non-probabilistic interval analysis method and probabilistic approach[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(20): 5423-5439.
- [12] Stewart M W. Anti-optimization of uncertain structures using interval analysis[J]. Computers and Structures, 2001, 79(4): 421-430.
- [13] 苏长青, 张义民, 吕春梅, 等. 转子系统振动的频率可靠性灵敏度分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(1): 56-59.

- SU Changqing, ZHANG Yimin, LÜ Chunmei, et al. Natural frequency reliability sensitivity analysis of a rotor system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(1): 56-59. (in Chinese)
- [14] 张功学, 朱均, 徐华, 等. 单圆盘转子系统动力可靠性理论研究[J]. 机械科学与技术, 2001, 20(1): 1-3.
- ZHANG Gongxue, ZHU Jun, XU Hua, et al. Theoretical research on dynamic reliability of single rotor system[J]. Mechanical Science and Technology, 2001, 20(1): 1-3. (in Chinese)
- [15] 王军, 洪杰, 陈萌, 等. 航空发动机转子系统动力特性的非概率分析[J]. 航空动力学报, 2012, 27(1): 75-81.
- WANG Jun, HONG Jie, CHEN Meng, et al. Non-probabilistic analysis on aero-engine rotordynamics[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(1): 75-81. (in Chinese)

JALSP