

文章编号:1000-8055(2013)11-2609-06

改进的弹簧比拟非结构化网格优化方法

王广兴, 岳 明

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 提出了改进的弹簧比拟非结构化网格优化方法. 分别从网格的稀疏和单元质量两个方面对非结构化网格进行优化. 首先采用非等刚度弹簧, 实现了弹簧比拟方法对网格疏密的控制; 其次, 分别采用修正刚度系数的顶点弹簧模型和修正初始平衡长度的棱边弹簧模型, 改善了原弹簧比拟光滑算法中存在的局部网格单元过渡不够平滑的问题. 该方法保留了原弹簧比拟法易于实现、数据结构简单的优点, 提高了原算法对网格优化能力, 算例中最短边与最长边之比从 0.24 提高到了 0.42 (越接近 1 越好), 且对于存在交错单元的初始网格也能优化.

关 键 词: 弹簧比拟; 网格光滑性; 修正项; 初始平衡长度; 加密

中图分类号: V21; O35

文献标志码: A

Improved unstructured grid optimization method based on spring analogy

WANG Guang-xing, YUE Ming

(School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: An improved spring analogy method for unstructured grid optimization was presented. The method can control the cell density of grid and improve the quality of cells. Non-uniform stiffness spring was used to adjust the cell density of grid in spring analogy method; vertex spring model with revised stiffness and segment spring model with changeable initial balance length were adopted to overcome the drawback of original spring analogy smoothing algorithm, which may lead to local non-smoothness in the grid. The method has kept advantages of original method, such as easy implementation, simple data structure, improved ability of optimization, so the ratio of minimum length to maximum length was updated from 0.24 to 0.42 (closer to 1 is better) in the example hereto, helping to optimize the tangled grids also.

Key words: spring analogy; grid smoothness; revised items; initial balance lengths; refinement

网格生成在各类数值模拟方法(如计算流体力学)中有着举足轻重的地位, 数值计算的收敛性和精度都和网格的质量直接相关. 为了提高网格的质量, 人们发展了许多独立于具体网格生成的网格优化方法. 其中, 应用最广的是基于弹簧比拟思想所提出的网格优化方法. 这种方法作为网格

优化的有效手段, 已被广泛地应用于各种网格生成方法中.

弹簧比拟思想最初是由 Gnoffo^[1] 提出来的, 但他的工作是对结构化网格做出的. 针对非结构化网格的弹簧比拟法, 最早由 Batina^[2] 在求解动边界问题时, 为避免节点重合而提出的, 其弹簧刚

收稿日期: 2012-10-19

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20131105.1002.027.html>

基金项目: “凡舟”青年科研基金(20060405)

作者简介: 王广兴(1986—), 男, 河北衡水人, 硕士生, 主要从事计算流体力学、非结构网格优化方面的研究.

度与两节点距离成反比. 真正将弹簧比拟用于网格优化要到 20 世纪 90 年代中期, 具有代表性的有 Richter 和 Leyland^[3] 对网格自适应后的网格进行优化, 以及 Weatherhill 等^[4] 人对生成的非结构化网格进行优化.

相比于其他的一些优化方法, 例如: 微分方程法^[5] 或者基于优化的光顺^[6], 弹簧比拟法原理简单, 实现方便, 计算速度快. 因此, 近年来依然被应用于各种网格生成算法中, 用来对初始网格进行优化. 例如: 在泡泡堆砌法^[7-8] 中用来对泡泡堆砌生成的初始网格进行优化; 或者在依据流场尺度生成网格后进行优化^[9].

不过, 传统的弹簧比拟法也有一些缺点. 首先, 其本身缺乏对网格疏密的调整手段(需要采取其他手段); 其次, 当初始网格质量较差, 会出现网格单元局部过渡不均匀的情况^[10]; 此外, 对于凹区域, 光顺效果也不太理想^[11].

为此, 本文提出了一种改进的弹簧比拟法, 不仅可以实现对网格疏密的调整, 也能获得更均匀的网格疏密过渡. 此方法对于质量很差的初始网格以及凹区域, 都能得到质量较好的最终网格.

1 弹簧比拟法基本思想

本文基于弹簧比拟法做了进一步的改进, 下面将弹簧比拟法的基本思想做一个简单的概述.

弹簧比拟法的基本思想是将网格节点与节点之间的连线看作弹簧, 通过弹簧变形产生弹性力移动节点位置, 从而实现对网格质量的优化.

弹簧比拟法中有两种弹簧模型^[12], 一种是顶点弹簧, 这种弹簧在无弹性变形的情形下, 弹簧的长度为 0; 另一种是棱边弹簧, 其无弹性变形时有一个初始长度 l_0 , 这两种弹簧产生的弹性力遵循胡克定律.

1.1 网格节点的所受合力

对于节点 i , 将与其相连的所有节点 $j(x_j, y_j, z_j)$ 围成的区域看做一个小单元体. 如图 1 所示.

令 i 点与 j 点之间的距离为 l_{ij} , i 点与 j 点间弹簧的弹性变形为 Δl_{ij} , 则对于顶点弹簧 $\Delta l_{ij} = l$, 对于棱边弹簧 $\Delta l_{ij} = l - l_0$, l_0 为棱边弹簧无弹性变形时的初始长度.

节点 i 所受力为节点 i 与所有节点 j 之间弹性力的合力 $f_i(t)$

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^n k_{ij} \times \Delta l_{ij} \quad (1)$$

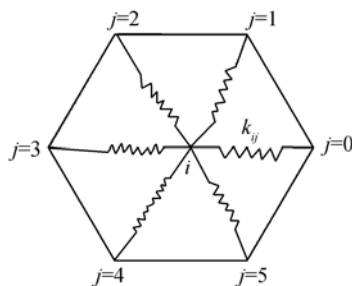


图 1 网格小单元体示意图

Fig. 1 Sketch map of grid cell

式中 k_{ij} 为节点 i 与节点 j 之间的弹簧刚度系数, n 为与 i 相邻的节点总数.

1.2 节点平衡位置的求解

节点合力求出之后, 需要求出节点的平衡位置. 本文采用类似文献^[7-8] 中的做法, 将节点看成一个有质量、无大小的质点. 质点在合力的作用下作有阻尼的往复运动, 质点停止的位置即为节点的平衡位置.

于是, 可以为每个节点建立运动微分方程. 对于节点 i (非边界点), 其小单元体区域内的运动微分方程可写为

$$m_i \frac{d^2 s_i(t)}{dt^2} + c_i \frac{ds_i(t)}{dt} = f_i(t) \quad (2)$$

式中 m_i 为节点 i 的虚拟质量; c_i 为节点 i 的阻尼系数; s_i 为节点 i 的位移; $f_i(t)$ 为节点 i 受周围临近节点 j 的合力.

上述微分方程采用 4 阶 Runge-Kutta 法^[13] 求解.

2 网格疏密控制及优化

2.1 网格疏密控制思想

在弹簧比拟法中, 各节点直接以虚拟弹簧相连, 要实现对网格的疏密控制, 一个自然的想法就是根据网格疏密的要求采用不同的弹簧刚度系数, 弹簧的刚度系数由分布函数或背景网格^[14] 给出. 弹簧的刚度系数大, 则网格密; 弹簧的刚度系数小, 则网格疏; 大、小网格之间的弹簧刚度系数则保持平滑过渡. 这样, 只要弹簧的刚度系数选取适当, 理论上就可以同时实现网格疏密控制和网格质量的优化.

本方法的主要步骤如下:

1) 给出空间弹簧刚度系数分布函数, 设定迭代步数.

2) 对网格进行 Delaunay 三角形优化.

3) 用弹簧比拟法对网格加密及光顺.

4) 判断是否达到迭代步数, 否, 重复步骤 2) 和 3); 是, 程序终止.

2.2 局部不均匀问题的原因分析

如前文所述, 采用弹簧比拟法光顺网格时可能会产生局部过渡不均匀的情况. 当采用非等刚度系数弹簧时, 这个问题会变得更加严重. 为此, 需要对上述方法做进一步的改进.

首先分析上述问题产生的原因. 为了简便起见, 这里选取等刚度弹簧实例进行分析. 如图 2 所示, 设边 02 与 03 均为单位长度 1, 之间夹角为 64° , 边 05 垂直于边 04, 长度为 02 边长度的 1.7 倍, 边 01 与边 04 长度相同且在一直线上. 通过受力分析, 可知此时点 0 处于力平衡状态, 但此区域的 5 个三角形的大小却有较大的差异. 事实上, 点 1, 4 可以无限延伸, 而仍保持点 0 所受合力为零. 正是类似情况的出现, 导致了网格局部的均匀度变差.

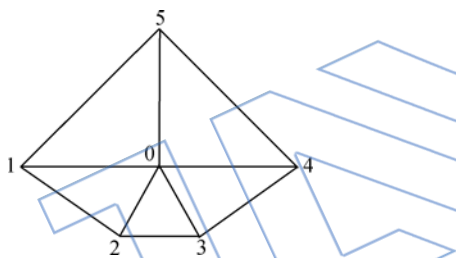


图 2 网格局部光顺性差的分析图

Fig. 2 Analysis map of local poor smoothness of grid

2.3 弹簧比拟方法的改进

针对上述问题, 为进一步提高网格光顺的效果, 本文提出了两种改进的方法.

2.3.1 顶点弹簧模型的改进

在原来的弹簧刚度系数里面加入修正项 k_v , 于是所得新的弹簧刚度系数为

$$k_{\text{new}} = k_{\text{old}} + k_v \quad (3)$$

式中 k_{old} 为两相邻节点之间原来的弹簧刚度系数.

修正项 k_v 的取值应保证三角形边长较短的刚度系数较小, 进而被周围较长弹簧拉伸, 减小它们之间边长差, 提高均匀度. 为此构造了 k_v 的函数

$$k_v = \alpha \left(\frac{l_{ij}}{L_{\max}} \right)^\beta \quad (4)$$

式中 α 为系数项; l_{ij} 为两相邻节点间距离, $L_{\max}$ 为边界最大长度, $\frac{l_{ij}}{L_{\max}} \in (0, 1)$; β 为指数. k_v 和

k_{old} 的相对大小会影响光顺效果.

2.3.2 棱边弹簧模型的改进

另一种方法则是采用棱边弹簧的思想. 在网格光顺时不改变原来弹簧的刚度系数, 而只是通过改变弹簧的初始平衡长度, 从而打破之前的力学平衡, 达到移动节点优化网格的目的. 比如图 2 所示的小单元体中初始长度 l_0 应选为边 02 长度, 然后对中心节点建立牛顿运动微分方程, 此时水平方向所受合力仍为零, 但边 02 与边 03 长度小于边 05, 竖直方向所受合力不为零, 节点 0 必在合力作用下向上运动才能重新建立一个力学平衡, 这样就减小了相邻节点之间网格步长的差距, 从而达到了光顺网格的目的.

$$k_{\text{new}} = k_{\text{old}} \quad (5)$$

$$l_0 = \min(l_{ij}) \quad (6)$$

式中 l_{ij} 为小单元体中节点 i 与节点 j 之间的距离 (见图 1), 弹簧初始长度 l_0 为每次迭代过程中各个小单元体中 l_{ij} 长度的最小值.

2.4 算例及分析

2.4.1 网格光顺化结果及分析

为了方便对比分析, 本文选取了一个简单的方形计算域作为算例, 进行网格优化效果的对比分析.

图 3 为一个边长为 1 的正方形二维平面, 采用随机布点算法在此正方形分布 400 个点生成初始网格. 图 4~图 6 为用等刚度弹簧模型、改进的棱边弹簧模型和改进的顶点弹簧模型的光顺网格.

统计上述 4 个图形的网格数据, 表 1 和表 2 中序号 1~4 分别表示图 3~图 6 的相关统计数

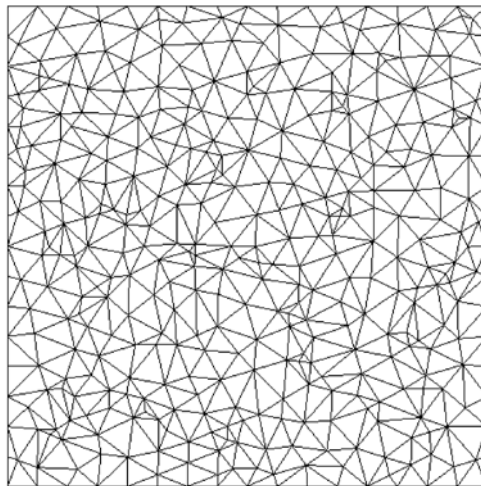


图 3 初始网格

Fig. 3 Initial grid

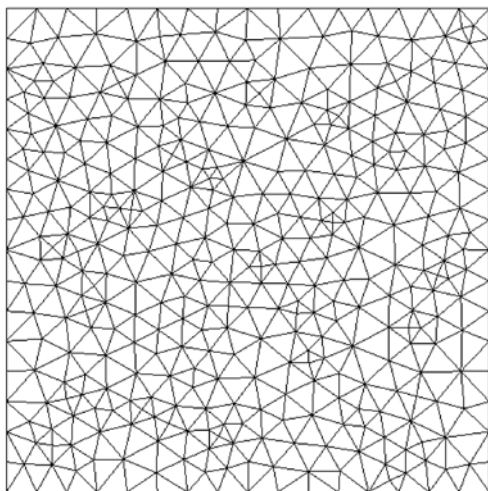


图4 等刚度弹簧模型光顺网格

Fig. 4 Smoothed grid by equal stiffness spring model

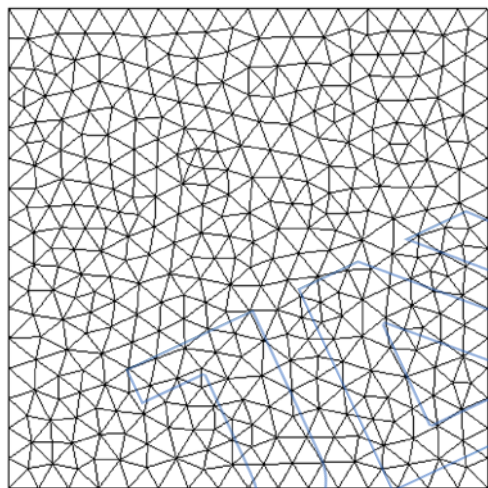


图5 改进的棱边弹簧模型光顺网格

Fig. 5 Smoothed grid by improved segment spring model

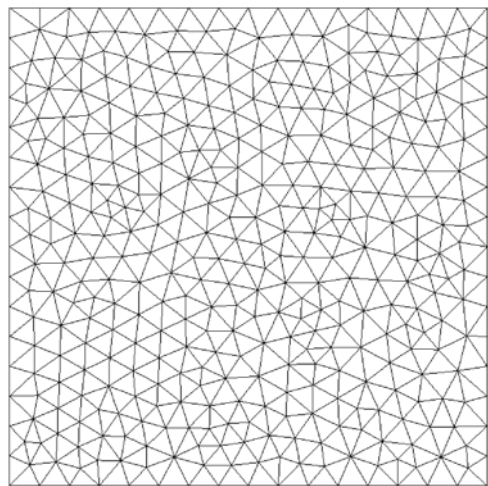


图6 改进的顶点弹簧模型光顺网格

Fig. 6 Smoothed grid by improved vertex spring model

据. 这里采用偏斜度即三角形外接圆与内接圆半径之比作为衡量三角形网格接近正三角形的程度, 正三角形偏斜度为2, 用三角形边长作为衡量光顺性的指标.

表1 偏斜度统计数据

Table 1 Statistic data of degree of skewness

序号	最大偏斜度	平均偏斜度	偏斜度方均根
1	22.670	3.851	2.0080
2	4.148	2.150	0.2346
3	5.758	2.527	1.4060
4	5.568	2.418	1.2550

表2 边长统计数据

Table 2 Statistic data of length of side

序号	最短边与最长边之比	边长方均根	平均网格长度
1	0.1275	0.0149	0.0583
2	0.2364	0.0092	0.0560
3	0.3616	0.0074	0.0574
4	0.4154	0.0070	0.0563

从图3~图6可以看出, 在运用了等刚度弹簧模型优化网格之后网格的偏斜度基本都在2.5之内, 三角形的质量很高, 但是从图中以及表中数据可以看出网格的光顺性局部仍然较差, 最短边与最长边相差较大; 改进的棱边弹簧模型和顶点弹簧模型都使网格的光顺性得到了提高, 虽然三角形网格偏斜度有所增加, 但是三角形网格最大偏斜度都小于非结构化网格允许偏斜度^[15], 两种改进的弹簧模型从数据来看优化效果相差不大, 不过改进的顶点弹簧模型必须选取合适的修正项系数才能得到较理想的结果.

这里做了一系列关于改进的顶点弹簧模型中修正项系数影响的实验.

分别固定 k_{old} , α , β 三个参数中的两个, 剩余另一个参数取一系列值, 观察生成的网格和数据统计, 其结果如下: β 在 $[1, 2]$ 范围内, 优化效果较为理想, 为减小计算量一般取 $\beta = 1$ 即可; α 的选取大致应保证 $k_v/k_{old} > 5$ 才可以取得一个比较理想的优化效果, 随着这个比值的增大, 网格的优化效果没有太大变化.

2.4.2 网格加密和光顺结果及分析

这里将利用不同刚度系数的顶点弹簧模型加

密网格,再分别利用顶点弹簧模型和棱边弹簧模型消除局部过渡不光滑区域,应用于翼型网格的加密实例如图 7~图 9 所示。

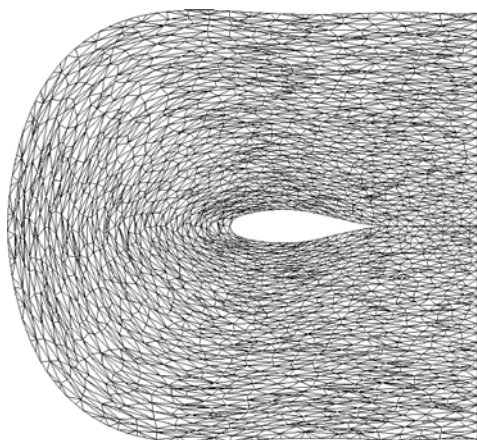


图 7 初始翼型网格

Fig. 7 Initial wing-shaped grid

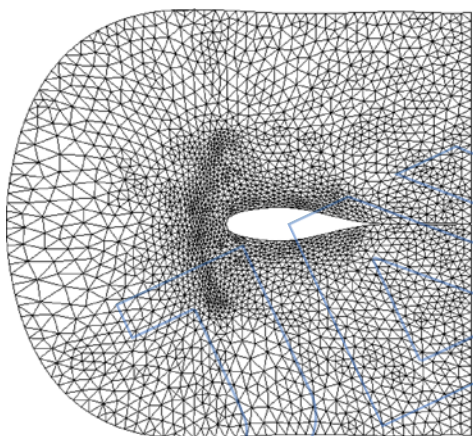


图 8 改进的顶点弹簧模型加密翼型网格

Fig. 8 Refined wing-shaped grid by improved vertex spring model

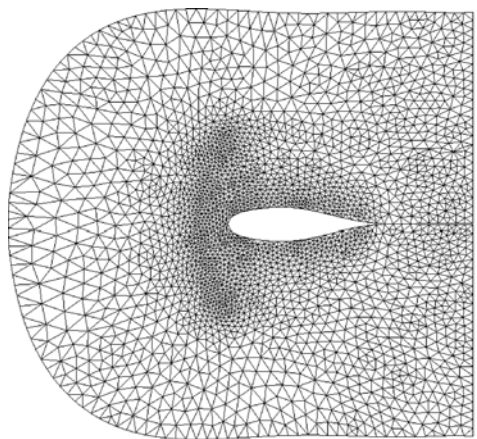


图 9 改进的棱边弹簧模型加密翼型网格

Fig. 9 Refined wing-shaped grid by improved segment spring model

图 7 为初始翼型网格,随机分布网格节点为 3000 个,初始网格很不规则。

图 8 为改进的顶点弹簧模型加密翼型网格,图 9 为改进的棱边弹簧模型加密翼型网格。这两种方法区别主要在步骤 3)。对于改进的顶点弹簧模型,偶数步时 $k_{\text{new}} = k_{\text{old}}$,即空间分布刚度系数;奇数步时 $k_{\text{new}} = k_v$,最后 $k_{\text{new}} = k_v$ 进行连续迭代优化。对改进的棱边弹簧模型刚度系数取刚度分布函数值即可。

从以上生成的网格可以看到,两种改进的弹簧模型都达到了加密并光滑网格的目的;但改进的顶点弹簧模型在加密区与非加密区之间过渡不如改进的棱边弹簧模型光滑。主要原因归纳如下: k_{old} 与 k_v 大小的相互影响, k_v 选得较小达不到优化目的,选得较大又会严重削弱加密效果,很难找到一个折中的办法。改进的顶点弹簧模型的参数选取也较为烦琐。相比之下,改进的棱边弹簧模型无需参数选取,而且网格过渡光滑。

3 结 论

本文主要针对传统的弹簧比拟方法中存在的不足进行了两点改进:

1) 利用不同刚度系数弹簧比拟法实现了网格加密,克服了传统的弹簧比拟法无法加密网格的缺点。

2) 采用两种弹簧模型对原来的弹簧比拟法进行改进,改善了原方法中局部区域网格过渡效果不理想的现象。

采用不同刚度系数的弹簧比拟法可以实现对网格的加密。改进的棱边弹簧模型和改进的顶点弹簧模型均能实现网格优化,两种方法优化后的网格单元的质量相差不大。但是对于存在加密区域的网格,改进的棱边弹簧模型在加密区与非加密区之间过渡更为光滑。另外改进的顶点弹簧模型中修正项参数选取困难、烦琐,而改进的棱边弹簧模型不需要选取参数,对初始网格要求低,更适合于工程应用。

参考文献:

- [1] Gnoffo P A. A finite-volume, adaptive grid algorithm applied to planetary entry flowfield[J]. AIAA Journal, 1983, 21(9):1249-1254.
- [2] Batina T. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes[J]. AIAA Journal, 1990, 28(8): 1381-1388.
- [3] Richter R, Leyland P. Entropy correcting schemes and

- non-hierarchical auto-adaptive dynamic finite element type meshes; applications to unsteady aerodynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 20(6): 853-868.
- [4] Weatherhill N P, Gaither K P, Gither J A. Buiding unstructured grids for computational fluid dynamics[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 1995, 4(1): 1-28.
- [5] Karman S L Jr, Anderson W K, Sahasrabudhe M. Mesh generation using unstructured computational meshes and elliptic partial differential equation smoothing[J]. AIAA Journal, 2006, 44(6): 1277-1286.
- [6] Canann S A, Tristano J R, Staten M L. An approach to combined Laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral and quad-dominant meshes[R]. Dearborn: 7th International Meshing Roundtable, 1998.
- [7] Shimada K, Gossad D C. Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis[J]. Computer Aided Geometry Design, 1998, 15(3): 199-222.
- [8] Wu L, Chen B, Zhou G. An improved bubble packing method for unstructured grid generation with application to computational fluid dynamics [J]. Numerical Heat Transfer; Part B Fundamentals, 2010, 58(5): 343-369.
- [9] 王盛玺, 陈冬冬, 宋松和. 解析二维非结构化网格生成及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(26): 227-232.
- WANG Shengxi, CHEN Dongdong, SONG Songhe. Analytic method for 2D unstructured mesh generation and its applications[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(26): 227-232. (in Chinese)
- [10] 苏铭德, 朱方林. 二维非结构网格生成及自动加密技术[J]. 计算物理, 1998, 15(1): 6-10.
- SU Mingde, ZHU Fanglin. Generation of unstructured grid and technique of automatic refine[J]. Computational Physics, 1998, 15(1): 6-10. (in Chinese)
- [11] 聂玉峰, 刘莹. 非结构化网格布点方法研究进展[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(32): 35-40.
- NIE Yufeng, LIU Ying. Survey of point placement for unstructured mesh generation[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(32): 35-40. (in Chinese)
- [12] Blom F J. Considerations on the spring analogy[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2000, 32(6): 647-668.
- [13] 化存才. 常微分方程解法与建模应用选讲[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [14] Pirzadeh S. Unstructured grid generation by advancing front method using structured background grid[J]. Lecture Notes in physics, 1993, 414: 285-289.
- [15] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京: 科学出版社, 2000.