

三维高超声速边界层中 eN 方法的应用

于高通, 罗纪生

(天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

摘 要: 针对 eN 方法中的鞍点法(SPM), 结合内波理论, 提出了一种简便算法. 并用该算法计算了一个由平板、圆锥、圆柱 3 部分组成的模型以马赫数为 10 的速度在高度位于 30~45 km 之间、攻角为 0° 和 10° 的情况下 N 值分布情况. 结果表明: 高度的增加会使转捩位置向下游移动, 转捩面积会变小甚至消失; 与攻角为 0° 相比, 攻角为 10° 会使迎风的平板部分转捩发生的可能性增大, 转捩面积也会变大; 对于背风处的圆锥部分, 攻角为 10° 则会减弱转捩发生可能性, 使得转捩面积变小, 甚至消失, 而且转捩位置也会变化.

关 键 词: 三维流场转捩预测; eN 方法; 鞍点法; 波包传播方向; 线性稳定性理论

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Application of eN method in three-dimensional hypersonic boundary layers

YU Gao-tong, LUO Ji-sheng

(Department of Mechanics,

School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: A simple algorithm of saddle-point method (SPM) in eN method was presented by using internal wave theory, and distribution of N was computed on a model made up of plate, cone and cylinder at the cases of 30—45 km altitudes, Mach number of 10, attack angles of 0° and 10° . The results and conclusions show that: as the altitude increases, the transition position moves downstream, and the transition area becomes smaller and even disappears. On the plate part (windward side), the transition possibility in 10° attack angle cases is bigger than that in 0° attack angle cases, and the transition area is larger too. But on the cone part (leeward side), the transition possibility in 10° attack angle cases is less, and the transition area is smaller, even inexistence. And the transition positions of these two series of cases are different.

Key words: three-dimensional flow field transition prediction; eN method; saddle-point method; direction of wave packet movement; linear theory of stability

飞行器表面边界层的流动状态是层流还是湍流, 所产生的热流和阻力有很大的不同, 因此, 不同工况下给出飞行器表面的层流、湍流的转捩位置, 是精确设计飞行器的关键问题之一, 预测转捩位置将为飞行器设计提供依据. 边界层转捩位置

预测的方法中, eN 方法的理论依据最高, 是边界层转捩位置预测最有效的方法.

eN 方法是 20 世纪 50 年代, Smith, Gamberoni^[1] 和 Van Ingen^[2] 基于流动线性稳定性理论提出来的. 应用于预测不可压缩二维流动下的

收稿日期: 2013-06-04

基金项目: 国家自然科学基金(11172204, 11202147, 91216111, 11172203, 11002098, 11332007);
高等学校博士学科点专项科研基金(20120032120007)

作者简介: 于高通(1985—), 男, 河北沧州人, 博士生, 主要从事层流-湍流转捩和流动稳定性的研究.

边界层自然转捩情况时,增长因子 N 的取值为 9, 根据不同的流动情况 N 的取值也可以为 10, 11 等. 该方法成功地应用于低速飞行器的设计中^[3-4], 但在高超声速边界层中, 由于问题的复杂性及缺少必要的实验基础, 目前如何选取 N 值仍处于研究阶段.

eN 方法中, 扰动幅值增长率的计算是基于线性稳定性理论的, 但在求扰动幅值的增长即积分 N 值时可以有多种方式, 常用的方法是考虑最不稳定扰动波的包络法^[5-6]. 二维流动规定了展向波数为实数, 扰动传播方向及增长只能在流动方向, 因此, eN 方法适合于研究展向均匀的二维边界层问题, 其中的包络是对频率而言的. 但对三维边界层问题, 情况就复杂了, 不仅需要确定扰动传播方向, 而且需要确定展向波数. 为了将 eN 方法推广到三维, 根据扰动传播的渐近理论, Cebeci 等^[7-9] 针对空间模式提出了确定扰动传播方向和展向波数的鞍点法. 但是要将鞍点法具体地应用于三维流场中需要迭代求解扰动传播方向, 使计算变得相当烦琐、耗时. 本文针对三维流场中的转捩位置预测问题, 利用 eN 方法, 在鞍点法的基础上, 提出一种简便算法, 省略在确定扰动波参数时的迭代计算, 方便该方法的使用.

利用本文提出的方法, 对一个平板、圆锥、圆柱组合体绕流边界层的转捩位置进行了预测, 给出了不同来流条件下 N 值分布情况, 分析了飞行高度和攻角对转捩位置的影响. 模型具体形状见图 1.

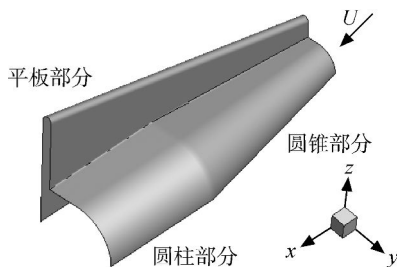


图 1 计算模型

Fig. 1 Computation model

1 eN 方法、鞍点法及其简化形式

设 y 为垂直壁面的法向, x, z 垂直于 y 方向, 通常取 x 为流动方向, z 为展向. 据流动线性稳定性理论, 可将扰动波写成如下形式

$$q'(x, y, z, t) = \hat{q}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + \text{c. c.}$$

其中 $q' = [\rho', u', v', w', T']$ 为扰动量, $\hat{q} = [\hat{\rho}, \hat{u},$

$\hat{v}, \hat{w}, \hat{T}]$ 为扰动波的形状函数, α 为 x 方向的波数, β 为 z 方向的波数, ω 为频率, c. c. 表示共轭项. α, β, ω 中给定 2 个量, 通过求扰动方程的特征值问题可以确定第 3 个量, 同时解出形状函数 $\hat{q}$. 对于扰动幅值在空间增长的情况, 即空间模式, 则 ω 为实数, 而 α 和 β 可以是复数. 对于给定的频率 ω , 沿着扰动传播方向对幅值增长率积分可以得到 eN 方法中的 N , 即

$$N = - \int_{P_0}^P (\alpha dx + \beta dz)$$

式中 P_0 为扰动开始增长的位置, P 为当前位置.

不同的 eN 方法的区别在于积分 N 值时如何确定频率、展向波数及积分的起点和积分路径.

鞍点法是利用扰动传播的渐近理论研究流场中给定频率 ω 的扰动在下游远场的渐近解, 即确定当 x 很大时最大幅值扰动传播方向. 设在给定位置 (x, z) , 扰动的相位角 $\theta = \alpha x + \beta z$ 是 β 的函数, 根据扰动传播的渐近理论, 扰动传播方向与展向波数 β 的关系满足

$$\frac{d\theta}{d\beta} = 0$$

即 β 在 θ 的鞍点处. 由此可得

$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta} \right)_i = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta} \right)_r = - \frac{z}{x} = - \tan \varphi \quad (2)$$

式中的下标 i 表示虚部, 下标 r 表示实部, φ 为群速度方向与 x 轴的夹角 (见图 2). 考虑到在传播方向上取扰动具有最大幅值增长率, 即

$$\sigma_g = \max_{\beta} [- (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)] \quad (3)$$

式中的 σ_g 表示在 g 方向的幅值增长率. 以上的式 (1)、式 (2) 和式 (3) 用于确定 β 和 φ .

N 值的表达式为

$$N(\omega, x, z) = \int_{P_0}^P \sigma_g dg = \int_{P_0}^P \sigma_x dx$$

其中 $\sigma_x = \sigma_g / \cos \varphi$, 积分的起点为 $\sigma_g = 0$ 处的位置.

若考虑 α, β 都是复数的情况, 设 α 是 β 的解析函数, 式 (1)、式 (2)、式 (3) 可以写成下面的形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_r} = - \frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_i} = 0 \\ \tan \varphi = - \frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_r} = - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_i} \\ \sigma_g = \max_{\varphi} [- (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)] \end{cases} \quad (4)$$

根据扰动方程确定的特征值问题,利用限定式(4),通过迭代计算可以得到波数 α, β 以及角度 φ .

一般讲,迭代求解的计算量较大,为了减少计算量,提出了简化的方法.为此,先对波传播方向进行分析.边界层中最不稳定波的群速度方向 g 与波包传播方向是相同的,如赵耕夫^[10-11]曾用波包理论对 Nitschke-Kowsky 等^[12]测量到的后掠平板三维边界层条纹结构进行分析时证实过.这也说明了最不稳定波的群速度方向即为其增长最快的方向,因此,在垂直于最不稳定波的群速度方向 n 上扰动是不增长的,即有关系

$$\sigma_n = \max_{\beta} (\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi) = 0$$

可以将式(4)换为下面的形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_r} = -\frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_i} = 0 \\ \tan \varphi = -\frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_r} = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_i} \\ \beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

该条件表明:在垂直于最不稳定波的群速度方向 n 上幅值增长率为零.

针对式(5)设计的计算过程为:对给定的 β ,先变化 β ,使

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_r} = 0$$

即求得 α 的极小值,表示取 x 方向增长最快的扰动,同时得到

$$\tan \varphi = -\frac{\partial \alpha_r}{\partial \beta_r}$$

再验证条件

$$\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi = 0$$

是否满足.如果不满足,则调整 β 直至上式满足,这样就确定了 β ,同时计算出了 $\tan \varphi$.

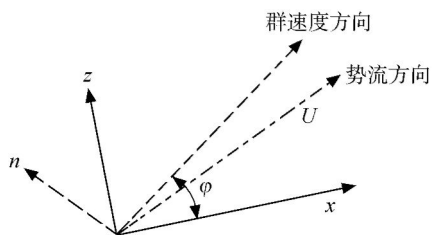


图2 坐标轴、势流、群速度方向示意图

Fig. 2 Sketch of directions of coordinate axis, potential flow and group velocity

如果坐标 x 的方向正好和最不稳定波的群速度方向 g 一致,则 β 取零就不用调整了.但一般 g 与 β 耦合,需要迭代计算,因此初始坐标的选取是十分重要的.一般来说,对于 T-S(Tollmien-Schlichting)波而言,最不稳定波的群速度方向 g 与边界层外缘的势流方向 U 很接近,赵耕夫^[11]在分析后掠平板中波包传播方向时指出,二者相差不超过 5° .一种简单的做法就是假定扰动沿势流方向增长最快,即选择边界层外缘的势流方向作为坐标 x 方向,取 $\beta=0$ 进行计算,如 Mack^[6]、苏彩虹等^[13].

上述计算是针对给定频率进行的,得到 $N(\omega, x, z)$ 值后取所有频率下的 N 值的包络作为预测转捩位置用的 N 值,即设

$$N(x, z) = \max_{\omega} N(\omega, x, z)$$

根据转捩准则,满足

$$N(x_t, z_t) = N_t$$

的点为转捩位置. N_t 称为 eN 的转捩准则,一般由实验或经验给出.

苏彩虹等^[13]、LIU 等^[14]曾在有攻角锥上使用过鞍点法,并与实验结果和直接数值模拟结果进行了比较,其结果表明了该计算方法在准确性上是可靠的.

为了检验简化方法,本文对圆锥部分在马赫数为 10、高度为 30 km、攻角为 0° 工况下扰动传播方向与原方法进行了对比验证.

图 3 给出了两种方法得到的扰动传播方向.图中的云图表示幅值增长率 σ .可以看出,由简化方法得到的扰动传播方向与简化前几乎重合.图

马赫数为 10, 高度为 30 km, 攻角为 0°
 $Re=7762, \omega=1.2$

—○— Saddle-point method
 —●— Simple SPM

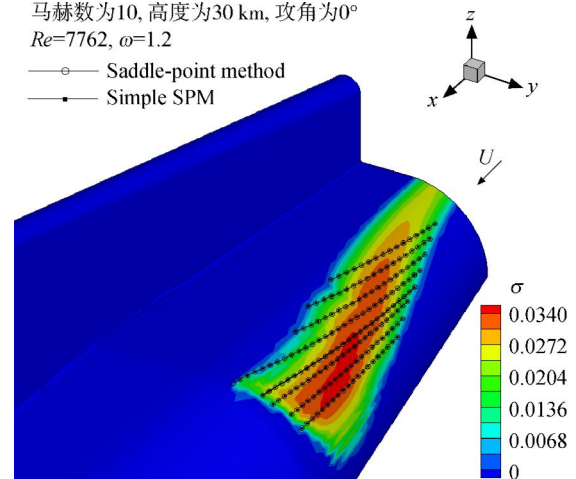


图3 鞍点法简化前后得到的扰动传播方向

Fig. 3 Disturbance directions obtained by saddle-point method before and after simplification

4(b)和图 4(c)给出了沿某一扰动传播方向的 σ 和 N 值,其相差也是很小的,这说明本文做出的简化是可行的。

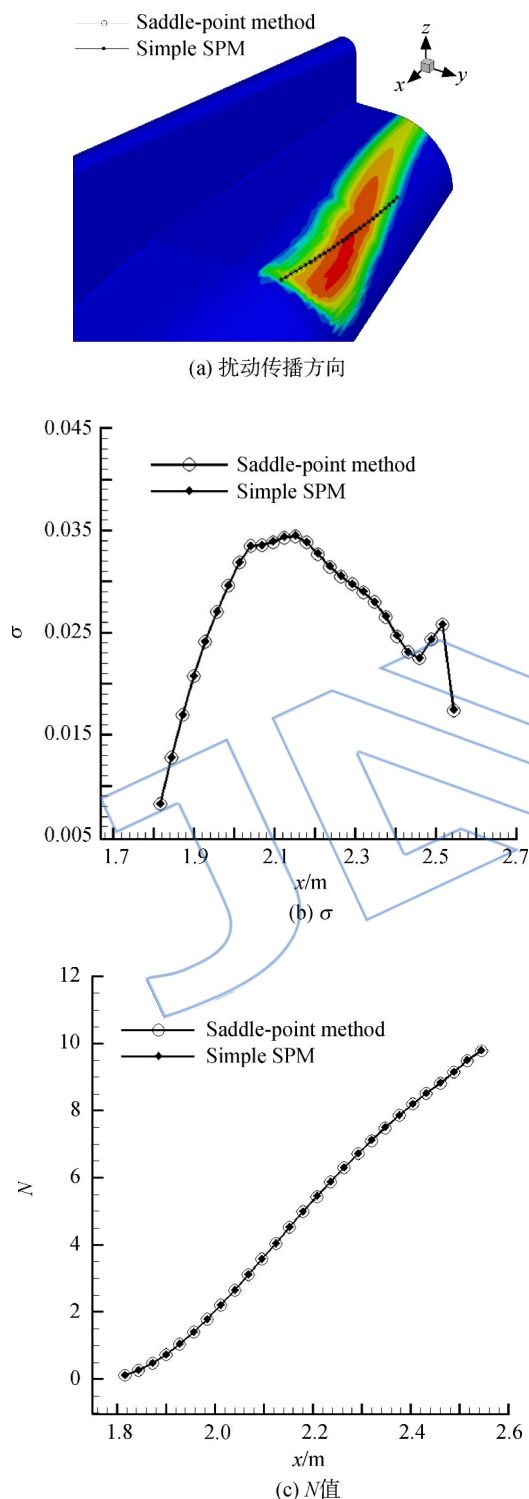


图4 鞍点法简化前后得到的扰动传播方向上的 σ , N 值的分布

Fig. 4 Distribution of σ and N obtained by saddle-point method before and after simplification along disturbance directions

2 算例及结果分析

本文用简化的鞍点法计算了一个由平板、圆锥、圆柱组合成的模型,计算工况选择了马赫数为 10,高度选择了 30, 35, 40, 45 km 四个位置,攻角选择了 0° 和 10° 两种情况。

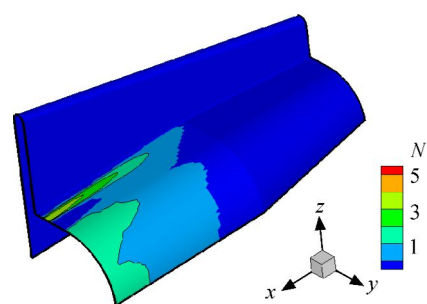
2.1 圆柱部分的分析结果

对圆柱部分做了 4 种工况分析,工况参数见表 1.表中 ω/Re 表示圆柱上存在的不稳定扰动的频率范围.图 5 给出了 4 种工况下圆柱部分 N 值等值云图.可以看出, 0° 攻角工况下, N 值大于 3 的区域很窄, 10° 攻角工况下整个圆柱上的 N 值都小于 2. 目前虽然还不能确定该情况下准确的转捩临界值 N_{st} 为多少,但通常的判据一般为 $N_t = 5.5^{[13,15]}$, $N < 3$ 是不可能发生自然转捩的,因此从计算结果上看,圆柱部分发生转捩的可能性很小。

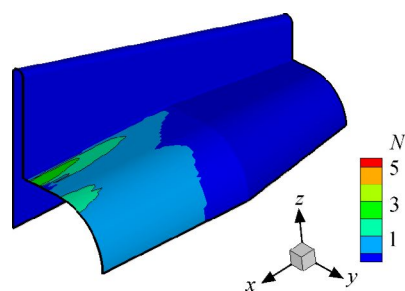
表1 圆柱部分工况参数

Table 1 Working parameters on cylinder part

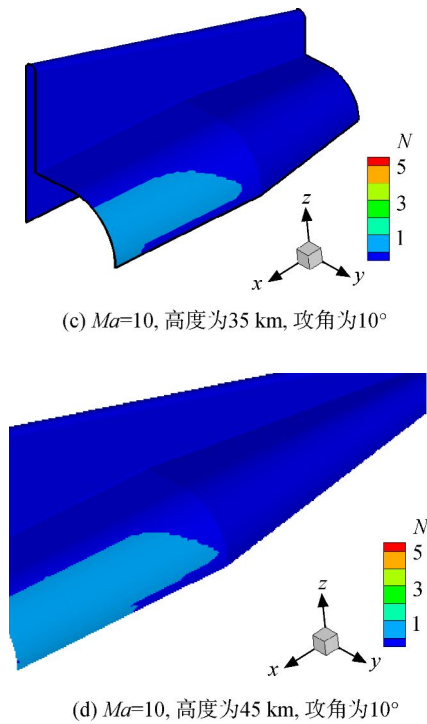
高度/km	攻角/ $^\circ$	Re	$(\omega/Re)/10^5$
30	0	58 219	2.4~4.3
35	0	39 189	3.3~6.1
40	10	58 219	0.5~1.9
45	10	39 189	1.0~3.1



(a) $Ma=10$, 高度为 30 km, 攻角为 0°



(b) $Ma=10$, 高度为 35 km, 攻角为 0°

图 5 圆柱部分 N 值等值线图Fig. 5 Contour of N on cylinder part

2.2 攻角为 0° 平板部分的分析结果

对攻角为 0° 平板部分计算了 4 种工况,其参数在表 2 中列出.

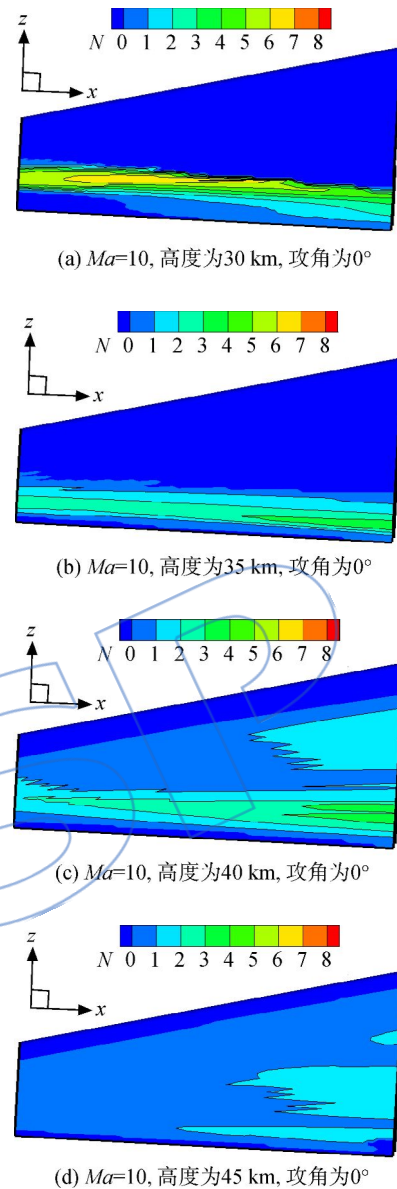
表 2 攻角为 0° 平板部分工况参数Table 2 Working parameters of 0° attack angle on flat part

高度/km	攻角/ $^\circ$	Re	$(\omega/Re)/10^5$
30	0	58219	1.2~5.2
35	0	39189	2.0~5.9
40	0	26693	3.0~7.5
45	0	18574	5.4~17.8

图 6 给出了攻角为 0° 平板部分 N 值等值线图.可以看出,在高度为 30 km 时,不稳定区域虽然比较窄,但包络面的 N 值可以大于 5,甚至可以到达 6 以上.到了高度为 35,40 km 时, N 值最大只能达到 3,而到了高度为 45 km 时, N 值最大为 1. 可以看出高度为 30 km 时,平板部分很有可以发生转捩,发生转捩的区域集中在平板对称面的中下游处;高度在 35 km 以上时,发生转捩的可能性不大.

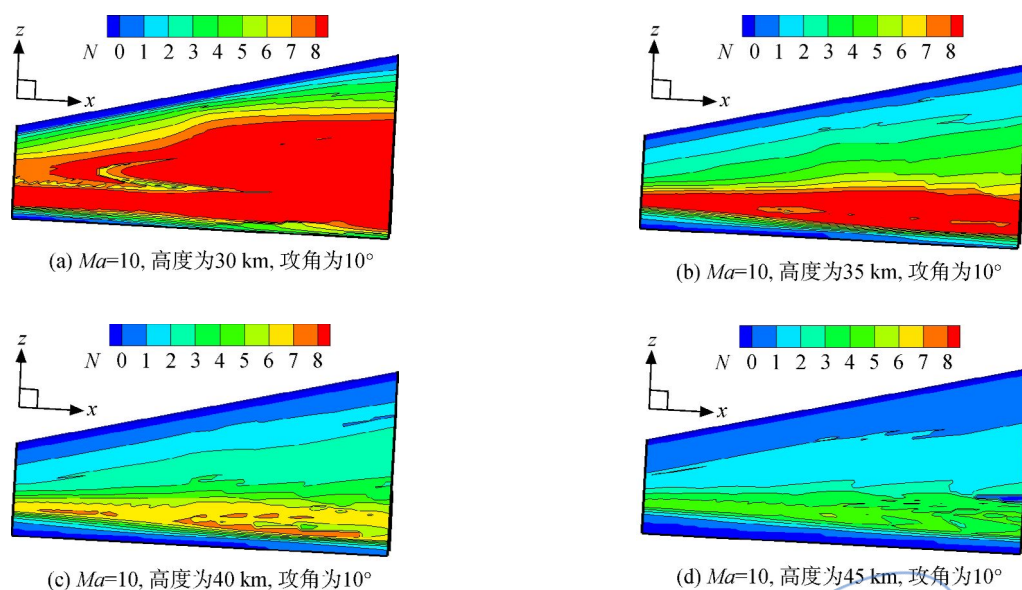
2.3 攻角为 10° 平板部分的分析结果

攻角为 10° 平板部分的 4 种工况及其计算参数在表 3 中列出.

图 6 攻角为 0° 平板部分 N 值等值线图Fig. 6 Contour of N of 0° attack angle on flat part表 3 攻角为 10° 平板部分工况参数Table 3 Working parameters of 10° attack angle on flat part

高度/km	攻角/ $^\circ$	Re	$(\omega/Re)/10^5$
30	10	5822	8.6~27.5
35	10	5225	9.6~30.6
40	10	5339	11.3~48.7
45	10	2477	40.4~133.2

图 7 给出了攻角为 10° 平板部分 N 值等值线图,对于高度为 30 km 的工况,在很大的空间区域内 N 值都在 8 以上. 因此在该工况下,流动肯定

图 7 攻角为 10° 平板部分 N 值等值云图Fig. 7 Contour of N of 10° attack angle on flat part

会大范围地发生转捩, 转捩发生在下游对称面附近, 而且转捩面积很大. 在高度上升到 35, 40 km 时, 转捩范围逐渐变小, 但转捩位置仍集中于对称面附近. 在高度升到 45 km 时, N 值均小于 5, 转捩的可能性非常小.

2.4 攻角为 0° 圆锥部分的分析结果

攻角为 0° 圆锥部分 4 种工况的计算参数见表 4.

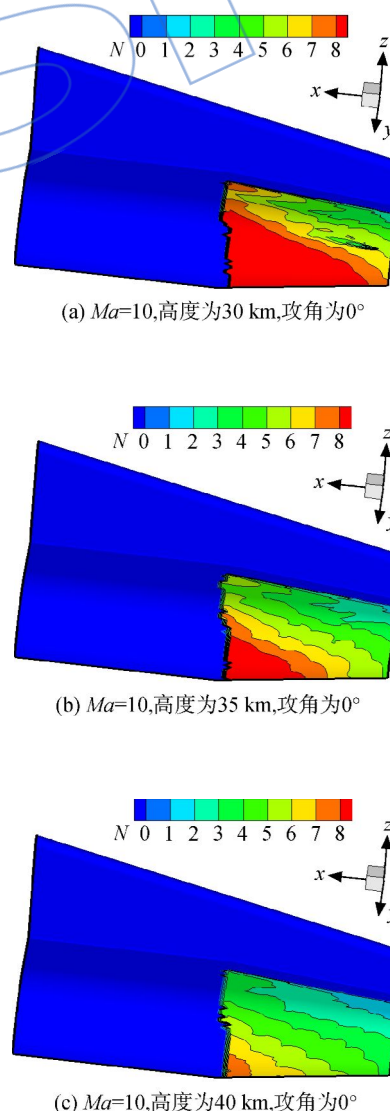
表 4 攻角为 0° 圆锥部分工况参数Table 4 Working parameters of 0° attack angle on cone part

高度/km	攻角/ $^\circ$	Re	$(\omega/Re)/10^5$
30	10	7762	7.7~25.8
35	10	5225	11.5~38.3
40	10	3559	116.9~64.6
45	10	2477	20.2~92.9

图 8 给出了攻角为 0° 圆锥部分 N 值等值云图. 在高度为 30 km 时, 圆锥部分肯定要发生转捩, 转捩的区域会靠近圆锥顶部的下游处. 随着高度的增加, 转捩区域变小, 向圆锥顶部的下游处收缩. 直到高度到达 45 km 时, N 值全都小于 5, 发生转捩的可能性不大了.

2.5 攻角为 10° 圆锥部分的分析结果

攻角为 10° 圆锥部分 4 种工况的计算参数在表 5 中列出. 图 9 给出了攻角为 10° 圆锥部分 N 值等值云图. 高度为 30 km, 在圆锥的侧面一部分



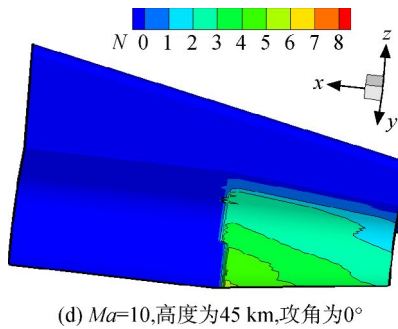
图8 攻角为 0° 圆锥部分 N 值等值云图

Fig. 8 Contour of N of 0° attack angle on cone part

空间区域内 N 值达到了6以上,因此流动在该区域内发生转捩的可能性很大.高度为35 km时,最大 N 值只在很小的区域内为5,转捩的可能性不大.随着高度增加到40 km和45 km,最大的 N 值只有2或1,不可能发生转捩.

表5 攻角为 10° 圆锥部分工况参数

Table 5 Working parameters of 10° attack angle on cone part

高度/km	攻角/ $^\circ$	Re	$(\omega/Re)/10^5$
30	10	7762	3.1~15.5
35	10	7838	4.5~23.6
40	10	5339	6.6~41.2
45	10	2477	16.1~52.5

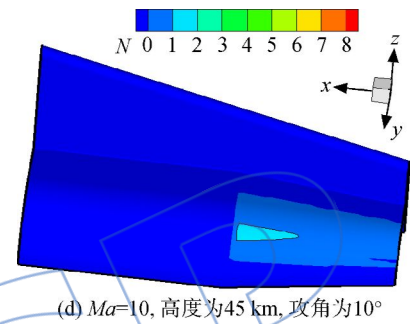
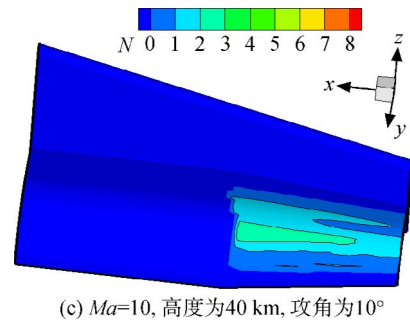
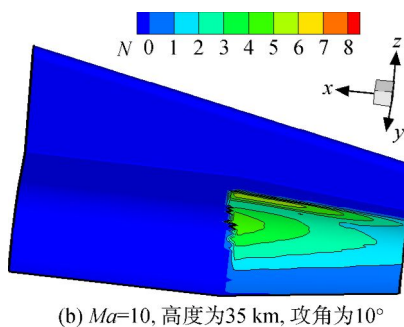
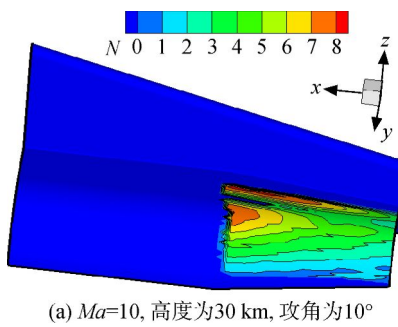
图9 攻角为 10° 圆锥部分 N 值等值云图

Fig. 9 Contour of N of 10° attack angle on cone part

3 结论

eN 方法中的鞍点法可以通过转换计算坐标方向的方式来求得最不稳定波的幅值增长率及其群速度方向,由于一般情况下最不稳定波的群速度方向与势流方向接近,可以利用在垂直于势流方向的幅值增长率为零的假设来进行计算,以节省计算时间.

本文利用以上算法,计算分析了一个由平板、圆锥、圆柱3部分组成的模型,以马赫数为10的速度, 0° 和 10° 攻角两种姿态,计算高度位于30~45 km之间飞行时的 N 值分布情况.结果表明:

1) 飞行器的边界层是否发生转捩与飞行高度的关系十分密切.这一典型高升阻比外形,在飞行马赫数为10时,并非所有部分都会发生自然转捩,比如模型中的圆柱部分不可能发生自然转捩.对于存在转捩的,其转捩面积会随着飞行高度的增加向下游移动或者变小,最终自然转捩会在模型上消失.

2) 飞行姿态对转捩位置的影响很大.不同的攻角,对不同的位置有不同的影响.在迎风的平板部分,攻角为 10° 促进了转捩的发生,且转捩面积会大于攻角为 0° 时的情况;而在背风的圆锥部分,攻角为 10° 却抑制了转捩的发生,使得转捩面

积较攻角为 0° 时变小,且转捩位置会向侧面变化,甚至使得转捩区域消失。

参考文献:

- [1] Smith A M O, Gamberoni N. Transition, pressure gradient and stability theory[R]. Long Beach, California: Douglas Aircraft Company, 1956.
- [2] Van Ingen J L. A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region[R]. Delft University of Technology Faculty of Aerospace Engineering, Report VTH-74, 1956.
- [3] Stokowski A T, Orszag S A. Mass flow requirements for LFC wing design[R]. AIAA 77-1222, 1977.
- [4] Malik M R, Orszag S A. Comparison of methods for prediction of transition by stability analysis[J]. AIAA Journal, 1980, 18(12): 1485-1489.
- [5] Van Ingen J L. The eN method for transition prediction: historical review of work at TU Delft[R]. AIAA-2008-3830, 2008.
- [6] Mack L M. Stability of three-dimensional boundary layers on swept wings at transonic speeds[R]. Gottingen, Germany: International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM) Symposium, 1989.
- [7] Cebeci T, Stewartson K. On stability and transition in three-dimensional flows[J]. AIAA Journal, 1980, 18(3): 398-405.
- [8] Cebeci T, Shao J P, Chen H H, et al. The preferred approach for calculating transition by stability theory[R]. Toulouse, France: International Conference on Boundary and Interior Layers, 2004.
- [9] Cebeci T, Chen H H, Arnal D, et al. Three-dimensional linear stability approach to transition on wings and bodies of revolution at incidence[J]. AIAA Journal, 1991, 29(12): 2077-2085.
- [10] 赵耕夫. 波包在后掠翼三维边界层中的演化特征[J]. 力学学报, 1999, 31(2): 159-164.
- ZHAO Gengfu. Evolution of wave-packet in three-dimensional boundary layer on a swept wing[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1999, 31(2): 159-164. (in Chinese)
- [11] 赵耕夫. 后掠平板横流不稳定性[J]. 空气动力学学报, 1998, 16(3): 337-342.
- ZHAO Gengfu. Crossflow instability of swept flat plate[J]. Acta Aerodynamic Sinica, 1998, 16(3): 337-342. (in Chinese)
- [12] Nitschke-Kowsky P, Bippes H. Instability and transition of a three-dimensional boundary layer on a swept flat plate[J]. Physics of Fluids, 1988, 31(4): 786-795.
- [13] 苏彩虹, 周恒. 小攻角高超音速尖锥边界层的转捩预测及eN法的改进[J]. 中国科学: G辑 物理学 力学 天文学, 2009, 39(1): 123-130.
- SU Caihong, ZHOU Heng. Transition prediction of a hypersonic boundary layer over a cone at a small angle of attack with the improvement of eN method[J]. Science in China: Physics, Mechanics and Astronomy, 2009, 39(1): 123-130. (in Chinese)
- [14] LIU Jianxin, LUO Jisheng. Effect of disturbances at inlet on hypersonic boundary layer transition on a blunt cone at small angle of attack[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(5): 535-544.
- [15] Berry S A, Wilder M C. Boundary-layer transition experiments in support of hypersonic program[R]. AIAA-2007-4266, 2007.