

径向简谐激励下航空发动机机匣的振动分析

温登哲, 陈予恕

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 根据航空发动机机匣薄壁结构的几何特征, 将机匣简化为一端简支一端固支的圆柱壳结构, 建立了系统的动力学方程, 并采用多尺度法对动力学方程进行了求解, 进而研究了径向简谐激励下机匣动力学方程的零解及非零解的稳定性, 并讨论了系统单模态运动发展到复合模态运动以及能量在模态之间的转移过程, 最后采用数值方法研究了径向简谐激励下机匣的振动特性. 结果表明: 随着径向简谐激励的增加, 系统表现为周期运动、倍周期运动及混沌运动交替出现.

关 键 词: 航空发动机机匣; 圆柱壳; 双模态位移; 运动稳定性; 混沌运动

中图分类号: V232.5

文献标志码: A

Vibration analysis of aero-engine casing under radial harmonic excitation

WEN Deng-zhe, CHEN Yu-shu

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The casing was simplified using a simply supported end and a fixed supported end cylindrical shell based on geometric characteristics of thin-walled structures of aero-engine casing. The dynamic equations were established and solved by multi-scale method, and the stability of zero solution and non-zero solution of casing dynamic equations under the radial harmonic excitation was studied. Then the transient process of system mode from single-mode motion to composite mode motion and the transfer of energy between the modes were studied; in addition, the vibration characteristic of casing under radial harmonic excitation was also numerically simulated. Results show that periodic motion, periodic doubling motion and chaotic motion appear alternately with the increase of radial harmonic excitation.

Key words: aero-engine casing; cylindrical shell; dual-mode displacement; motion stability; chaotic motion

振动问题是航空发动机研发设计中不可忽视的重要问题, 机匣作为航空发动机的组成部分, 它的振动直接反映了航空发动机整机振动的水平. 机匣振动的主要激振源是叶片的旋转、转子的不平衡和燃烧过程引起的随机振动等, 可分成气动和结构的二类. 机械激振通常比较弱, 并由于结构阻尼的缘故衰减得比较快, 旋转叶片尾迹的压力脉动是机匣感受的主要激振形式之一, 另一

重要激振形式是旋转的高低压气团所引起的周向压力变化^[1-4].

国内外许多学者对航空发动机机匣的振动问题进行过研究, 蔡显新等^[5]采用有限元方法分析了引起机匣振动过大的原因, 提出在机匣适当位置增加矩形截面的环形结构的减振措施. 许棠等^[6]提出了确定机匣载荷谱的建议, 介绍了一种基于局部应力应变法的航空发动机机匣低循环疲

寿命预测方法. 齐红宇等^[7]分析了外涵道机匣在轴向压力、端部扭矩及内压组合作用下的屈曲行为规律. 晏砺堂^[8]指出行波振动会诱发轴向力, 在轮盘上沿圆周分布的不均匀力作用下会产生驻波振动. 苏志敏^[9]提出了一种基于结合有限元和边界元来分析薄壁柱壳结构在声激励作用下的振动响应的计算方法. 吴元东等^[10]运用模型对比和试验验证的方法证明了壳单元在建立薄壁结构时的合理性, 提出了模型验证的一般方法. Rougui 等^[11]研究了简支支承下的薄壁圆壳结构的非线性自由振动和受迫振动. 齐欢欢等^[12]通过 Galerkin 方法和复模态方法研究悬臂输液管在不同流速下固有频率的变化情况, 得出了 Galerkin 模态截断对输液管固有频率计算结果的影响. 韩强^[13]证实了轴向受压圆柱壳在考虑非线性大挠度效应时发生混沌的可能. Paliwal 等^[14]研究了带有弹性介质或者支承的薄壁圆壳结构的自由振动. 杜建成等^[15]研究了计及几何非线性效应影响时双曲扁壳的动力学行为, 分析表明系统存在发生混沌的可能.

目前对于梁、杆、板等基本结构的分岔与混沌的研究方法多为直接采用单模态位移模式进行分析, 采用单模态位移模式的分析方法, 存在以下几点不足: ①对于连续系统而言, 系统的响应可以用无穷多项三角函数级数之和来表示, 因此可以认为, 采用多模态位移模式分析较单模态位移模式更为精确; ②采用单模态位移模式分析时, 无法考虑系统内共振导致的分岔、各模态间的相互作用以及能量在各模态之间的相互转换^[16].

为了研究径向激励对机匣振动的影响, 综合考虑气动和结构两类激励源, 本文将机匣径向激励进行柔和并简化为简谐激励, 采用双模态位移分析方法, 讨论了系统单模态运动发展到复合模态以及能量在模态之间的转移, 最后进行了数值模拟, 结果发现, 随着径向简谐激励的变化, 周期运动与混沌运动交替出现, 据此, 计算了发生周期运动和混沌运动时径向简谐激励的区间范围.

1 机匣振动的几何模型

根据航空发动机机匣薄壁结构的几何特征, 将机匣简化为一端简支一端固支的圆柱壳模型^[1], 如图1所示, 长度为 L , 半径为 R , 厚度为 h . 坐标系为 $OXYZ$; u, v, w 分别表示沿坐标系方向的轴向位移、周向位移和径向位移, 径向简谐激励 F_r (见图2) 表示为

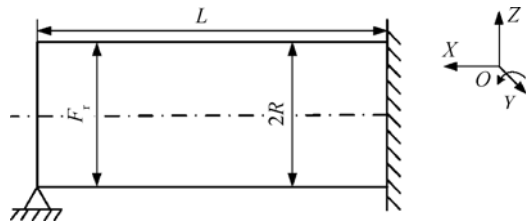


图1 航空发动机机匣节模型

Fig.1 Model of aero-engine casing section

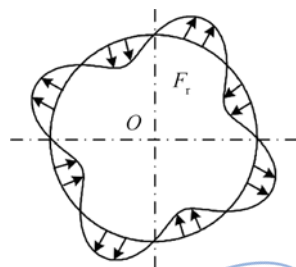


图2 径向简谐激励示意图

Fig.2 Schematic diagram of radial harmonic excitation

$$F_r = Q_r \cos(\omega_r t) \quad (1)$$

机匣的动力学方程为^[16]

$$\begin{aligned} L(w, t) = D \nabla^4 w - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} - F_r = 0 \\ Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \\ \nabla^4 f_r = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (3)$$

式中 ρ 为材料密度; c 为阻尼系数; μ 为泊松比; E 为弹性模量. 本节中所有未做说明的符号含义参见文献^[16].

采用双模态位移方法来设解, 近似解表示为

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = w_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R} + \\ w_2(t) \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R} \end{aligned} \quad (4)$$

令 $\alpha = \frac{\pi}{L}, \beta = \frac{\pi}{R}$, 则有

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = w_1(t) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \\ w_2(t) \sin(2\alpha x) \sin(\beta y) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)代入式(3)中, 整理后得

$$\nabla^4 f_r = Eh \{ [\omega_1 \alpha \beta \cos(\alpha x) \cos(\beta y) + 2\omega_2 \alpha \beta \cos(2\alpha x) \cos(\beta y)]^2 - [-\omega_1 \alpha^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) - 4\omega_2 \alpha^2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] \cdot [-\omega_1 \beta^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) - \omega_2 \beta^2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] - \frac{1}{R} [-\omega_1 \alpha^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) - 4\omega_2 \alpha^2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] \} \quad (6)$$

将式(6)代入式(2)中,利用待定系数法,整理得

$$f_r = \omega_1^2 [A_1 \cos(2\alpha x) + A_2 \cos(2\beta y)] + \omega_1 \omega_2 [A_3 \cos(\alpha x) + A_4 \cos(3\alpha x) + A_5 \cos(\alpha x) \cos(2\beta y) + A_6 \cos(3\alpha x) \cos(2\beta y)] + \omega_2^2 [A_7 \cos(4\alpha x) + A_8 \cos(2\beta y)] + \omega_1 A_9 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \omega_2 A_{10} \sin(2\alpha x) \sin(\beta y) \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= Eh \frac{\beta^2}{32\alpha^2} & A_2 &= Eh \frac{\alpha^2}{32\beta^2} & A_3 &= -Eh \frac{\beta^2}{4\alpha^2} & A_4 &= Eh \frac{\beta^2}{36\alpha^2} & A_5 &= Eh \frac{9\alpha^2 \beta^2}{4(\alpha^2 + 4\beta^2)^2} \\ A_6 &= -Eh \frac{\alpha^2 \beta^2}{4(9\alpha^2 + 4\beta^2)^2} & A_7 &= Eh \frac{\beta^2}{128\alpha^2} & A_8 &= Eh \frac{\alpha^2}{8\beta^2} & A_9 &= Eh \frac{\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} \\ A_{10} &= Eh \frac{4\alpha^2}{R(4\alpha^2 + \beta^2)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

将式(5)和式(8)代入式(2),得

$$\begin{aligned} L(\omega) &= D \cdot [\omega_1 (\alpha^2 + \beta^2)^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \omega_2 (4\alpha^2 + \beta^2) \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] + \{ \omega_1^2 A_1 4\alpha^2 \cos(2\alpha x) + \omega_1 \omega_2 [A_3 \alpha^2 \cos(\alpha x) + 9A_4 \alpha^2 \cos(3\alpha x) + A_5 \alpha^2 \cos(\alpha x) \cos(2\beta y) + 9A_6 \alpha^2 \cos(3\alpha x) \cos(2\beta y)] + \omega_2^2 16A_7 \alpha^2 \cos(4\alpha x) + \omega_1 A_9 \alpha^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \omega_2 4A_{10} \alpha^2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y) \} \cdot \\ &\left\{ \frac{1}{R} - \beta^2 [\omega_1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \omega_2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] \right\} + 2 \{ \omega_1 \omega_2 [2A_5 \alpha \beta \sin(\alpha x) \sin(2\beta y) + 6A_6 \alpha \beta \sin(3\alpha x) \sin(2\beta y)] + \omega_1 A_9 \alpha \beta \cos(\alpha x) \cos(\beta y) + \omega_2 2A_{10} \alpha \beta \cos(2\alpha x) \cos(\beta y) \} \cdot \\ &[\omega_1 \alpha \beta \cos(\alpha x) \cos(\beta y) + \omega_2 2\alpha \beta \cos(2\alpha x) \cos(\beta y)] - \{ \omega_1^2 4A_2 \beta^2 \cos(2\beta y) + \omega_1 \omega_2 4\beta^2 [A_3 \cos(\alpha x) \cos(2\beta y) + A_6 \cos(3\alpha x) \cos(2\beta y)] + \omega_2^2 4\beta^2 A_8 \cos(2\beta y) + \omega_1 A_9 \beta^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \omega_2 A_{10} \beta^2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y) \} \cdot \\ &[\omega_1 \alpha^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \omega_2 4\alpha^2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] + \rho h [\dot{\omega}_1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \dot{\omega}_2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] + \\ &[c \dot{\omega}_1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \dot{\omega}_2 \sin(2\alpha x) \sin(\beta y)] - F_r = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Galerkin 原理表示为

$$\iint L(\omega) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy = 0 \quad (10a)$$

$$\iint L(\omega) \sin(2\alpha x) \sin(\beta y) dx dy = 0 \quad (10b)$$

由式(10a)积分可得

$$\begin{aligned} &-120\pi^2 \alpha^2 \beta^2 R (A_1 + A_2) \omega_1^3 + 640\alpha^2 (2A_1 + \beta^2 A_9 R) \omega_1^2 + \\ &[\pi^2 \alpha^2 \beta^2 R (-270A_4 + 15A_6 + 30A_3 - 135A_5 - 120A_8) \omega_2^2 - \\ &60\pi^2 \alpha^2 A_9 - 60\pi^2 D(\alpha^2 + \beta^2)^2] \omega_1 + 512\alpha^2 (2A_7 + \\ &3\beta^2 A_{10} R) \omega_2^2 - 60\pi^2 c R \dot{\omega}_1 - 60\pi^2 \rho h R \ddot{\omega}_1 + 960 R F_r = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

由式(10b)积分可得

$$\begin{aligned} &-1440\pi^2 \alpha^2 \beta^2 (A_7 + A_8) \omega_2^3 + 45\pi^2 \alpha^2 \beta^2 R (-32A_2 - 18A_4 + A_6 - 9A_5 + 2A_3) \omega_1^2 \omega_2 + \\ &\alpha^2 (-3456A_6 + 4608\beta^2 A_9 R + 640A_5 + 10368A_4 + 4608\beta^2 A_{10} R - 1920A_3) \omega_1 \omega_2 - \\ &180\pi^2 [D R (4\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2 A_{10}] \omega_2 - 180\pi^2 c R \dot{\omega}_2 - 180\pi^2 \rho h R \ddot{\omega}_2 + 3840 R F_r = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

化简式(11)和式(12),得

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_1 + \frac{c}{\rho h} \dot{\omega}_1 + m_{11} \omega_1^3 + m_{21} \omega_1^2 + m_{31} \omega_1 \omega_2^2 + m_{41} \omega_1 + m_{51} \omega_2^2 + m_{61} \cos \omega_r t &= 0 \\ \ddot{\omega}_2 + \frac{c}{\rho h} \dot{\omega}_2 + n_{11} \omega_2^3 + n_{21} \omega_1^2 \omega_2 + n_{31} \omega_1 \omega_2 + n_{41} \omega_2 + n_{51} \cos \omega_r t &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
m_{41} &= \frac{2\alpha^2\beta^2}{\rho h}(A_1 + A_2) & m_{21} &= -\frac{32\alpha^2}{3\pi^2\rho h R}(2A_1 + \beta^2 A_9 R) & m_{31} &= \frac{\alpha^2\beta^2}{4\rho h}(18A_4 - A_6 - 2A_3 + 9A_5 + 8A_8) \\
m_{41} &= \frac{1}{\rho h R}[\alpha^2 A_9 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2] & m_{51} &= -\frac{128}{15} \cdot \frac{\alpha^2}{\pi^2\rho h R}(2A_7 + 3\beta^2 A_{10} R) & m_{61} &= -\frac{16}{\pi^2\rho h}Q_r \\
n_{11} &= \frac{8\alpha^2\beta^2}{\rho h}(A_7 + A_8) & n_{21} &= \frac{\alpha^2\beta^2}{4\rho h}(32A_2 + 18A_4 - A_6 + 9A_5 - 2A_3) \\
n_{31} &= -\frac{\alpha^2}{180\pi^2\rho h R}(-3456A_6 + 4608\beta^2 A_9 R + 640A_5 + 10368A_4 + 4608\beta^2 A_{10} R - 1920A_3) \\
n_{41} &= \frac{1}{\rho h R}[DR(4\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2 A_{10}] & n_{51} &= -\frac{64}{\pi^2\rho h}Q_r
\end{aligned}$$

对式(13)进行无量纲化, 无量纲参数为

$$\omega_1 = hq_1 \quad \omega_2 = hq_2 \quad \tau = \omega_1 t = \sqrt{m_{41}} t$$

整理后得

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \xi \dot{q}_1 + m_1 q_1^3 + m_2 q_1^2 + m_3 q_1 q_2^2 + m_4 q_1 + m_5 q_2^2 + m_6 \cos(\Omega\tau) = 0 \\ \ddot{q}_2 + \xi \dot{q}_2 + n_1 q_2^3 + n_2 q_1^2 q_2 + n_3 q_1 q_2 + n_4 q_2 + n_5 \cos(\Omega\tau) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{c}{\rho h \sqrt{m_{41}}} & m_1 &= \frac{m_{11}}{m_{41}} h^2 & m_2 &= \frac{m_{21}}{m_{41}} h & m_3 &= \frac{m_{31}}{m_{41}} h^2 \\
m_4 &= 1 & m_5 &= \frac{m_{51}}{m_{41}} h & m_6 &= \frac{m_{61}}{h m_{41}} & n_1 &= \frac{n_{11}}{m_{41}} h^2 & n_2 &= \frac{n_{21}}{m_{41}} h^2 \\
n_3 &= \frac{n_{31}}{m_{41}} h & n_4 &= \frac{n_{41}}{m_{41}} & n_5 &= \frac{n_{51}}{h m_{41}} & \Omega &= \frac{\omega_r}{\sqrt{m_{41}}}
\end{aligned} \quad (15)$$

2 运动稳定性分析

采用多尺度法^[17-20]求解系统的主共振, 得到系统的自治方程组为

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{2}\xi a - \frac{m_3}{8\Omega} a b^2 \sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + \frac{\bar{Q}_r}{2\Omega} a \sin(2\theta_1) \\ a\dot{\theta}_1 = -\frac{\sigma_1 a}{2\Omega} + \frac{3m_1}{8\Omega} a^3 + \frac{m_3}{4\Omega} a b^2 + \frac{m_3}{8\Omega} a b^2 \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) + \frac{\bar{Q}_r}{2\Omega} a \cos(2\theta_1) \\ \dot{b} = -\frac{1}{2}\xi b + \frac{n_2}{8\Omega} a^2 b \sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + \frac{2\bar{Q}_r}{\Omega} b \sin(2\theta_2) \\ b\dot{\theta}_2 = -\frac{\sigma_2 b}{2\Omega} + \frac{3n_1}{8\Omega} b^3 + \frac{n_2}{4\Omega} a^2 b + \frac{n_2}{8\Omega} a^2 b \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) + \frac{2\bar{Q}_r}{\Omega} b \cos(2\theta_2) \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\bar{Q}_r = m_6 = \frac{1}{4} n_5 \quad \varepsilon \sigma_1 = \Omega^2 - \omega_1^2 \quad \varepsilon \sigma_2 = \Omega^2 - \omega_2^2$$

将上式进行坐标变换, 取

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \theta_1 & x_2 = b \cos \theta_2 \\ y_1 = a \sin \theta_1 & y_2 = b \sin \theta_2 \end{cases} \quad (17)$$

得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}\xi x_1 + \left(\frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{\bar{Q}_r}{2\Omega}\right)y_1 + \frac{3m_1}{8\Omega}(x_1^2 + y_1^2)y_1 + \frac{m_3}{4\Omega}(x_2^2 + y_2^2)y_1 - \frac{m_3}{4\Omega}x_1 x_2 y_2 + \frac{m_3}{8\Omega}y_1(x_2^2 - y_2^2) \\
\dot{y}_1 &= \left(\frac{\bar{Q}_r}{2\Omega} - \frac{\sigma_1}{2\Omega}\right)x_1 - \frac{1}{2}\xi y_1 + \frac{3m_1}{8\Omega}x_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{m_3}{4\Omega}x_1(x_2^2 + y_2^2) + \frac{m_3}{4\Omega}x_2 y_1 y_2 + \frac{m_3}{8\Omega}x_1(x_2^2 - y_2^2) \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}\xi x_2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_2 + \frac{2\bar{Q}_r}{\Omega}\right)y_2 + \frac{3n_1}{8\Omega}(x_2^2 + y_2^2)y_2 + \frac{n_2}{4\Omega}(x_1^2 + y_1^2)y_2 - \frac{n_2}{4\Omega}x_1 x_2 y_1 + \frac{n_2}{8\Omega}y_2(x_1^2 - y_1^2) \\
\dot{y}_2 &= \left(\frac{2\bar{Q}_r}{\Omega} - \frac{\sigma_2}{2\Omega}\right)x_2 - \frac{1}{2}\xi y_2 + \frac{3n_1}{8\Omega}x_2(x_2^2 + y_2^2) + \frac{n_2}{4\Omega}x_2(x_1^2 + y_1^2) + \frac{n_2}{4\Omega}x_1 y_1 y_2 + \frac{n_2}{8\Omega}x_2(x_1^2 - y_1^2)
\end{aligned} \quad (18)$$

2.1 零解的稳定性

求式(18)在 $(0,0,0,0)$ 处的特征值,特征方程为

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \xi\lambda + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4\Omega^2}(\sigma_1^2 - \bar{Q}_r^2) &= 0 \\ \lambda^2 + \xi\lambda + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{4}{\Omega^2}(\frac{\sigma_2^2}{16} - \bar{Q}_r^2) &= 0\end{aligned}\quad (19)$$

特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2}\xi \pm \frac{1}{2\Omega} \sqrt{\bar{Q}_r^2 - \sigma_1^2} \\ \lambda_{3,4} &= -\frac{1}{2}\xi \pm \frac{2}{\Omega} \sqrt{\bar{Q}_r^2 - \frac{\sigma_2^2}{16}}\end{aligned}\quad (20)$$

当周向激励较小时,平凡解是稳定的,随着周向激励的增大,当特征值通过零点时,系统将变得不稳定.当

$$\frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4\Omega^2}(\sigma_1^2 - \bar{Q}_r^2) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{4}\xi^2 + \frac{4}{\Omega^2} \left[\frac{\sigma_2^2}{16} - \bar{Q}_r^2 \right] = 0 \quad (22)$$

时,系统将分别在 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 平面发生分岔,据此,可以得到发生分岔时周向激励满足的条件

$$\bar{Q}_{r1} = \sqrt{\xi^2 \Omega^2 + \sigma_1^2} \quad \bar{Q}_{r2} = \frac{1}{4} \sqrt{\xi^2 \Omega^2 + \sigma_2^2} \quad (23)$$

求解式(23),可得 $\bar{Q}_{r1}, \bar{Q}_{r2} \sim \Omega$ 分岔曲线图,如图3所示,①为 $\bar{Q}_{r1} \sim \Omega$ 曲线,②为 $\bar{Q}_{r2} \sim \Omega$ 曲线, O点对应着系统的双零特征值 $\Omega = \Omega^*, \bar{Q}_r = \bar{Q}_r^*$ 曲线①,②将整个平面分为4个区域 I, II, III, IV, 其中 I 为零解稳定区; II, III 为单模态运动区,此时径向简谐激励(以下简称外激励) $\bar{Q}_r$ 通过曲线①,系统产生 $a \neq 0, b = 0$ 单模态运动; IV 为复合模态运动区,此时外激励 $\bar{Q}_r$ 同时通过曲线①和

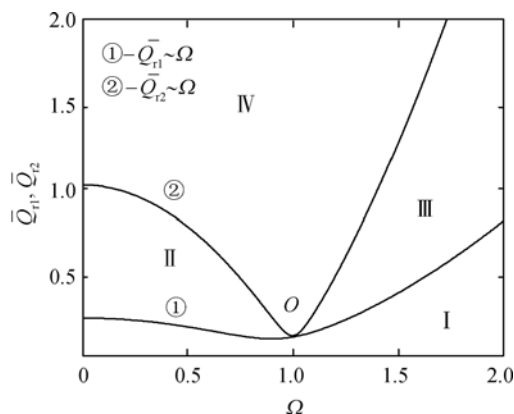


图3 $\bar{Q}_{r1}, \bar{Q}_{r2} \sim \Omega$ 分岔曲线图

Fig. 3 Bifurcation diagram of $\bar{Q}_{r1}, \bar{Q}_{r2} \sim \Omega$

曲线②,系统产生 $a \neq 0, b \neq 0$ 双模态运动.通过分析发现,外激励 $\bar{Q}_r$ 处于 II, III 区时,系统的振动可以用单模态位移来表示,但当外激励处于 IV 区,则必须用复合模态位移来表示,否则会造成较大的误差甚至错误.

2.2 非零解的稳定性

下面讨论非零解的两种情况:

1) $a \neq 0, b = 0$

$$\begin{aligned}a^* &= 2 \left[\frac{\sigma_1}{3m_1} \pm \frac{\bar{Q}_r}{3m_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi\Omega}{\bar{Q}_r} \right)^2} \right]^{1/2} \\ \sin(2\theta_1^*) &= \frac{\xi\Omega}{\bar{Q}_r}\end{aligned}\quad (24)$$

第1阶模态运动的稳定性决定于方程(16)在点 (a^*, θ_1^*) 的特征值,特征方程为

$$\lambda^2 + \xi a^* \lambda + D_1 = 0 \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned}D_1 &= \frac{1}{2} \xi^2 a^* - \frac{\bar{Q}_r^2}{2\Omega^2} a^* + \frac{\sigma_1 \bar{Q}_r}{2\Omega^2} \cos(2\theta_1^*) \cdot a^* - \\ &\quad \frac{9m_1 \bar{Q}_r}{8\Omega^2} \cos(2\theta_1^*) \cdot a^{*3}\end{aligned}\quad (26)$$

当 $D_1 = 0$ 时,单模态运动失稳,发生简单分岔,导致复合模态运动.其物理意义是单模态运动在一定条件下会引起复合模态运动,使系统的能量从一个模态传递到另一个模态.

2) $a = 0, b \neq 0$

$$\begin{aligned}b^* &= 2 \left[\frac{\sigma_2}{3n_1} \pm \frac{4\bar{Q}_r}{3n_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi\Omega}{4\bar{Q}_r} \right)^2} \right]^{1/2} \\ \sin(2\theta_2^*) &= \frac{\xi\Omega}{4\bar{Q}_r}\end{aligned}\quad (27)$$

第2阶模态运动的稳定性决定于方程式(18)在点 (b^*, θ_2^*) 的特征值,特征方程为

$$\lambda^2 + \xi b^* \lambda + D_2 = 0 \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned}D_2 &= \frac{1}{2} \xi^2 b^* - \frac{8\bar{Q}_r^2}{\Omega^2} b^* + \frac{2\sigma_2 \bar{Q}_r}{\Omega^2} \cos(2\theta_2^*) \cdot b^* - \\ &\quad \frac{9n_1 \bar{Q}_r}{2\Omega^2} \cos(2\theta_2^*) \cdot b^{*3}\end{aligned}\quad (29)$$

同理,当 $D_2 = 0$ 时,单模态运动失稳,发生简单分岔,导致复合模态运动.其物理意义是单模态运动在一定条件下会引起复合模态运动,使系统的能量从一个模态传递到另一个模态.

图4为双模态位移 a, b 与外激励 $\bar{Q}_r$ 的关系,图5和图6分别为图4在 $a \sim \bar{Q}_r$ 与 $b \sim \bar{Q}_r$ 上的投影,图4中 A 段曲线位于 $a \sim \bar{Q}_r$ 面内,图5中 AA'段曲线与图6中 BB'段曲线为系统求解过程

中产生的不稳定解, 当外激励 $\bar{Q}_r$ 较小时系统第 2 阶模态位移为 0, 此时只有第 1 阶模态位移, $a \neq 0, b = 0$, 对应图 4 中 A 段曲线; 随着外激励的增大, 当外激励 $\bar{Q}_r$ 增大到图 4 中的 B, C 两点时, 系统由单模态位移变为双模态位移 $a \neq 0, b \neq 0$.

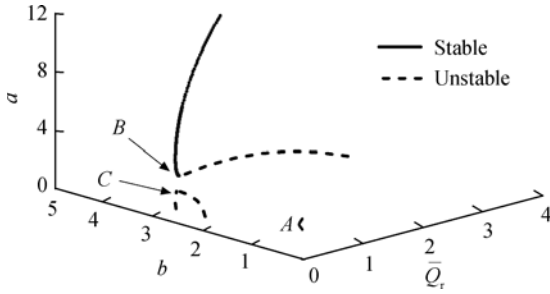


图 4 双模态位移 a, b 与外激励 $\bar{Q}_r$ 的关系

Fig. 4 Relationship of dual-mode displacements a, b and external excitation $\bar{Q}_r$

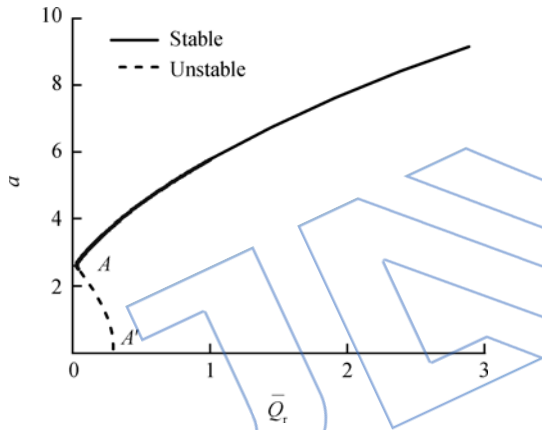


图 5 第 1 阶模态位移 a 与外激励 $\bar{Q}_r$ 的关系

Fig. 5 Relationship of first mode displacement a and external excitation $\bar{Q}_r$

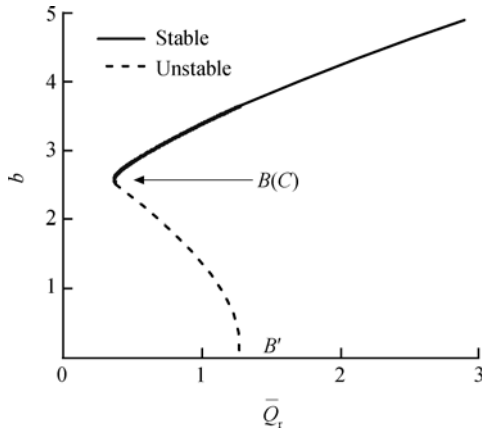


图 6 第 2 阶模态位移 b 与外激励 $\bar{Q}_r$ 的关系

Fig. 6 Relationship of second mode displacement b and external excitation $\bar{Q}_r$

3 机匣振动特性的数值模拟

航空发动机在长期的工作过程中, 由于叶片与机匣之间的不断碰撞摩擦, 以及各种气流影响, 径向激励表现明显, 本节应用数值方法, 对机匣在外激励下的振动特性进行了分析. 数值模拟参数如下^[15]:

$$L = 1 \text{ m}$$

$$R = 0.1 \text{ m}$$

$$h = 0.0015 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{L} \text{ m}^{-1}$$

$$\beta = \frac{\pi}{R} \text{ m}^{-1}$$

$$E = 6.97 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$\rho = 2.78 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 0.3$$

$$c = 1.67 \times 10^7 \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s)} \quad (30)$$

图 7 为 ω_1 随 Q_r 变化的分岔图 (ω_1 为第 1 阶模态实际位移, Q_r 为实际外激励), 图 8~图 15 为 Q_r 取不同数值时单双模态位移的数值模拟结果.

由图 7 我们发现, 在参数式 (30) 下, 随着 Q_r 的增大, 机匣的第 1 阶模态的位移出现周期 1 运动 (图 8) → 混沌 (图 10) → 周期 3 运动 (图 12) → 混沌 (图 14). 其中发生周期 1 运动时 Q_r 区间为 0~0.44 MPa, 发生周期 3 运动时 Q_r 区间为 1.45~2.2 MPa, 发生混沌运动的两个区间分别为 0.44~1.45 MPa 和 2.2~3.0 (+∞) MPa, 由于混沌运动的复杂性, 航空发动机在工作时, 应控制风扇的转速, 使旋转气流外激励尽量避开可能导致混沌运动的区域.

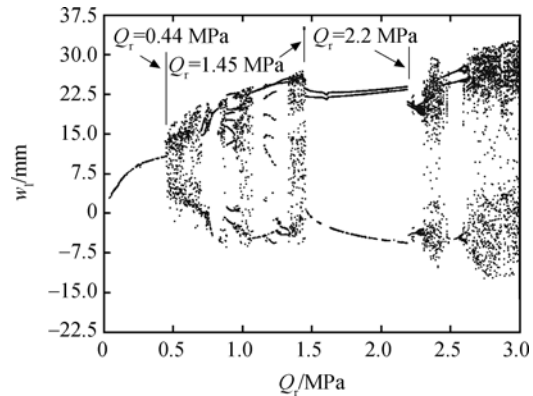


图 7 ω_1 随 Q_r 变化的分岔图

Fig. 7 Bifurcation diagram of ω_1 varying with Q_r

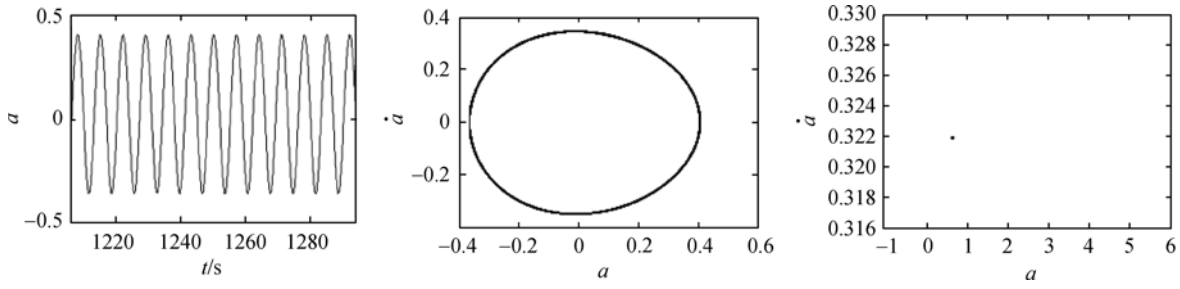


图8 双模态位移 a 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=0.1 \text{ MPa}$)

Fig. 8 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement a
($\Omega=0.9, Q_r=0.1 \text{ MPa}$)

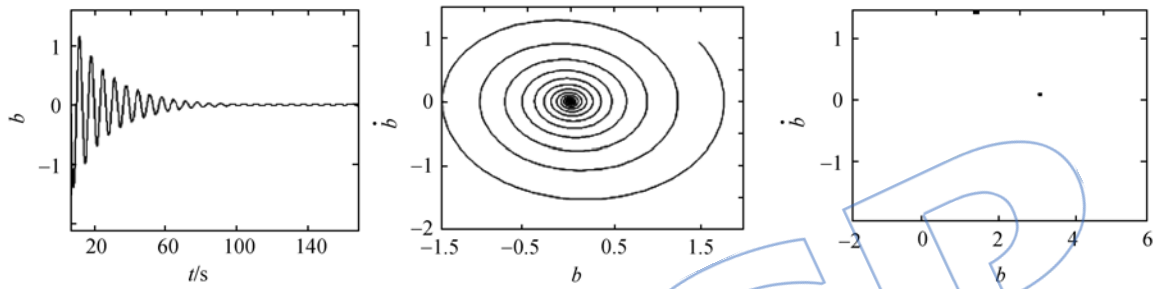


图9 双模态位移 b 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=0.1 \text{ MPa}$)

Fig. 9 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement b
($\Omega=0.9, Q_r=0.1 \text{ MPa}$)

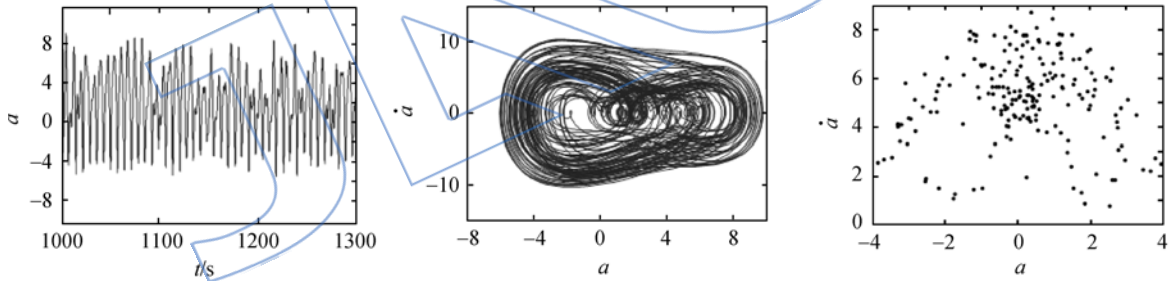


图10 双模态位移 a 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=0.8 \text{ MPa}$)

Fig. 10 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement a
($\Omega=0.9, Q_r=0.8 \text{ MPa}$)

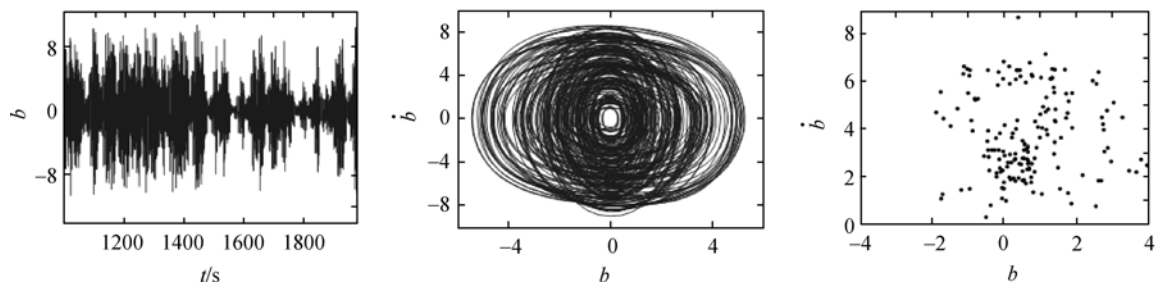


图11 双模态位移 b 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=0.8 \text{ MPa}$)

Fig. 11 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement b
($\Omega=0.9, Q_r=0.8 \text{ MPa}$)

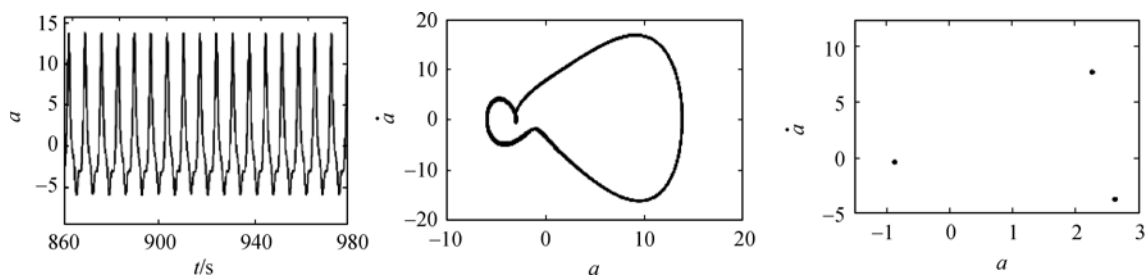


图 12 双模态位移 a 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=2 \text{ MPa}$)

Fig. 12 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement a ($\Omega=0.9, Q_r=2 \text{ MPa}$)

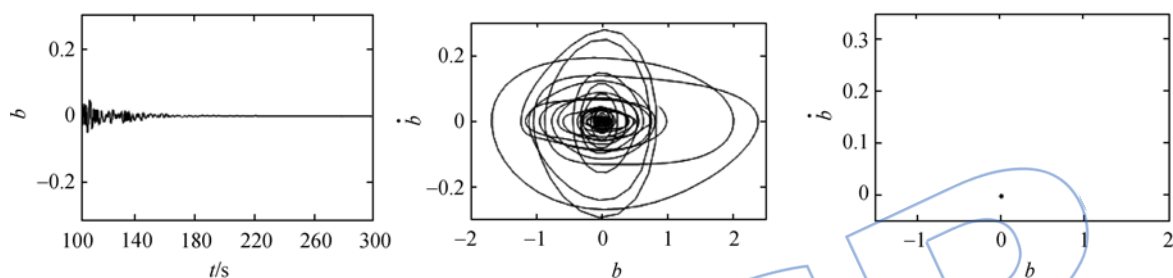


图 13 双模态位移 b 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=2 \text{ MPa}$)

Fig. 13 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement b ($\Omega=0.9, Q_r=2 \text{ MPa}$)

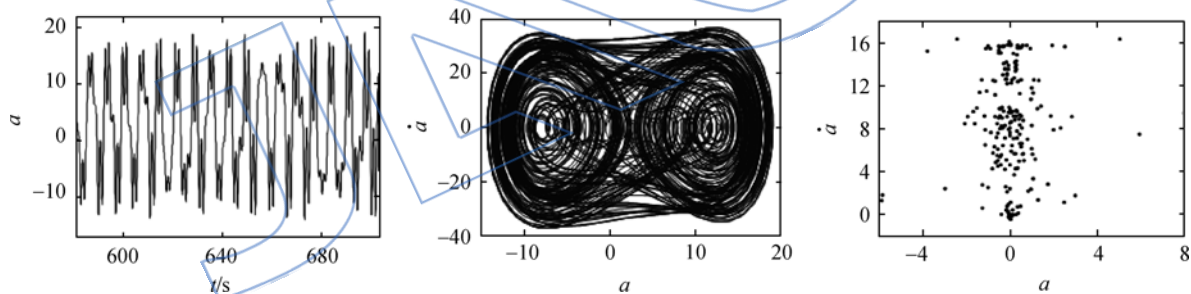


图 14 双模态位移 a 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=2.4 \text{ MPa}$)

Fig. 14 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement a ($\Omega=0.9, Q_r=2.4 \text{ MPa}$)

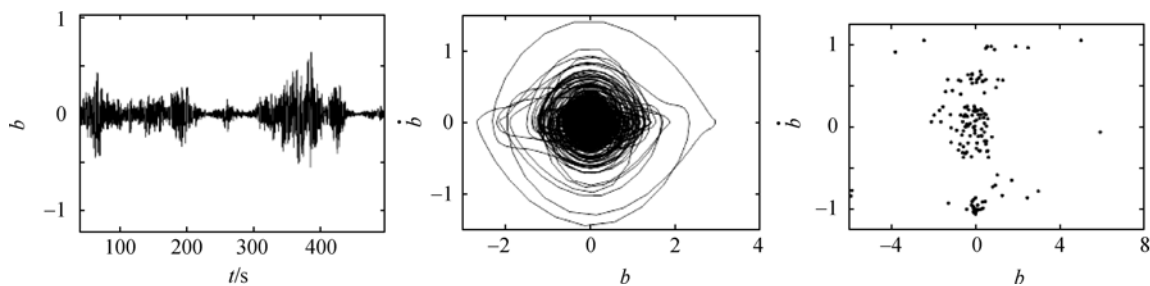


图 15 双模态位移 b 的时间历程、相轨迹图和 Poincaré 映射图 ($\Omega=0.9, Q_r=2.4 \text{ MPa}$)

Fig. 15 Diagram of time history, phase trajectory, Poincaré map of dual-mode displacement b ($\Omega=0.9, Q_r=2.4 \text{ MPa}$)

4 结 论

本文将航空发动机机匣简化为一端简支一端固支的圆柱壳结构,根据圆柱壳薄壁结构的几何特征,建立了机匣振动的动力学方程,分析了径向简谐激励下机匣振动方程的零解及非零解的稳定性并研究了系统能量在模态之间的转移过程,研究结论结下:

1) 对系统零解和非零解稳定性的分析表明,当外激励力较小时为零解稳定区(图3, I区),随着外激励的增大,系统出现第1阶模态位移(图3, II, III区),随着外激励进一步增大,系统出现双模态位移(图3, IV区);当外激励处于IV区时,系统位移须用复合模态位移来表示,否则会造成较大的误差甚至错误。

2) 通过数值模拟发现,随着实际外激励 Q 的不断增大,机匣运动的第1阶模态实际位移 w_1 出现:周期1运动→混沌→周期3运动→混沌的运动模式,其中发生混沌运动的两个 Q 区间为 $0.44 \sim 1.45 \text{ MPa}$ 和 $2.2 \sim 3.0 (+\infty) \text{ MPa}$,通过控制航空发动机的转速或者改变机匣的几何参数,使航空发动机工作时避开发生在混沌区间,从而避免由于振动失稳而导致的机匣开裂。

参考文献:

- [1] 《航空发动机设计手册》总编委会. 航空发动机设计手册: 第19册 转子动力学和整机振动[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.
- [2] 陈予恕, 张华彪. 航空发动机整机动力学研究进展与展望[J]. 航空学报, 2011, 32(8): 1371-1391.
CHEN Yushu, ZHANG Huabiao. Review and prospect on the research of dynamics of complete aero-engine systems[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(8): 1371-1391. (in Chinese)
- [3] 宣海军, 陆晓, 洪荣伟, 等. 航空发动机机匣包容性研究综述[J]. 航空动力学报, 2010, 25(8): 1860-1870.
XUAN Haijun, LU Xiao, HONG Rongwei, et al. Review of aero-engine case containment research[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(8): 1860-1870. (in Chinese)
- [4] 王桂华, 李琳. 航空发动机风扇机匣行波振动的分析方法[J]. 航空动力学报, 2000, 15(2): 183-186.
WANG Guihua, LI Lin. Method for traveling wave vibration analysis of fan casing in aero engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2000, 15(2): 183-186. (in Chinese)
- [5] 蔡显新, 肖新红, 王涛, 等. 风扇机匣的减振优化设计[J]. 航空动力学报, 2010, 25(2): 396-401.
CAI Xianxin, XIAO Xinhong, WANG Tao, et al. Optimization design of a fan casing for reducing vibration[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(2): 396-401. (in Chinese)
- [6] 许棠, 范引鹤. 发动机机匣低循环疲劳寿命的预测[J]. 南京航空学院学报, 1990, 22(2): 1-9.
XU Tang, FAN Yinhe. Prediction of low cycle fatigue life of engine casing[J]. Journal of Nanjing Aeronautical Institute, 1990, 22(2): 1-9. (in Chinese)
- [7] 齐红宇, 温卫东. 复杂载荷下复合材料机匣结构稳定性的数值分析[J]. 航空制造技术, 2003, 12(7): 35-38.
QI Hongyu, WEN Weidong. Numerical analysis of structural stability of the composite case under complicated loads[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2003, 12(7): 35-38. (in Chinese)
- [8] 晏砺堂. 涡轮机轴流叶轮盘行波振动研究[J]. 航空动力学报, 1990, 5(1): 35-38.
YAN Litang. Study on travelling wave vibration of bladed disks in turbomachinery[J]. Journal of Aerospace Power, 1990, 5(1): 35-38. (in Chinese)
- [9] 苏志敏. 航空薄壁柱壳结构在噪声激励下振动响应的研究[D]. 沈阳: 沈阳航空工业学院, 2007.
- [10] 吴元东, 漆文凯. 某发动机模拟机匣的模态分析与模型验证[J]. 机械科学与技术, 2010, 29(11): 1487-1492.
WU Yuandong, QI Wenkai. Modal analysis and model verification of an aero-engine casing[J]. Mechanical Science and Technology, 2010, 29(11): 1487-1492. (in Chinese)
- [11] Rougui M, Moussaoui F, Benamar R. Geometrically non-linear free and forced vibrations of simply supported circular cylindrical shells[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2007, 4(2): 1102-1115.
- [12] 齐欢欢, 徐鉴. Galerkin 模态截断对计算悬臂输液管道固有频率的影响[J]. 振动与冲击, 2011, 30(1): 148-151.
QI Huanhuan, XU Jian. Effect of Galerkin modal truncation on natural frequency analysis of a cantilevered pipe conveying fluid[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(1): 148-151. (in Chinese)
- [13] 韩强. 非线性大挠度壳的混沌运动[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2000, 28(8): 1-5.
HAN Qiang. Chaotic motion in a cylindrical shell with the nonlinear large deflection[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2000, 28(8): 1-5. (in Chinese)
- [14] Paliwal D N, Rajesh K P, Triloki N. Free vibration of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundations[M]. [S. l.]: Elsevier Science Publishers, 1996.
- [15] 杜建成, 韩强. 非线性双曲扁薄壳的混沌运动[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2002, 30(7): 18-27.
DU Jiancheng, HAN Qiang. Chaotic motion of the non-linear hyperbolic flat thin shell[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2002, 30(7): 18-27. (in Chinese)
- [16] 杜建成. 非线性板壳的分岔与混沌运动[D]. 广州: 华南理工大学, 2003.
DU Jiancheng. Bifurcation and chaotic motion of the non-linear plate and shell[D]. Guangzhou: South China

- University of Technology, 2003. (in Chinese)
- [17] 秦朝红, 陈予恕, 李军. $1:1$ 内共振悬索的二维奇异性分析[J]. 应用数学和力学, 2010, 31(2): 134-142.
- QIN Zhaohong, CHEN Yushu, LI Jun. Singular analysis of two-dimensional elastic cable with $1:1$ internal resonance [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(2): 134-142. (in Chinese)
- [18] 陈予恕, 杨彩霞, 吴志强, 等. 具有平方、立方非线性项的耦合动力学系统 $1:2$ 内共振分岔[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(8): 817-824.
- CHEN Yushu, YANG Caixia, WU Zhiqiang, et al. $1:2$ internal resonance of coupled dynamic system with quadratic and cubic nonlinearities[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(8): 817-824. (in Chinese)
- [19] 秦朝红. 非线性动力学双参量奇异性方法及其工程应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010.
- QIN Zhaohong. Singularity method for nonlinear dynamical analysis of systems with two parameters and its application in engineering [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2010. (in Chinese)
- [20] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991.