

间隙约束二元翼段系统分岔与多解共存现象分析

尹磊磊, 张思进, 文桂林, 徐慧东

(湖南大学 机械与运载工程学院, 长沙 410082)

摘 要: 研究了分段刚度描述的间隙约束二元翼段气动弹性系统, 取俯仰角最大幅值处为类 Poincaré 截面, 数值计算得到了系统随飞行速度变化的分岔图, 发现飞行速度在 $Ma=0.71\sim 0.75$ 属于跨临界颤振区, 而在 $Ma=0.75\sim 0.95$ 发生极限环震荡. 同时通过构造极限环震荡的四维 Poincaré 映射分析了极限环震荡的稳定性, 结合稳定性和运动流形理论, 得到极限环震荡的吸引域一般位于极限环内部并用数值方法进行了验证. 且跨临界颤振速度区域中存在多种分岔形式以及多解共存现象, 例如由双周期运动直接通向混沌、多周期运动与双周期运动共存现象, 振动幅值也存在跳跃现象.

关 键 词: 间隙非线性; 二元翼段; 极限环震荡; 类 Poincaré 截面; 分岔; 吸引域

中图分类号: V211.41; V211.3

文献标志码: A

Analysis on the system bifurcation and coexistence of multiple solutions for typical airfoil section with freeplay

YIN Lei-lei, ZHANG Si-jin, WEN Gui-lin, XU Hui-dong

(College of Mechanical and Vehicle Engineering,
Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The typical airfoil section system with freeplay described by a piecewise-stiffness model was studied. The pitch angle at the maximum amplitude was chosen as the quasi-Poincaré sections to obtain numerically the bifurcation diagram with change of flight speed. It was found the trans-critical flutter area was located on flight speed of $Ma=0.71-0.75$ and limit cycle oscillation area located on flight speed of $Ma=0.75-0.95$ based on the bifurcation diagram. The stability of limit cycle oscillation was analyzed through the constructed four-dimensional map. According to the stability and motion manifold theory, it was learnt that the attraction basin of the limit cycle oscillation was located in the interior region of limit cycle, which was validated by the numerical method at last. At the same time, the coexistence of multiple solutions and various forms of bifurcation phenomena were found in trans-critical flutter area, such as the direct transition from double periodic motion to chaos, the coexistence of multiple periodic motion and double periodic motion, and the phenomenon of jump on amplitude.

Key words: freeplay nonlinearity; typical airfoil section system; limit cycle oscillation; quasi-Poincaré section; bifurcation; attraction basin

收稿日期: 2013-04-08

基金项目: 国家杰出青年科学基金(11225212); 国家自然科学基金(11372101, 11002052)

作者简介: 尹磊磊(1989-), 男, 湖北汉川人, 硕士生, 主要从事非光滑动力学研究.

通讯作者: 张思进(1971-), 男, 安徽潜山人, 教授, 主要从事非光滑动力学、动力学控制、复合材料动力学及分岔控制理论等方面的研究.

含间隙约束结构(接触问题)的气动弹性问题在航空航天工程应用方面广泛存在,例如折叠翼、操作舵.对不含间隙约束的气动弹性问题的研究已经做了比较多的工作,Theodorsen 非定常气动力理论被广泛用于气动弹性问题的计算和分析^[1-2].数值仿真和风洞实验也为气动弹性计算提供了仿真结果和实验数据^[3-5].非线性气动弹性问题的求解方法是研究中的一个重点^[6-9].极限环震荡一般是由不稳定焦点产生 Hopf 分岔形成的,对这类极限环震荡的研究工作已经做了很多^[10-11].另外对机翼颤振的主动控制也做了不少工作^[12-14].

当考虑含间隙约束的气动弹性问题,目前研究得还比较少.任爱娣等通过数值仿真研究了不对称间隙的气动弹性非线性与结构非线性机翼的全局演化规律,根据数值结果提出了几种控制和减小颤振的方法^[15].赵永辉等对操纵面自由度具有间隙非线性的二维翼段数值仿真,结果表面表明操纵面铰链处存在的间隙非线性将导致整个系统的极限环震荡;随着来流速度的增加,系统极限环震荡的幅值和频率都存在跳跃现象^[16],但这些数值仿真结果注意到系统出现的复杂分岔和多解共存现象.Zhang 等采用接触前后分段系统线性解构造该间隙约束翼段系统产生极限环震荡的四维 Poincaré 映射,用解析方法分析了系统的震荡频率随飞行速度的变化关系^[17],但只是对极限环震荡频率进行了分析.

本文研究含间隙约束的二元翼段系统在气动力作用下的分岔问题,由常微分方程理论,得到系统发生颤振的速度区域,取仰角幅值处为类 Poincaré 截面,通过数值模拟,在整个颤振速度区域内建立系统随气流速度变化的分岔图.根据分岔图,可以将颤振速度区域分成两个部分:极限环颤振区域和跨临界颤振区域.在极限环颤振区域,根据接触前后分段系统的线性解构造了该系统产生极限环震荡的四维 Poincaré 映射,计算了不动点处雅克比矩阵特征值,来判断极限环震荡的稳定性;然后结合稳定性和微分流形理论,表明极限环震荡和拟周期运动共存时极限环吸引域一般位于极限环内部,并用数值方法进行了验证.而在跨临界颤振区域中发现系统存在多种非线性运动现象,分岔形式以及多解共存现象,例如由双周期运动直接通向混沌、多周期运动与双周期运动共存现象幅值存在跳跃现象,且跨临界颤振区是系统由收敛到发生极限环颤振的过渡区域,研究其运

动形式更具实际意义.

1 含间隙约束的二元翼段模型

考虑图 1 所示的含间隙约束的二元翼段,翼段宽度为 $2b$, γb 为刚度中心到宽度中心的距离.单位长度质量为 m ; I_a 为翼段转动惯量, S_a 为惯性积; a_0 为翼形系数, ρ 是空气密度.假定其弯曲和扭转方向分别存在大小为 δ_0 和 φ_0 的间隙,接触前弯曲和扭转刚度分别为 k_h 和 k_a ,当接触后,刚度相应的增加 k_h^c 和 k_a^c .采用准定常气动力模型,二元翼段的气动弹性模型可以表示为

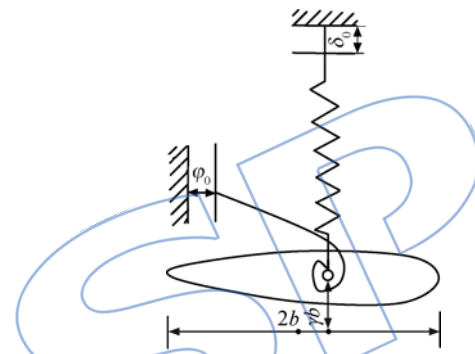


图 1 含间隙约束的二元翼段示意图

Fig. 1 Sketch of typical airfoil section system with freeplay

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_a\ddot{\alpha} + K_h^{\mp}h + \rho V^2 b a_0 \times \\ [\alpha + \dot{h}/V + (1/2 - \gamma)b\dot{\alpha}/V] = 0 \\ S_a\ddot{h} + I_a\ddot{\alpha} + K_a^{\mp}\alpha + 2\rho V^2 b^2 \times \\ \{b\pi\dot{\alpha}/(4V) - (1/4 + \gamma/2)a_0 \times \\ [\alpha + \dot{h}/V + (1/2 - \gamma)b\dot{\alpha}/V]\} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 h, α 分别表示翼段沉浮和俯仰方向的位移和转角; V 是翼段的飞行速度; $K_h^{\mp}, K_a^{\mp}$ 表示接触前后系统的弯曲刚度和扭转刚度,通常表示为以下分段形式:

$$\begin{aligned} K_h^{\mp} &= \begin{cases} k_h & |h| \leq \delta_0 \\ k_h + k_h^c & |h| > \delta_0 \end{cases} \\ K_a^{\mp} &= \begin{cases} k_a & |\alpha| \leq \varphi_0 \\ k_a + k_a^c & |\alpha| > \varphi_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

式中上标“ $-$ ”,“ $+$ ”分别表示接触前、后系统的参数.例如: $K_a^- = k_a$, 而 $K_a^+ = k_a + k_a^c$. 本文计算参数分别为

$$m = 104 \text{ kg/m}, \quad b = 1 \text{ m}, \quad \gamma = 0.2, \quad a_0 = 2\pi$$

$$k_a = 1.4 \times 10^6 \text{ N}, \quad k_h = 0.9 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$k_a^c = 0.8 k_a, \quad S_a = 26 \text{ kg}$$

$$I_a = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}, \quad \varphi_0 = 0.03$$

接触前后刚度的改变引起系统中弹性力改变,其变化如图2所示.

式(1)为分段光滑动力学系统,其振动解由两段线性解在切换面 $|\alpha| = \varphi_0$ 或者 $|h| = \delta_0$ 处拼接而成. 经过无数次切换后系统解十分复杂,具有很多非线性系统的特点,如分岔和混沌等.

由式(1)即可得到接触前后各个线性系统的颤振频率和颤振速度

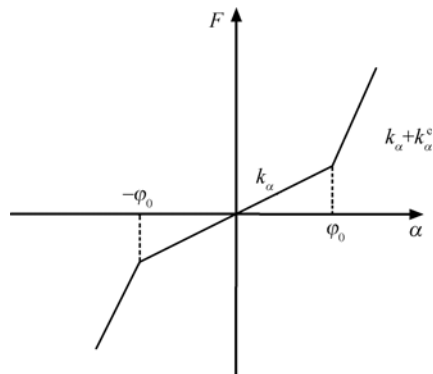


图2 弹性力模型

Fig. 2 Elastic force model

$$\begin{cases} \omega_0^\pm = \sqrt{\frac{\gamma^2 b^2 K_h^\pm + K_a^\pm}{\gamma b (2S_a + m\gamma b) + I_a}} \\ V_0^\pm = \sqrt{\frac{(mI_a - S_a^2)\omega_0^4 - (I_a K_h^\pm + mK_a^\pm)\omega_0^2 + K_h^\pm K_a^\pm}{\pi b \rho [\pi b^3 \rho - 2S_a - mb(1 + 2\gamma)]\omega_0^2 + \pi^2 b^2 \rho (1 + 2\gamma K_h^\pm)}} \end{cases} \quad (3)$$

通过对式(3)进行分析,扭转刚度 k_a 对系统颤振速度的影响远大于弯曲刚度 k_h 的影响,本文仅考虑扭转刚度的变化,而假设 $K_h^\pm = k_h$. 含间隙约束的二元翼段系统在飞行速度介于 (V_0^-, V_0^+) 之间时,由于接触前后系统的扭转刚度不同,当扭转刚度为 K_a^+ 时,系统振动解收敛;当扭转刚度为 K_a^- 时,系统振动解发散. 意味着发散和收敛的解支无限交替出现,从而导致很多非线性振动现象的产生. 这里 (V_0^-, V_0^+) 称为间隙约束系统发生颤振的飞行速度区域,取仰角最大幅值处为类 Poincaré 截面,在颤振速度区域数值计算了系统随分析速度变化的分岔图,如图3. 发现系统在大部分速度区域是发生极限环颤振;随着飞行速度增加,经过跨临界颤振区才能到达极限环颤振区,

而在跨临界颤振区域中系统存在多种非线性运动和分岔形式以及多解共存现象. 下面通过构造四维 Poincaré 映射对系统极限环震荡及其稳定性进行分析;同时对跨临界颤振区域的其他非线性现象分析.

2 系统的极限环震荡及稳定性分析

极限环颤振区域系统发生极限环震荡,首先对系统的极限环震荡及其稳定性分析.

2.1 系统的平衡点分析

将系统方程(式(1))写成状态变量的1阶微分方程组, $\mathbf{J}$ 是系数矩阵. 其中 v 和 β 分别为弯曲速度和扭转角速度.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x} \quad (4)$$

且

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = [h, v, \alpha, \beta]^T$$

对任意的翼段的飞行速度 V 可以求解系数矩阵 $\mathbf{J}$ 的特征值,显然 $(0, 0, 0, 0)$ 是系统的平衡点.

2.2 周期一极限环震荡及其稳定性分析

首先我们根据分段系统线性解构造系统产生周期一极限环震荡的四维 Poincaré 映射. 定义 $\Sigma^+ = \{\alpha = \varphi_0, \beta > 0\}$ 为 Poincaré 截面,则极限环运动的分段示意图,如图4.

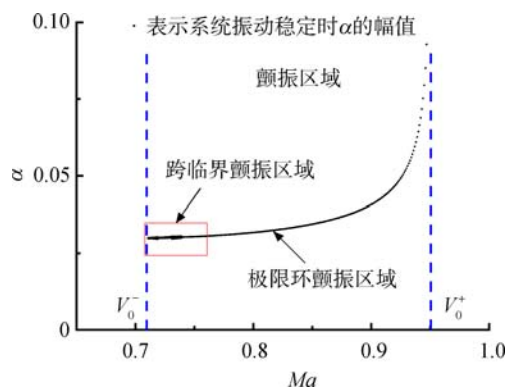


图3 二元翼段系统随飞行速度的分岔图

Fig. 3 Bifurcation diagram of typical airfoil section system with the flight speed

当飞行速度介于 (V_0^-, V_0^+) 时,系统的解可以表示为分段形式

$$\begin{aligned} h &= e^{\mu_1^\mp(t-t_0)} [\xi_1 \cos \omega_1^\mp(t-t_0) + \xi_2 \sin \omega_1^\mp(t-t_0)] + \\ &e^{\mu_2^\mp(t-t_0)} [\xi_3 \cos \omega_2^\mp(t-t_0) + \xi_4 \sin \omega_2^\mp(t-t_0)] \\ \alpha &= \overline{\lambda_1} e^{\mu_1^\mp(t-t_0)} \{ \xi_1 \cos [\omega_1^\mp(t-t_0) + \Delta\varphi_1] + \xi_2 \sin [\omega_1^\mp(t-t_0) + \Delta\varphi_1] \} + \\ &\overline{\lambda_2} e^{\mu_2^\mp(t-t_0)} \{ \xi_3 \cos [\omega_2^\mp(t-t_0) + \Delta\varphi_2] + \xi_4 \sin [\omega_2^\mp(t-t_0) + \Delta\varphi_2] \} \end{aligned} \quad (5)$$

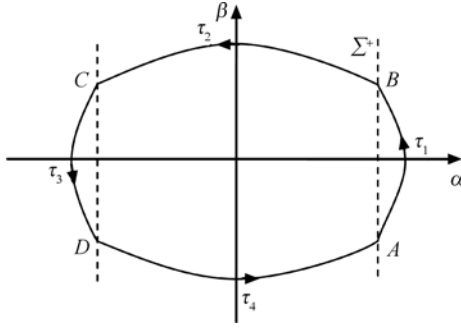


图4 极限环运动分段示意图

Fig. 4 Sketch of piece-wise limit circle motion

其中 μ 和 ω 分别是分段线性方程(4)系数矩阵的特征根实部和虚部; h 和 α 幅值比例为一复数, $\bar{\lambda}$ 和 $\Delta\varphi$ 分别为复数的模和幅角;上标“ $-$ ”,“ $+$ ”分别对应接触前后系统的参量.系数 $\xi_1 \sim \xi_4$ 由初始

条件决定.

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T = \mathbf{C}^\mp(h_0, u_0, \alpha_0, \beta_0)^T \quad (6)$$

将初始时刻 $t = t_0$ 时,系统初值为 $(h_0, u_0, \alpha_0, \beta_0)$ 代入式(5)可以求解矩阵 $\mathbf{C}^\mp$.

根据系统解的分段形式可构造以下映射:

$$\mathbf{P}: \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$$

$$(h_0, u_0, \varphi_0, \beta_0)^T \rightarrow \mathbf{P} \cdot (h_0, u_0, \varphi_0, \beta_0)^T \quad (7)$$

映射 $\mathbf{P}$ 由以下4部分子映射复合而成.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_4^+ \cdot \mathbf{P}_3^+ \cdot \mathbf{P}_2^+ \cdot \mathbf{P}_1^+ \quad (8)$$

其中 $\mathbf{P}_i^+ = |Q_{nm}^+(\tau_i)|_{4 \times 4}, i=1,3$;表示AB和CD解支起始点与终止点的映射关系; $\mathbf{P}_j^- = |Q_{nm}^-(\tau_j)|_{4 \times 4}, j=2,4$;表示BC和DA解支起始点与终止点的映射关系;矩阵元素 $Q_{nm}^+(\tau_i)$ 和 $Q_{nm}^-(\tau_j)$ 形式一样,矩阵元素 $Q_{nm}^+(\tau_i)$ 的具体表达式如下:

$$\begin{aligned} Q_{1n}^+(\tau_i) &= e^{\mu_1^+ \tau_i} (C_{1n}^+ \cos \omega_1^+ \tau_i + C_{2n}^+ \sin \omega_1^+ \tau_i) + e^{\mu_2^+ \tau_i} (C_{3n}^+ \cos \omega_2^+ \tau_i + C_{4n}^+ \sin \omega_2^+ \tau_i) \\ Q_{2n}^+(\tau_i) &= \mu_1^+ e^{\mu_1^+ \tau_i} (C_{1n}^+ \cos \omega_1^+ \tau_i + C_{2n}^+ \sin \omega_1^+ \tau_i) + \mu_2^+ e^{\mu_2^+ \tau_i} (C_{3n}^+ \cos \omega_2^+ \tau_i + C_{4n}^+ \sin \omega_2^+ \tau_i) + \\ &\omega_1^+ e^{\mu_1^+ \tau_i} (-C_{1n}^+ \sin \omega_1^+ \tau_i + C_{2n}^+ \cos \omega_1^+ \tau_i) + \omega_2^+ e^{\mu_2^+ \tau_i} (-C_{3n}^+ \sin \omega_2^+ \tau_i + C_{4n}^+ \cos \omega_2^+ \tau_i) \\ Q_{3n}^+(\tau_i) &= \overline{\lambda_1^+} e^{\mu_1^+ \tau_i} [C_{1n}^+ \cos (\omega_1^+ \tau_i + \Delta\varphi_1^+) + C_{2n}^+ \sin (\omega_1^+ \tau_i + \Delta\varphi_1^+)] + \\ &\overline{\lambda_2^+} e^{\mu_2^+ \tau_i} [C_{3n}^+ \cos (\omega_2^+ \tau_i + \Delta\varphi_2^+) + C_{4n}^+ \sin (\omega_2^+ \tau_i + \Delta\varphi_2^+)] \\ Q_{4n}^+(\tau_i) &= \mu_1^+ \overline{\lambda_1^+} e^{\mu_1^+ \tau_i} [C_{1n}^+ \cos (\omega_1^+ \tau_i + \Delta\varphi_1^+) + C_{2n}^+ \sin (\omega_1^+ \tau_i + \Delta\varphi_1^+)] + \\ &\mu_2^+ \overline{\lambda_2^+} e^{\mu_2^+ \tau_i} [C_{3n}^+ \cos (\omega_2^+ \tau_i + \Delta\varphi_2^+) + C_{4n}^+ \sin (\omega_2^+ \tau_i + \Delta\varphi_2^+)] + \\ &\omega_1^+ \overline{\lambda_1^+} e^{\mu_1^+ \tau_i} [-C_{1n}^+ \sin (\omega_1^+ \tau_i + \Delta\varphi_1^+) + C_{2n}^+ \cos (\omega_1^+ \tau_i + \Delta\varphi_1^+)] + \\ &\omega_2^+ \overline{\lambda_2^+} e^{\mu_2^+ \tau_i} [-C_{3n}^+ \sin (\omega_2^+ \tau_i + \Delta\varphi_2^+) + C_{4n}^+ \cos (\omega_2^+ \tau_i + \Delta\varphi_2^+)] \end{aligned}$$

考虑接触对称性,映射 $\mathbf{P}$ 可以表示为

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_2^- \cdot \mathbf{P}_1^+)^2 \quad (9)$$

轨线上的切换点A,B,C和D满足

$$|\alpha(\tau_i)| = \varphi_0 \quad i=0,1,2,3 \quad (10)$$

考虑相轨迹由A运动到B代入式(10)可以得到

$$\begin{aligned} \overline{\lambda_1} e^{\mu_1^+ \tau_1} [\xi_1 \cos (\omega_1^+ \tau_1 + \Delta\varphi_1) + \xi_2 \sin (\omega_1^+ \tau_1 + \Delta\varphi_1)] + \\ \overline{\lambda_2} e^{\mu_2^+ \tau_1} [\xi_3 \cos (\omega_2^+ \tau_1 + \Delta\varphi_2) + \\ \xi_4 \sin (\omega_2^+ \tau_1 + \Delta\varphi_2)] = \varphi_0 \end{aligned} \quad (11)$$

对于周期一极限环运动,需求解如下的表达式,其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵,则

$$[(\mathbf{P}_2^- \cdot \mathbf{P}_1^+)^2 - \mathbf{I}] \cdot (h_0, u_0, \varphi_0, \beta_0)^T = 0 \quad (12)$$

要使该齐次方程有解,系数矩阵的行列式为0,即

$$\det[(\mathbf{P}_2^- \cdot \mathbf{P}_1^+)^2 - \mathbf{I}] = 0 \quad (13)$$

式(12)可以简化以下两式:

$$\det[(\mathbf{P}_2^- \cdot \mathbf{P}_1^+) + \mathbf{I}] = 0 \quad (14)$$

$$\det[(\mathbf{P}_2^- \cdot \mathbf{P}_1^+) - \mathbf{I}] = 0 \quad (15)$$

式中 φ_0 已知,由式(12)可以求解 h_0, v_0, β_0 ;代入式(6),可以求解 $\xi_1 - \xi_4$;并代入式(11).

其中式(15)无解,联立求解式(11)和式(14)可以求解 τ_1 和 τ_2 ,从而求得映射 $\mathbf{P}$.

通过分析 Poincaré 映射不动点的稳定性来分析极限环运动的稳定性.分析 Poincaré 映射不动点的稳定性是通过求解 Poincaré 映射在该不动点处的 Jacobi 矩阵的特征值.

考虑接触对称性,假设经过映射 $\mathbf{P}_1^+$,不动点 $(h_0, v_0, \varphi_0, \beta_0)$ 到 $(h_1, v_1, \varphi_1, \beta_1)$;然后经过映射 $\mathbf{P}_2^-$,不动点到 $(h_2, v_2, \varphi_2, \beta_2)$,设不动点处的 Jacobi 矩阵 $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_2^- \times \mathbf{D}_1^+ = \begin{bmatrix} \frac{\partial(h_2, v_2, \varphi_2, \beta_2)}{\partial(h_1, v_1, \varphi_1, \beta_1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial(h_1, v_1, \varphi_1, \beta_1)}{\partial(h_0, v_0, \varphi_0, \beta_0)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

由此可得到 Jacobi 矩阵的特征方程为

$$\lambda^4 + \eta_1 \lambda^3 + \eta_2 \lambda^2 + \eta_3 \lambda + \eta_4 = 0 \quad (17)$$

求解上述特征值 $\{\lambda_i\}$,我们能够判断系统周期运动的稳定性.如果这 4 个特征值都位于单位圆周内,即 $|\lambda_i| < 1$,则 $\mathbf{P}$ 映射的不动点是渐进稳定的,对应系统的周期一极限环运动也是渐进稳定的;而当其中某一个特征值处于单位圆周之外时,对应的周期运动是不稳定的.

3 跨临界颤振区系统分岔与多解共存现象分析

跨临界区域系统存在多种运动和分岔形式与多解共存现象.随着飞行速度的增加,振动幅值也不是单纯性增加.

3.1 跨临界颤振速度区域系统的分岔

由于系统颤振频率随飞行速度不断变化,本文选取仰角最大幅值处为类 Poincaré 截面,系统振动稳定后仰角最大幅值的大小和数量的变动可以清晰地反映系统的振动特性.对跨临界颤振速度区域进行分岔分析,数值模拟发现,系统不是由收敛突变为稳定的周期一极限环运动,系统的振动幅值也不是单纯性的递增.随着飞行速度的增加,系统由收敛,中途经历过混沌,双周期运动,拟周期运动等一系列非线性振动现象,最后过渡到周期一极限环震荡.

以仰角最大幅值处为类 Poincaré 截面,以气流速度作为分岔参数,计算间隙约束二元翼段系统随飞行速度 V 的分岔图.计算初值都为

$(0.001, 0, 0.01, 0)$,计算方向相反,如图 5.

从图 5 中可以发现系统在 $Ma=0.71 \leq V_0$ 附近时系统为收敛的,系统振动稳态值为 0,当 $Ma=0.71 \sim 0.75$ 逐渐变大时,系统由收敛过渡到极限环震荡,中途经历混沌,双周期运动,拟周期运动等其他非线性振动现象,并且可以明显看出在此过程中系统仰角振动幅值的跳跃现象.

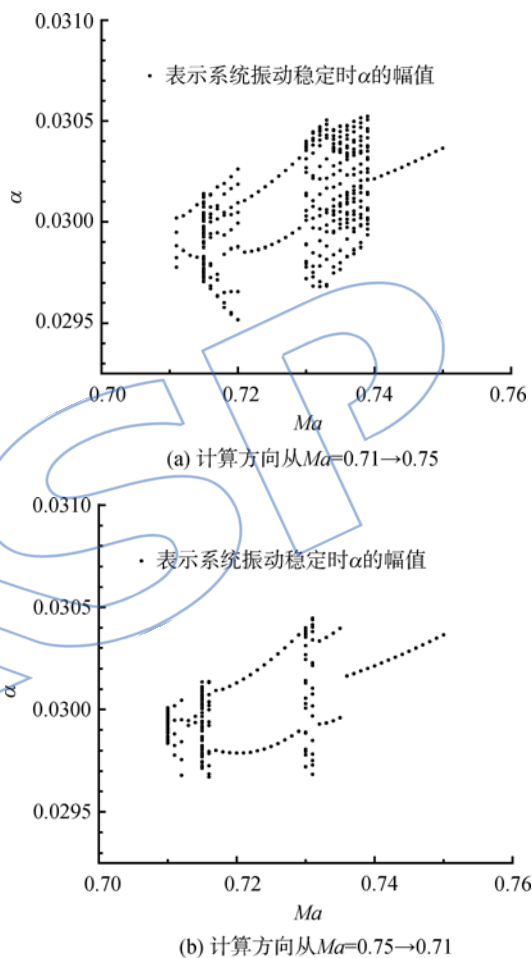


图 5 二元翼段系统随飞行速度的分岔图

Fig. 5 Bifurcation diagram of typical airfoil section system with the flight speed

3.2 跨临界颤振速度区域系统的多解共存现象

当不考虑接触时,我们系统是线性系统,通常线性系统只有唯一解.而考虑接触刚度发生变化,由于系统的非光滑性,系统是一个强非线性系统,存在多解共存现象.由分岔图可以明显看出,相同参数下,不同初值出发的流,具有不同的运动形式,例如多周期运动与双周期运动共存,拟周期运动和极限环震荡共存等等多种多解共存现象.

由图 5,我们知道系统在 $Ma=0.739$ 时存在极限环震荡和拟周期运动共存的现象.相同参数

条件下,红色计算初值为 $(0.001, 0, 0.01, 0)$,蓝色计算初值为 $(0.001, 0, 0.02, -3)$,如图6所示(图中,蓝色为拟周期运动相图;红色为极限环振荡相图)。

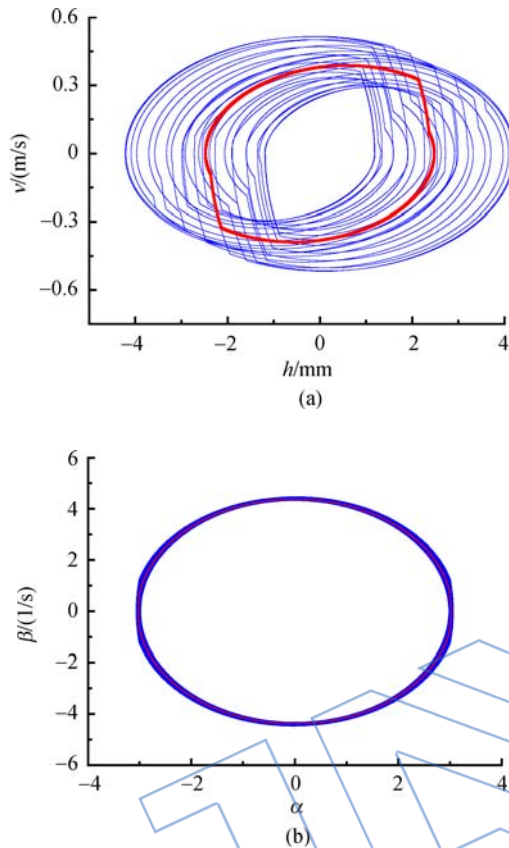


图6 拟周期运动和极限环振荡共存时的相图
Fig. 6 Coexistence of a limit cycle oscillation with quasi-periodic torus motion

稳定的极限环运动对不稳定的平衡点出发的流具有吸引力,故不稳定平衡点周围区域出发的流最后都收敛到周期一极限环上.而这种吸引力具有一定的区域.极限环外区域的初值一般不具有周期一极限环运动的形式(但在极限环与切换面交点附近,外部流可以进入极限环内部).因而极限环内部一般为极限环振荡的吸引域.系统周期一极限环振荡吸引域示意图如图7所示。

当 $Ma=0.739$, 此时速度介于 (V_0^-, V_0^+) 之间,接触前系统特征值的实部为正值,接触后系统特征值实部为负值,故平衡点 $(0, 0, 0, 0)$ 为不稳定的平衡点。

当 $Ma=0.739$ 时,先求解映射 $\mathbf{P}$,再通过式(16)和式(17)计算矩阵的特征值,计算得4个特征值分别为: $-0.982461, -0.69044, -0.257754, -0.12207$.显然所有的特征值都位于单位圆周

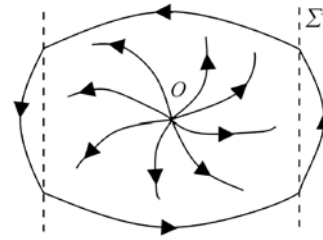


图7 平衡点附近出发的流收敛到极限环运动示意图
Fig. 7 Sketch of the flow converging from equilibrium point to the limit cycle

内.故当 $Ma=0.739$ 时系统的极限环振荡是稳定的。

由于是一个四维的相空间系统,为了更清晰地研究 $Ma=0.739$ 时,系统极限环振荡和拟周期运动共存时系统周期一极限环振荡的吸引域.本文固定两个变量的初值 $h=1\text{ mm}, v=0\text{ m/s}$.选取 α 和 β 组成的平面初值空间通过数值方法计算其吸引域,计算结果如图8。

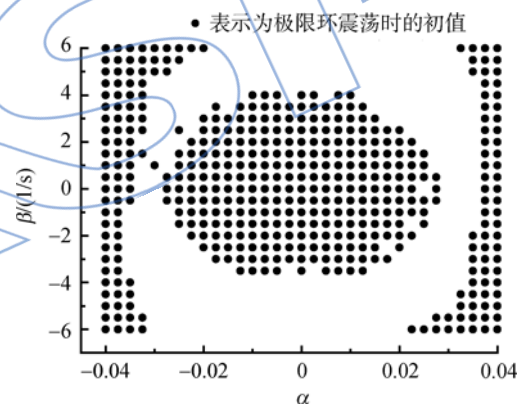


图8 数值模拟极限环振荡的吸引域
Fig. 8 Numerical simulation of attraction basin of the limit cycle oscillation

数值模拟表明:靠近不稳定平衡点的初值区域(极限环内部)具有周期一极限环振荡的运动形式,和理论分析的结果相吻合.由于间隙的作用 α 的实际变动区域大致位于 $(0.03, 0.03)$ 附近,而 β 变动区域大致位于 $(-4, 4)$ 附近.故有效的周期一极限环振荡吸引域取中间区域。

4 结 论

采用仰角最大幅值处为类 Poincaré 截面,通过数值模拟,在整个颤振速度区域内建立系统随气流速度变化的分岔图.含间隙约束的二元翼段系统在颤振速度区域内可以细分为两个区域,飞行速度位于 $Ma=0.75\sim 0.95$ 时属于极限环颤振

区和位于 $Ma = 0.71 \sim 0.75$ 时属于跨临界颤振区。

在极限环颤振区域,系统发生极限环颤振。构造了系统产生极限环震荡的四维 Poincaré 映射,通过计算此映射在不动点处雅克比矩阵特征值来判断极限环震荡的稳定性;同时结合稳定性和微分流形理论得到极限环震荡和拟周期运动共存时极限环的吸引域一般位于极限环内部,并用数值方法进行了验证。

而在跨临界颤振区,通过数值计算分岔图发现多种非线性运动和分岔形式以及多解共存现象,例如由双周期运动直接通向混沌、多周期运动与双周期运动共存现象,且振动幅值存在跳跃现象。随着飞行速度增加只有经过跨临界颤振区域才能过渡到极限环颤振区,发生具有规律性极限环颤振。而研究低速的这段过渡区域的特殊运动形式更具有工程意义,可能是机翼抖振以及其他复杂振动的根源之一。

参考文献:

- [1] Ashley H, Zartarian G. Piston theory: a new aerodynamic tool for the aeroelastician[J]. *Journal of Aeronaut Science*, 1956, 23(12): 1109-1118.
- [2] Liviu L, Gianfranco C, Piergiorgio M. Implications of cubic physical/aerodynamic non-linearities on the character of the flutter instability boundary[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38: 173-199.
- [3] Sander G, Bon C, Geradin M. Finite element analysis of supersonic panel flutter[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, 7(3): 379-394.
- [4] McIntosh J R S C, Reed J R R E, Rodden W P. Experimental and theoretical study of nonlinear flutter[J]. *Journal of Aircraft*, 1981, 18(12): 1057-1063.
- [5] Sheta E F, Harrand V J, Thompson D E, et al. Computational and experimental investigation of limit cycle oscillations of nonlinear aeroelastic systems[J]. *Journal of Aircraft*, 2002, 39(1): 133-141.
- [6] Liu L, Wong Y S, Lee B H K. Application of the center manifold theory in nonlinear aeroelasticity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 234(4): 641-659.
- [7] Sadaghat A, Copper J E. Limit cycle oscillation prediction for aeroelastic systems with continuous nonlinearities[J]. *AIAA* 2000-1397, 2000.
- [8] 郑国勇, 杨翔仁. 结构非线性机翼的超音速和高超音速颤振[J]. *西南交通大学学报*, 2007, 42(5): 578-582.
- ZHENG Guoyong, YANG Yiren. Flutter of airfoil with structural nonlinearity in supersonic and hypersonic flow[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2007, 42(5): 578-582. (in Chinese)
- [9] 王益峰, 邵松, 朱清华, 等. 带有气动及结构非线性的二元机翼颤振分析[J]. *航空动力学报*, 2012, 27(9): 2063-2074.
- WANG Yifeng, SHAO Song, ZHU Qinghua, et al. Flutter analysis of a two-dimensional wing with aerodynamic and structural non-linearity[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(9): 2063-2074. (in Chinese)
- [10] Bunton R W, Denegri J R C M. Limit cycle oscillation characteristics of fighter aircraft[J]. *Journal of Aircraft*, 2000, 37(5): 916-918.
- [11] Denegri J R C M. Limit cycle oscillation test results of a fighter with external stores[J]. *Journal of Aircraft*, 2000, 37(5): 761-769.
- [12] Ding Q, Wang L D. Flutter control of a two-dimensional airfoil using wash-out filter technique[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2005, 18(2): 130-136.
- [13] 于明礼, 文浩, 胡海岩, 等. 二维翼段颤振的 μ 控制[J]. *航空学报*, 2007, 28(2): 340-343.
- YU Mingli, WEN Hao, HU Haiyan, et al. Active flutter suppression of a two-dimensional airfoil section using μ synthesis[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, 28(2): 340-343. (in Chinese)
- [14] 李道春, 向锦武. 间隙非线性气动弹性颤振控制[J]. *北京航空航天大学学报*, 2007, 33(6): 640-643.
- LI Daochun, XIANG Jinwu. Flutter control of aeroelasticity with freeplay nonlinearity[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2007, 33(6): 640-643. (in Chinese)
- [15] 任爱娣, 张琪昌. 具有不对称间隙的二元机翼颤振研究[J]. *工程力学*, 2006, 23(9): 25-29.
- REN Aidi, ZHANG Qichang. The flutter study of a two-dimensional airfoil with asymmetry freeplay[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(9): 25-29. (in Chinese)
- [16] 赵永辉, 胡海岩. 具有操纵面间隙非线性二维翼段的气动弹性分析[J]. *航空学报*, 2003, 24(6): 521-525.
- ZHAO Yonghui, HU Haiyan. Aeroelastic analysis of a two-dimensional airfoil with control surface freeplay nonlinearity[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2003, 24(6): 521-525. (in Chinese)
- [17] Zhang S J, Wen G L, Peng F, et al. Analysis to limit cycle vibration of a typical airfoil section with freeplay[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, 29(4): 583-592.