

## 喷注壁面外掠平板层流边界层速度和温度的 HPM-Padé 解析解

赵国昌<sup>1,3</sup>, 孔敬儒<sup>1</sup>, 宋丽萍<sup>2</sup>, 杜霞<sup>1</sup>, 单龙<sup>1</sup>, 赵恒<sup>1</sup>

(1. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部(院), 沈阳 110136;

2. 沈阳航空航天大学 科学与技术协会, 沈阳 110136;

3. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部(院)

辽宁省航空推进系统先进测试技术重点实验室, 沈阳 110136)

**摘 要:** 运用 HPM-Padé(同伦摄动-帕德逼近)法导出了当喷注流体速度与距平板前缘距离的平方根成反比时,不可压缩常物性流体外掠平板层流边界层内无量纲速度和无量纲温度解析表达式,无量纲流函数 1 阶导数的 HPM-Padé 解析解与 4 阶龙格库塔法的数值解结果一致. 利用 HPM-Padé 解析解研究了喷注系数和流体 Prandtl 数对速度和温度分布的影响. 结果表明:Prandtl 数越大,温度边界层越薄,壁面温度梯度越大;喷注系数越大,速度边界层厚度和温度边界层厚度越大,壁面速度梯度和壁面温度梯度越小,壁面喷注对平板有隔热作用;当喷注系数为 0.619 时,壁面的速度梯度和温度梯度为零,高温来流向壁面的传热被喷注流体完全阻隔.

**关 键 词:** 外掠平板; 边界层; 同伦摄动-帕德逼近法; 无量纲流函数; 无量纲温度

**中图分类号:** V211.1<sup>+</sup>9

**文献标志码:** A

## Analytical solutions of velocity and temperature in laminar boundary layer over a flat plate with wall injection flow using HPM-Padé method

ZHAO Guo-chang<sup>1,3</sup>, KONG Jing-ru<sup>1</sup>, SONG Li-ping<sup>2</sup>,  
DU Xia<sup>1</sup>, SHAN Long<sup>1</sup>, ZHAO Heng<sup>1</sup>

(1. Faculty of Aerospace Engineering,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. Science and Technology Association,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

3. Liaoning Key Laboratory of Advanced Measurement and Test Technology  
for Aviation Propulsion System, Faculty of Aerospace Engineering,  
Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

**Abstract:** The HPM-Padé method was used to derive the analytical expression of dimensionless velocity and dimensionless temperature in the laminar boundary layer of a constant property, incompressible fluid over a flat plate with injection flow, when the injection fluid velocity is inversely proportional to the square root of the distance from the leading edge of the flat plate. The analytical solution produced by the HPM-Padé approximation of the first order derivative dimensionless stream function was consistent with the numerical solutions

**收稿日期:** 2015-05-20

**基金项目:** 航空科学基金(20131954004); 辽宁省攀登学者研究基金(20132015)

**作者简介:** 赵国昌(1964—),男,北京人,教授、博士生导师,博士,主要从事航空动力工程中的流动传热及热管理研究.

produced from the fourth order Runge-Kutta method. Analysis on the effects of injection coefficient and Prandtl number on the velocity and temperature distributions was performed using the analytical solutions obtained by the HPM-Padé method. Results show that, as Prandtl number increases, the temperature boundary layer becomes thinner and the temperature gradient on the wall becomes larger. As the injection coefficient increases, the thickness of temperature and velocity boundary layers increases. Furthermore, both wall velocity gradient and wall dimensionless temperature gradient decreases as the injection coefficient increases and injection on the wall creates an insulation effect. When injection coefficient is 0.619, wall velocity gradient and temperature gradient are both zero and the heat transfer from the high temperature flow to the wall is completely blocked by the injection fluid.

**Key words:** over a flat plate; boundary layer; HPM-Padé method; dimensionless stream function; dimensionless temperature

航空发动机中高温部件冷却和机翼表面冷却是工程实际中常遇到的高温流体中外掠平板冷却问题. 外掠平板冷却包括气膜冷却、发散和发汗冷却等几种形式, 其中多孔介质的发散冷却是一种效率较高的冷却方式. 前人对外掠平板冷却问题的层流边界层内速度与温度分布的求解进行了研究, Ahmad 等<sup>[1]</sup>给出了 Blasius 流级数形式的近似解; Aziz<sup>[2-3]</sup>给出了第 2 类和第 3 类边界条件下外掠平板层流边界层流动换热的相似解; Bararnia 等<sup>[4]</sup>求解外掠楔形体层流边界层内流动换热的相似解, 得到不同楔形角下楔状流的无量纲速度和温度分布, 并给出不同 Prandtl 数 ( $Pr$ ) 下无量纲温度场. 前人还对外掠平板层流边界层内速度与温度分布求解方法进行了探讨, Parand 等<sup>[5-6]</sup>用基于有理切比雪夫函数的方法给出了 Blasius 流的数值解, 把对非线性常微分方程的求解转变为对一系列代数方程的求解, 证明了该方法在点区域上应用的可靠性, 并用有理盖根鲍尔函数法求解了半无限空间内外掠平板层流边界层问题; Mori 等<sup>[7]</sup>用数值计算法求解了具有相变的多孔介质发汗冷却层流边界层问题; Bhattacharyya 等<sup>[8]</sup>用打靶法求解了多孔介质平板强制对流流动与传热数值解.

前人对发散冷却和有相变发汗冷却的研究多集中在实验方面, 计算方面多采用龙格库塔法等数值计算方法得到数值解, 没有见到此问题的解析解. 本文应用 HPM-Padé (同伦摄动-帕德逼近) 法将非线性控制方程转化为无穷多个线性方程进行求解, 得到该问题的无穷级数形式的解析解, 解析解中的参数由 Padé 逼近通过迭代计算确定, 根据所获得的解析解研究喷注壁面外掠平板层流边界层速度和温度分布, 获得边界层流动与传热特

性. 研究表明用 HPM-Padé 法得到解析解方法简单明了, 且解析解与用龙格库塔法数值解结果一致.

## 1 流动与传热控制方程

如图 1 所示, 平板水平放置时水平方向为  $x$  轴, 原点位于半无限大平板导流边端点处, 垂直于平板向外的方向为  $y$  轴. 高温来流以匀温 ( $T_\infty$ )、匀速 ( $u_\infty$ ) 流过平板, 平板外侧形成层流速度边界层和温度边界层, 速度边界层厚度和温度边界层厚度分别为  $\delta$  和  $\delta_t$ , 壁面温度为  $T_w$ , 当平板为多孔介质时壁面存在垂直向外的喷注速度 ( $v_w$ ), 为简化分析, 假设喷注流体温度与壁面温度相同. 本文研究二维不可压缩常物性流体流过壁面有流体喷注时的半无限大平板层流边界层速度和温度分布.

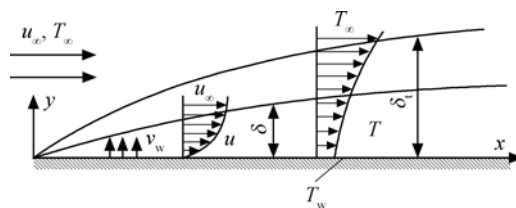


图 1 喷注壁面外掠平板层流边界层示意图  
Fig. 1 Schematic diagram of laminar boundary layer over a flat plate with wall injection flow

边界层内连续性、动量和能量方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

式(3)中忽略了黏性耗散,  $u, v$  为流体在  $x, y$  方向

上的速度分量,  $\nu$  为流体黏度,  $\alpha$  为流体热扩散系数,  $T$  为流体温度. 无滑移壁面速度和温度条件为

$$y = 0: u = 0, v = v_w; y \rightarrow \infty: u = u_\infty \quad (4)$$

$$y = 0: T = T_w; y \rightarrow \infty: T \rightarrow T_\infty \quad (5)$$

下角标  $w$  和  $\infty$  分别表示壁面和主流处流体. 控制方程式(1)~式(3)为偏微分方程组, 通过相似变换<sup>[9]</sup>将其转化为便于求解的常微分方程.

## 2 控制方程相似变换

设相似变量为

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (6)$$

流函数为

$$\psi = \sqrt{u_\infty \nu x} f(\eta) \quad (7)$$

其中  $f(\eta)$  为无量纲流函数, 因此

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_\infty f'(\eta) \quad (8)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}} \left[ \frac{1}{2} f(\eta) + \eta f'(\eta) \right] \quad (9)$$

将式(8)和式(9)及速度分量对  $x$  和  $y$  的偏导代入式(2)进行相似变换得

$$\frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} = 0 \quad (10)$$

$$\eta = 0, f(0) = f_w = -2 \frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = -2 \frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{Re_x} \quad (11)$$

式(11)中, 平板导流边附近区域除外, 当  $v_w \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

时,  $f_w$  为常数, 式(2)存在相似解.

定义喷注系数

$$\zeta = \frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{Re_x} = -\frac{1}{2} f(0) \quad (12)$$

速度边界条件式(4)转化为

$$f(0) = f_w = -2\zeta, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1 \quad (13)$$

定义无量纲温度  $\theta$  为

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (14)$$

能量方程和边界条件式(5)转化为

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (15)$$

$$\theta(x, 0) = 1, \theta(x, \infty) = 0, \theta(0, y) = 1 \quad (16)$$

将式(15)中对  $x$  和  $y$  的偏导转化为关于相似变量  $\eta$  的导数, 对式(15)和式(16)进行相似变换得

$$\frac{d^2 \theta(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{2} Pr f(\eta) \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (17)$$

$$\theta(0) = 1, \theta(\infty) = 0 \quad (18)$$

## 3 HPM-Padé 法求解非线性方程

同伦摄动(HPM)法是近几年来发展的求解非线性问题的新方法. Padé 逼近是关于函数值特殊类型的有理分式逼近法, 运用 Padé 逼近可以快速匹配被逼近函数. 用 HPM-Padé 法可求解在无限大或半无限大区域内的高阶非线性常微分方程和偏微分方程的边值问题<sup>[10-12]</sup>, 可将非线性微分方程的相似解表示成自变量的幂级数形式. 当应用 HPM 法获得的解难于收敛时, 应用 Padé 逼近能够对 HPM 法获得的解作出较好的近似使其收敛. HPM 法和 Padé 逼近相结合是一种非常有效的求解非线性方程的方法<sup>[13-14]</sup>.

### 3.1 HPM-Padé 法基本原理

用 HPM 法求解非线性问题, 需引入一般形式的非线性微分方程

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \quad (19)$$

边界条件为

$$B\left[u, \frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0, r \in \Gamma \quad (20)$$

其中  $A$  为常微分算子,  $B$  为边界算子,  $f(r)$  为已知的任意阶非线性微分方程,  $\Gamma$  为计算区域  $\Omega$  的边界. 将算子  $A$  分解为两个辅助微分算子, 即线性微分算子  $L$  和非线性微分算子  $N$ , 式(19)转化为

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (21)$$

因而, 将求解式(19)变为求解式(21). 根据 HPM 法构造一个同伦逼近因子  $v(r, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , 以满足对式(21)的同伦映射

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad (22)$$

其中  $p \in [0, 1]$  为摄动参数,  $u_0$  为式(21)满足边界条件的初始逼近值. 由式(22)可得

$$\begin{cases} H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \\ H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

在  $p$  从 0 变化到 1 的过程中, 方程式(19)的解逐渐由近似值变为精确值. 将式(21)的解写成  $p$  的幂级数形式

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \cdots \quad (24)$$

当  $p=1$  时得到式(22)的逼近

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \quad (25)$$

用 Padé 逼近快速匹配被逼近函数,对于用幂

级数形式表示的函数  $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ , 如果满足有理逼近

$$f(x) - P_l(x)/Q_n(x) = O(x^{m+n+1}) \quad (26)$$

则称  $P_l(x)/Q_n(x)$  是  $f(x)$  在  $x=0$  处的  $(l, n)$  阶 Padé 逼近多项式. 将  $P_l(x)$  和  $Q_n(x)$  表示如下:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_l x^l \\ Q_n(x) &= 1 + q_1 x + \cdots + q_n x^n \end{aligned} \quad (27)$$

求出式(27)的系数获得 Padé 逼近多项式  $P_l(x)/Q_n(x)$ . 用 Maple 或 Matlab 软件可以实现给定函数的 Padé 逼近, 相对于其他阶 Padé 逼近, 对角逼近精确度最高, 因此本文采用对角逼近<sup>[15]</sup>进行计算.

### 3.2 HPM-Padé 法解常微分方程

根据上述同伦摄动理论构造动量方程(式(10))和能量方程(式(17))的同伦映射式(28)和式(29)

$$\begin{aligned} (f, p) &= (1-p) \left[ \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} \right] + \\ p \left\{ \left[ \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} \right] + \frac{1}{2} f(\eta) \left[ \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} \right] \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H(\theta, p) &= (1-p) \left[ \frac{d^2 \theta(\eta)}{d\eta^2} \right] + \\ p \left\{ \left[ \frac{d^2 \theta(\eta)}{d\eta^2} \right] + \frac{1}{2} Pr f(\eta) \left[ \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} \right] \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

令

$$f(\eta) = f_0(\eta) + p f_1(\eta) + p^2 f_2(\eta) + p^3 f_3(\eta) + \cdots \quad (30)$$

$$\theta(\eta) = \theta_0(\eta) + p \theta_1(\eta) + p^2 \theta_2(\eta) + p^3 \theta_3(\eta) + \cdots \quad (31)$$

将式(30)和式(31)代入式(28)和式(29), 按  $p$  的阶数合并同类项, 令  $p^i (i=0, 1, 2, 3, \cdots)$  系数为零, 得到微分方程组式(32)、式(34)和式(36).

$p^0$  由下式确定:

$$\begin{cases} \frac{d^3 f_0(\eta)}{d\eta^3} = 0 \\ \frac{d^2 \theta_0(\eta)}{d\eta^2} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

边界条件

$$\begin{aligned} f_0(0) &= -2\zeta, f_0'(0) = 0, f_0''(0) = \alpha_1 \\ \theta_0(0) &= 1, \theta_0'(0) = \alpha_2 \end{aligned} \quad (33)$$

$p^1$  由下式确定:

$$\begin{cases} \frac{d^3 f_1(\eta)}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f_0(\eta) \left[ \frac{d^2 f_0(\eta)}{d\eta^2} \right] = 0 \\ \frac{d^2 \theta_1(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{2} Pr f_0(\eta) \frac{d\theta_0(\eta)}{d\eta} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

边界条件

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 0, f_1'(0) = 0, f_1''(0) = 0 \\ \theta_1(0) &= 0, \theta_1'(0) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$p^2$  由下式确定:

$$\begin{cases} \frac{d^3 f_2(\eta)}{d\eta^3} + \frac{1}{2} \left\{ f_0(\eta) \left[ \frac{d^2 f_1(\eta)}{d\eta^2} \right] + f_1(\eta) \left[ \frac{d^2 f_0(\eta)}{d\eta^2} \right] \right\} = 0 \\ \frac{d^2 \theta_2(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \left\{ Pr f_1(\eta) \left[ \frac{d\theta_0(\eta)}{d\eta} \right] + Pr f_0(\eta) \left[ \frac{d\theta_1(\eta)}{d\eta} \right] \right\} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

边界条件

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 0, f_2'(0) = 0, f_2''(0) = 0 \\ \theta_2(0) &= 0, \theta_2'(0) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

用边界条件式(33)、式(35)和式(37)求解微分方程式(32)、式(34)和式(36)得式(38)~式(45)

$$f_0 = \frac{1}{2} \alpha_1 \eta - 2\zeta \quad (38)$$

$$\theta_0 = 1 + \alpha_2 \eta \quad (39)$$

$$f_1 = -\frac{1}{240} \alpha_1 \eta^3 (\alpha_1 \eta^2 - 40\zeta) \quad (40)$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{48} \alpha_2 Pr \eta^2 (\alpha_1 \eta^2 - 24\zeta) \quad (41)$$

$$f_2 = \frac{1}{24} \alpha_1 \zeta^2 \eta^4 - \frac{1}{288} \alpha_1^2 \zeta \eta^6 + \frac{11}{161280} \alpha_1^3 \eta^8 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \left[ \frac{1}{2016} Pr^2 \alpha_2 \alpha_1^2 + \frac{1}{20160} Pr \alpha_2 \alpha_1^2 \right] \eta^7 + \\ &\quad \left[ -\frac{1}{60} Pr^2 \alpha_2 \alpha_1 \zeta - \frac{1}{240} Pr \alpha_2 \alpha_1 \zeta \right] \eta^5 + \\ &\quad \frac{1}{6} Pr^2 \alpha_2 \zeta^2 \eta^3 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{120} \alpha_1 \zeta^3 \eta^5 - \frac{1}{630} \alpha_1^2 \zeta^2 \eta^7 + \\ &\quad \frac{13}{161280} \alpha_1^3 \zeta \eta^9 - \frac{5}{4257792} \alpha_1^4 \eta^{11} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \left( -\frac{1}{103680} Pr^3 \alpha_1^3 \alpha_2 - \frac{1}{345600} Pr^2 \alpha_1^3 \alpha_2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{11}{29030400} Pr \alpha_1^3 \alpha_2 \right) \eta^{10} + \left( \frac{1}{2304} Pr^3 \alpha_1^2 \alpha_2 \zeta + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3840} Pr^2 \alpha_1^2 \alpha_2 \zeta - \frac{1}{16128} Pr \alpha_1^2 \alpha_2 \zeta \right) \eta^8 + \\ &\quad \left( -\frac{1}{144} Pr^3 \alpha_1 \alpha_2 \zeta^2 - \frac{1}{288} Pr^2 \alpha_1 \alpha_2 \zeta^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{360} Pr \alpha_1 \alpha_2 \zeta^2 \right) \eta^6 + \frac{1}{24} Pr^3 \alpha_2 \zeta^3 \eta^4 \end{aligned} \quad (45)$$

此处只列出式(30)和式(31)的前3项,其他各项可依照上述方法得出.根据式(30)和式(31),令 $p=1$ ,得到无量纲流函数、无量纲温度的函数表达式,即式(46)和式(47).

$$f(\eta) = \frac{1}{2}\alpha_1\eta - 2\zeta - \frac{1}{240}\alpha_1\eta^3(\alpha_1\eta^2 - 40\zeta) + \frac{1}{24}\alpha_1\zeta^2\eta^4 - \frac{1}{288}\alpha_1^2\zeta\eta^6 + \frac{11}{161280}\alpha_1^3\eta^8 + \frac{1}{120}\alpha_1\zeta^3\eta^5 - \frac{1}{630}\alpha_1^2\zeta^2\eta^7 + \frac{13}{161280}\alpha_1^3\zeta\eta^9 + \dots \quad (46)$$

$$\theta(\eta) = 1 + \alpha_2\eta - \frac{1}{48}Pr\eta^2(\alpha_1\eta^2 - 24\zeta) + \left[\frac{1}{2016}Pr^2\alpha_2\alpha_1^2 + \frac{1}{20160}Pr\alpha_2\alpha_1^2\right]\eta^7 + \dots \quad (47)$$

式(46)和式(47)含有无限多项,求解式(46)的1阶导数得到无量纲速度表达式,对无量纲速度和无量纲温度进行 Padé 逼近,提高 Padé 逼近阶数,无量纲流函数1阶导数 $f'(\eta)$ 和无量纲温度 $\theta(\eta)$ 将逐渐收敛.

式(46)和式(47)中,无量纲流函数 $f$ 和无量纲温度 $\theta$ 是相似变量 $\eta$ 的函数, $Pr$ 和喷注系数 $\zeta$ 由流体物性和喷注条件确定,还需根据边界条件式(13)和式(16)确定壁面处无量纲流函数2阶导数值 $\alpha_1$ 和无量纲温度1阶导数值 $\alpha_2$ .

#### 4 边值确定及结果分析

利用边界条件 $f'(\infty)=1$ 和 $\theta(\infty)=0$ 计算喷注系数 $\zeta=0$ 时各阶 Padé 逼近下的 $f''(0)=\alpha_1$ 和 $\theta'(0)=\alpha_2$ , $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 随 Padé 逼近阶数的提高逐渐收敛,如表1所示.其中 Padé 逼近阶数一栏中 $[4/4]$ 代表(4,4)阶 Padé 逼近, $[6/6]$ , $[8/8]$ ,...等含义类似.由表1可知,随着阶数的增加 $f''(0)$ 逐渐趋于稳定,10阶 Padé 逼近以后, $f''(0)$ 趋于收敛值0.33199,与文献[9]中数据 $f''(0)=0.332$ 的相对偏差仅为0.003%.

将 $\alpha_1$ , $\alpha_2$ 的收敛值代入式(46)的1阶导数和式(47)的 Padé 逼近有理分式中,得到无壁面喷注且 $Pr=1$ 时各阶 Padé 逼近下无量纲流函数1阶导数和无量纲温度函数随相似变量变化的曲线,如图2和图3所示.

由图2和图3可知,增加 Padé 逼近阶数能提高函数收敛性.图2中 $f'(\eta)$ 的14阶 Padé 逼近曲线随 $\eta$ 的增加逐渐增加直至趋于1;图3中 $\theta(\eta)$

表1 不同 Padé 逼近阶数时 $\alpha_1$ 与 $\alpha_2$ ( $Pr=1, \zeta=0$ )的值  
Table 1 Values of  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  ( $Pr=1, \zeta=0$ ) with different Padé approximation orders

| Padé<br>逼近阶数 | $f''(0)$          |        | $\theta'(0)$          |        |
|--------------|-------------------|--------|-----------------------|--------|
|              | $f''(0)=\alpha_1$ | 相对误差/% | $\theta'(0)=\alpha_2$ | 相对误差/% |
| [4/4]        | 0.33384           | 0.55   | -0.35674              | 7.45   |
| [6/6]        | 0.31355           | 5.56   | -0.33293              | 0.28   |
| [8/8]        | 0.33234           | 0.11   | -0.33100              | 0.30   |
| [10/10]      | 0.33199           | 0      | -0.33221              | 0.07   |
| [12/12]      | 0.33199           | 0      | -0.33199              | 0      |
| [14/14]      | 0.33199           | 0      | -0.33199              | 0      |
| [15/15]      | 0.33199           | 0      | -0.33199              | 0      |

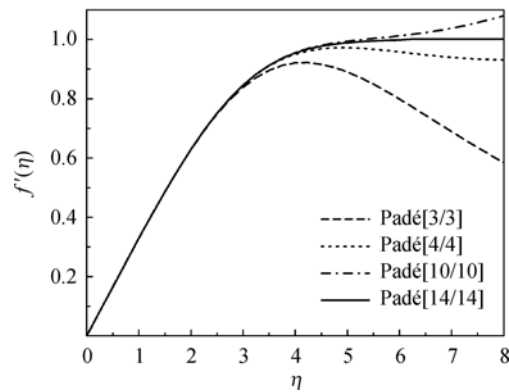


图2 当 $\zeta=0$ 时无量纲流函数1阶导数的 Padé 逼近曲线

Fig. 2 Padé approximation curves of first-order derivative of dimensionless stream function when  $\zeta=0$

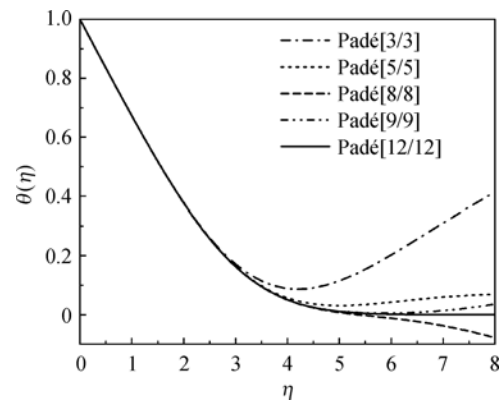


图3 当 $Pr=1, \zeta=0$ 时无量纲温度的 Padé 逼近曲线  
Fig. 3 Padé approximation curves of dimensionless temperature when  $Pr=1, \zeta=0$

的12阶Padé逼近曲线随 $\eta$ 的增加逐渐减小趋于0.各阶曲线在 $\eta \in (0, 3)$ 区间上重合,在 $\eta \in (3, +\infty)$ 上存在差异,随着阶数升高曲线逐渐收敛,这一趋势符合速度边界层内流体速度从零开始增大直至接近于主流速度,温度边界层内流体无量纲温度从1开始减小到0的变化规律<sup>[16]</sup>.

将用HPM-Padé法计算无喷注时无量纲流函数1阶导数所得结果与相同条件下用4阶龙格库塔法计算所得结果的对比如表2所示.由表2可知,两种方法得到的 $f'(\eta)$ 数据差别很小.

表2 HPM-Padé法与4阶龙格库塔法得到的 $f'(\eta)$ 的计算结果对比( $Pr=1, \zeta=0$ )

Table 2 Comparison of calculated result of  $f'(\eta)$  between HPM-Padé method and fourth order Runge-Kutta method ( $Pr=1, \zeta=0$ )

| $\eta$ | $f'(\eta)$ |                |
|--------|------------|----------------|
|        | HPM-Padé法  | 4阶Runge-Kutta法 |
| 0      | 0          | 0              |
| 1.0    | 0.32971    | 0.32972        |
| 2.0    | 0.63002    | 0.62966        |
| 3.0    | 0.84633    | 0.84592        |
| 4.0    | 0.95504    | 0.95542        |
| 5.0    | 0.98953    | 0.99143        |
| 6.0    | 0.99938    | 0.99887        |

流体不同时,外掠平板边界层温度分布不同,表3给出了不同 $Pr$ 下 $\alpha_2$ ( $\alpha_2 = \theta'(0)$ )的值.

表3 层流外掠平板 $\zeta=0$ 时不同 $Pr$ 下的 $\alpha_2$ 值  
Table 3 Values of  $\alpha_2$  under different  $Pr$  for laminar flow over a flat plate when  $\zeta=0$

| $Pr$ | $\alpha_2 = \theta'(0)$ |
|------|-------------------------|
| 0.3  | -0.21510                |
| 0.7  | -0.29274                |
| 1    | -0.33199                |
| 3    | -0.48499                |
| 100  | -1.57205                |

图4为定壁温无壁面喷注边界条件下不同 $Pr$ 流体外掠平板层流边界层内无量纲温度分布.由图4可知, $Pr$ 增大,平板外温度边界层厚度对应的相似变量 $\eta_0$ 减小(曲线上 $\theta(\eta)=0.01$ 时对应的 $\eta$ 为 $\eta_0$ ),由式(6)可得出 $x$ 处的温度边界层厚度 $\delta_t$ .

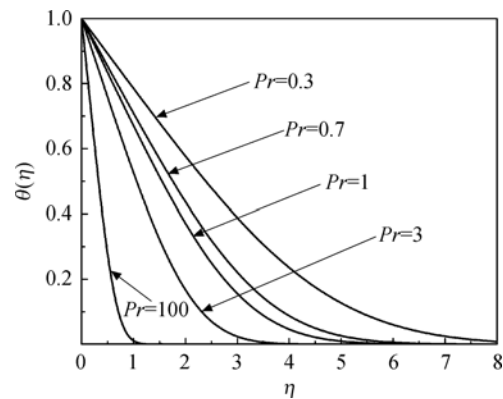


图4  $\zeta=0$ 时不同 $Pr$ 条件下流体外掠定壁温平板层流边界层无量纲温度分布

Fig. 4 Distribution of dimensionless temperature in laminar boundary layer over a flat plate with constant wall temperature for different  $Pr$  when  $\zeta=0$

当平板存在壁面喷注时,冷却介质通过多孔介质渗透到平板表面,沿垂直壁面方向喷入到边界层中,壁面喷注不同边界层内温度分布不同<sup>[17-18]</sup>.为获得边界层内温度分布规律,本文采用与外掠流体性质相同的冷却介质,求解 $Pr=1$ 和 $Pr=0.7$ 时不同喷注系数下层流边界层内温度分布,通过迭代计算得出不同喷注系数下边界值 $f''(0)$ 和 $\theta'(0)$ ,结果如表4所示.不同喷注系数 $\zeta$ 下无量纲流函数1阶导数曲线和无量纲温度函数曲线如图5和图6所示.

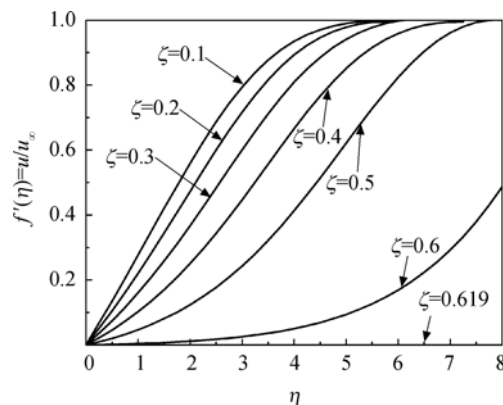


图5 喷注系数不同时无量纲流函数1阶导数曲线  
Fig. 5 First-order derivative curves of dimensionless stream function for different injection coefficients

由图5可知,当 $\zeta$ 小于0.619时,喷注系数越大无量纲速度 $f'(\eta) = u/u_\infty$ 越小,喷入到边界层中的流体流量越大,由相似变量值 $\eta_0$ (曲线上 $f'(\eta) = u/u_\infty = 0.99$ 对应的 $\eta$ 为 $\eta_0$ )求出的速度

边界层厚度  $\delta$  越大; 喷注系数不为零时无量纲速度曲线出现拐点,  $\zeta$  越小拐点越接近 0; 喷注系数较大 ( $\zeta$  大于 0.4) 时, 无量纲速度曲线呈现 S 形; 壁面处无量纲流函数 2 阶导数即壁面处速度梯度越小. 当喷注系数为 0.619 时, 壁面处的速度梯度为零, 曲线与  $\eta$  轴重合, 此时边界层分离. 当  $\zeta$  大于 0.619 时, 边界层方程不再适用, 无量纲温度随喷注系数的变化如图 6 所示.

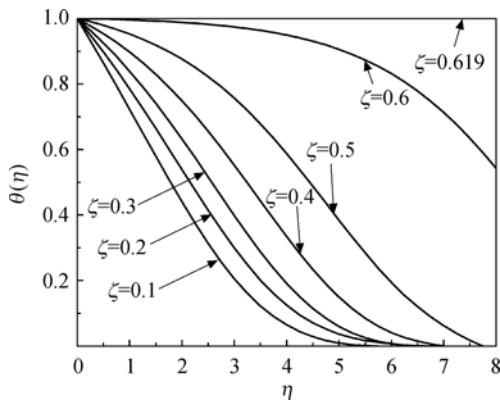


图 6 喷注系数不同时无量纲温度分布 ( $Pr=1$ )

Fig. 6 Distribution of dimensionless temperature for different injection coefficients ( $Pr=1$ )

由图 6 可知, 当  $\zeta$  小于 0.619 时, 喷注系数越大, 无量纲温度越高, 由  $\theta(\eta)=0.01$  处的相似变量  $\eta_0$  求出的相应喷注系数下的温度边界层越厚; 当喷注系数大于零时, 无量纲温度分布出现拐点, 壁面处无量纲温度函数的 1 阶导数绝对值随喷注系数的增大而减小, 即壁面处温度梯度减小. 当喷注系数增大到 0.619 时, 无量纲温度曲线与  $\theta(\eta)=1$  的直线重合, 壁面处的无量纲温度梯度为零, 高温来流向壁面的传热被喷注气体完全阻隔.

图 7 为  $Pr=0.7$  和  $Pr=1$  时不同喷注系数  $\zeta$  下无量纲温度曲线的对比图, 由图 7 可知, 喷注系数较小 ( $\zeta$  小于 0.3) 时,  $Pr$  越大, 无量纲温度越低; 喷注系数较大 ( $\zeta$  大于 0.3) 时,  $Pr$  越大, 无量纲温度越高.

由外掠平板无量纲温度相似解可求得定壁温外掠平板换热的无量纲温度梯度  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$ , 平板壁面热流密度

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\lambda (T_w - T_\infty) \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\lambda (T_w - T_\infty) \frac{1}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \theta'(0) \quad (48)$$

局部表面传热系数  $h$  和努塞尔数  $Nu$  为

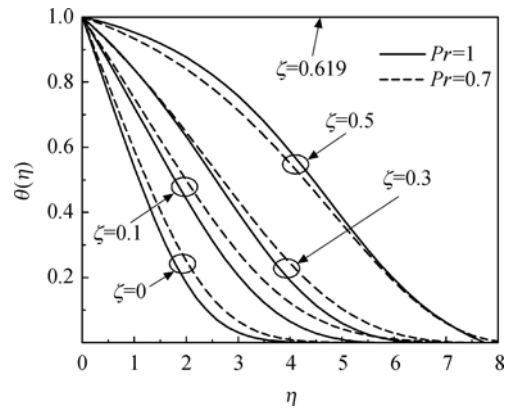


图 7  $Pr=0.7$  和  $Pr=1$  时不同喷注系数下无量纲温度分布

Fig. 7 Distribution of dimensionless temperature for different injection coefficients when  $Pr=0.7$  and  $Pr=1$

$$h = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} \quad (49)$$

$$Nu = \frac{hx}{\lambda} = \frac{q_w x}{\lambda (T_w - T_\infty)} \quad (50)$$

将式(49)和式(50)代入式(48), 得到

$$Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}} = -\theta'(0) \quad (51)$$

式中  $\theta'(0)$  为  $Pr$  和  $\zeta$  的函数. 不同  $Pr$  下定壁温外掠平板换热的壁面无量纲温度梯度  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$  随喷注系数  $\zeta$  的变化曲线如图 8 所示.

由图 8 可知,  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$  随喷注系数  $\zeta$  增大近似呈线性变化, 喷注系数  $\zeta$  越大,  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$  越小. 当  $Pr$  和喷注系数  $\zeta$  一定时,  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$  为定值, 局部表面传热系数  $h$  和距平板前缘距离的平方根成反比. 由表 4 和图 8 可知, 喷注系数  $\zeta$  越大, 局部表面传热系数越小, 表明壁面喷注在高温气体外掠平板时对平板有热防护作用.

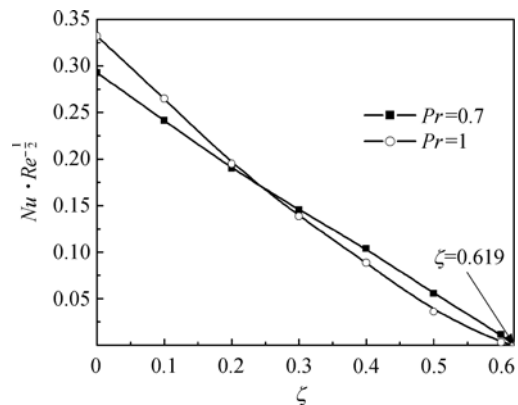


图 8 当  $Pr=0.7$  和  $Pr=1$  时  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$  随喷注系数  $\zeta$  的变化

Fig. 8 Variation of  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$  with different injection coefficients when  $Pr=0.7$  and  $Pr=1$

表4 不同喷注系数下  $f(0)$ ,  $f''(0)$  和  $\theta'(0)$  的边界值 ( $Pr=1$ ,  $Pr=0.7$ )Table 4 Boundary values of  $f(0)$ ,  $f''(0)$  and  $\theta'(0)$  for different injection coefficients ( $Pr=1$ ,  $Pr=0.7$ )

| $\zeta$ | 边界值    |                   |                              |                                |
|---------|--------|-------------------|------------------------------|--------------------------------|
|         | $f(0)$ | $f''(0)=\alpha_1$ | $\theta'(0)=\alpha_2 (Pr=1)$ | $\theta'(0)=\alpha_2 (Pr=0.7)$ |
| 0       | 0      | 0.33199           | -0.33199                     | -0.29274                       |
| 0.1     | -0.2   | 0.26487           | -0.26487                     | -0.24135                       |
| 0.2     | -0.4   | 0.19494           | -0.19494                     | -0.18996                       |
| 0.3     | -0.6   | 0.13833           | -0.13833                     | -0.14532                       |
| 0.4     | -0.8   | 0.08872           | -0.08872                     | -0.10379                       |
| 0.5     | -1.0   | 0.03600           | -0.03600                     | -0.05550                       |
| 0.6     | -1.2   | 0.00306           | -0.00306                     | -0.01147                       |
| 0.619   | -1.238 | 0                 | 0                            | 0                              |

## 5 结 论

本文应用 HPM-Padé 法求解定壁温和匀速、匀温来流条件下不可压缩定物性流体外掠平板发散冷却的速度分布和温度分布. 得到无量纲流函数和无量纲温度的解析解. 平板进口导流边区域除外, 当流体喷注速度反比于平板前缘起始距离的平方根, 且喷注系数不大于 0.619 的外掠喷注壁面层流边界层存在相似解, 可利用 HPM-Padé 法获得层流边界层解析解. 计算表明, 提高 Padé 逼近阶数能加快无量纲流函数 1 阶导数和无量纲温度的收敛; 用 HPM-Padé 法求解外掠平板速度分布和温度分布与用龙格库塔法数值计算得到的结果一致; 无量纲流函数及其 1 阶导数、2 阶导数和无量纲温度符合层流边界层内速度、温度分布规律.  $Pr$  越大, 边界层厚度对应的相似变量值越小. 喷注系数  $\zeta$  越大, 无量纲速度越小, 无量纲温度越大, 速度边界层厚度和温度边界层厚度越大, 壁面的速度梯度和温度梯度越小, 壁面喷注对高温来流下的平板有隔热作用. 当  $\zeta$  等于 0.619 时, 壁面的速度梯度和温度梯度为零, 边界层分离, 高温来流向壁面的传热被壁面喷注流体阻隔. 喷注系数  $\zeta$  越大, 定壁温外掠平板换热的壁面无量纲温度梯度  $Nu \cdot Re_x^{-\frac{1}{2}}$  越小.

## 参考文献:

- [1] Ahmad F, Al-Barakati W H. An approximate analytic solution of the Blasius problem[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 1021-1024.
- [2] Aziz A. Hydrodynamic and thermal slip flow boundary layers over a flat plate with constant heat flux boundary condition[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(3): 573-580.
- [3] Aziz A. A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 1064-1068.
- [4] Bararnia H, Ghasemi E, Soleimani S, et al. Solution of the Falkner-Skan wedge flow by HPM-Padé method[J]. Advances in Engineering Software, 2012, 43(1): 44-52.
- [5] Parand K, Shahini M, Dehghan M. Solution of a laminar boundary layer flow via a numerical method[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(2): 360-367.
- [6] Parand K, Dehghan M, Baharifard F. Solving a laminar boundary layer equation with the rational Gegenbauer functions[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(3): 851-863.
- [7] Mori S, Kumita M, Takahashi T, et al. Heat and mass transfer from a flat plate of finite thickness to a boundary layer flow with transpiration[J]. Energy Conversion and Management, 1997, 38(10/11/12/13): 1209-1218.
- [8] Bhattacharyya K, Mukhopadhyay S, Layek G C. Steady boundary layer slip flow and heat transfer over a flat porous plate embedded in a porous media[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2011, 78(2): 304-309.
- [9] 杨强生, 浦保荣. 高等传热学[M]. 2 版. 上海: 上海交通大学出版社, 2001.
- [10] He J. An approximate solution technique depending on an artificial parameter: a special example[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 1998, 3(98): 92-97.
- [11] Turkyilmazoglu M. Some issues on HPM and HAM methods: a convergence scheme[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53(9/10): 1929-1936.
- [12] Vazquez-Leal H. A comparison of HPM, NDHPM, Picard and Picard-Padé methods for solving michaelis-menten equation[J]. Journal of King Saud University: Science,

- 2015, 27: 7-14.
- [13] He J. Homotopy perturbation method; a new nonlinear analytical technique[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, 135(1): 73-79.
- [14] Behrouz R. Series solution of a nonlinear ODE arising in magnetohydrodynamic by HPM-Padé technique[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 61(6): 1676-1681.
- [15] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [16] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [17] 曹玉璋. 航空发动机传热学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005.
- [18] 赵国昌, 杜霞, 宋丽萍, 等. 亚/超声速楔状流层流边界层速度与温度相似解及拟合解[J]. *航空动力学报*, 2014, 29(12): 2785-2794.
- ZHAO Guochang, DU Xia, SONG Liping, et al. Similarity solutions and approximation solutions of velocity and temperature in the laminar boundary layer of subsonic and supersonic wedge flows[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2014, 29(12): 2785-2794. (in Chinese)

(编辑: 王碧琚)