

非线性非高斯秩滤波方法

傅惠民, 肖强, 娄泰山, 肖梦丽

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 基于秩滤波原理, 提出一种非线性非高斯秩滤波方法, 给出其递推过程. 目前常用的非线性滤波方法有无迹 Kalman 滤波和粒子滤波, 无迹 Kalman 滤波只适用于高斯分布的情况, 粒子滤波方法却存在粒子退化及重采样引起的粒子贫化问题. 而非线性非高斯秩滤波方法不仅适用于常见的多元 t 分布、多元极值分布等非高斯分布的非线性滤波, 并且计算简单、工作量小, 便于工程应用. 从仿真算例可以看到, 该方法的滤波精度与无迹 Kalman 滤波和粒子滤波方法相比提高了 500% 以上.

关 键 词: 秩滤波; 无迹 Kalman 滤波; 粒子滤波; Kalman 滤波; 非线性滤波; 非高斯滤波

中图分类号: V448; O231

文献标志码: A

Nonlinear and non-Gaussian rank filter method

FU Hui-min, XIAO Qiang, LOU Tai-shan, XIAO Meng-li

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A nonlinear and non-Gaussian rank filter (RF) method based on the principle of rank filter was presented. Furthermore, its filter recursive process was also given. Unscented Kalman filter (UKF) only for Gaussian distribution and particle filter (PF) for non-Gaussian distribution were the two common nonlinear filter methods, but PF had the problems of particle degeneracy, particle impoverishment caused by resampling and complicated calculation. Compared with the two methods, the proposed RF is suitable for not only Gaussian distribution but also non-Gaussian distributions such as multivariate t distributions and extreme value distributions, and RF is simple to calculate and easy to apply in engineering. Moreover, it has low amount of calculation. From the simulation comparisons of RF, UKF and PF in the example, the filtering accuracy of RF increased at least 500%.

Key words: rank filter; unscented Kalman filter; particle filter; Kalman filter; nonlinear filter; non-Gaussian filter

工程实际中, 传统的 Kalman 滤波方法无法解决工程中常见的非线性滤波问题, 如目标跟踪^[1]、导航^[2]、深空探测^[3]和故障诊断^[4-5]等. 解决非线性滤波问题的最优方案需要精确的后验密度函数, 而这一条件在实际应用中无法满足. 因此, 人们先后提出了次优的非线性滤波方法^[6], 如采用线性化近似的扩展 Kalman 滤波 (extended

Kalman filter, EKF) 方法^[7-8]和基于确定性采样的无迹 Kalman 滤波 (unscented Kalman filter, UKF) 方法^[9-10]等.

扩展 Kalman 滤波存在线性化引起的截断误差. 无迹 Kalman 滤波虽然不需要进行 Taylor 级数展开, 不存在截断误差, 但其仅适用于高斯噪声的情况. 而基于随机采样的粒子滤波 (particle

收稿日期: 2015-05-14

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (2012CB720000)

作者简介: 傅惠民 (1956—), 男, 浙江遂昌人, “长江学者”特聘教授、博士生导师, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法、可靠性及滤波理论研究.

filter, PF)^[11-12]方法,又存在粒子退化及重采样引起的粒子贫化问题,导致粒子多样性和有效性的缺失。

本文根据秩统计量相关原理^[13-15],提出一种适用于非高斯分布的非线性秩滤波方法。大量仿真验证表明,秩滤波较无迹 Kalman 滤波和粒子滤波具有更高的滤波精度,能很好地跟踪系统状态的变化。

1 非高斯加性噪声情况

1.1 基本方程

工程应用中,具有非高斯加性噪声的一般非线性离散系统为

$$\mathbf{X}_k = f(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}_k = h(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k \quad (2)$$

式中 $\mathbf{X}_k$ 和 $\mathbf{Z}_k$ 分别为 k 时刻的状态向量和量测向量; $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 均为非线性向量函数; $\mathbf{W}_k$ 为 k 时刻的系统噪声向量,其方差矩阵为 $\mathbf{Q}_k$; $\mathbf{V}_k$ 为 k 时刻的量测噪声向量,其方差矩阵为 $\mathbf{R}_k$,并且满足

$$\begin{cases} \text{Cov}[\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_l] = \mathbf{Q}_k \delta_{kl} \\ \text{Cov}[\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_l] = \mathbf{R}_k \delta_{kl} \\ \text{Cov}[\mathbf{W}_k, \mathbf{V}_l] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\text{Cov}[\cdot]$ 为协方差; δ_{kl} 为 δ 函数,当 $k=l$ 时, $\delta_{kl}=1$,当 $k \neq l$ 时, $\delta_{kl}=0$ 。

1.2 一般非高斯分布秩采样点集

加性噪声情况下,由秩滤波原理^[16-17]可知,一般非高斯分布秩采样点集 $\{\mathbf{x}_{k-1,i}\}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k-1,i} &= \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + r_j \lambda_{p_j} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_l \quad l=1,2,\dots,n; \\ \text{当 } j &= 1,2,\dots,m \text{ 时, } i = (j-1)n+1; \\ \text{当 } j &= m+2, m+3, \dots, 2m+1 \text{ 时,} \\ i &= (j-2)n+l \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{x}_{k-1,i}$ 为 $\mathbf{X}_{k-1}$ 的第 i 个采样点,共有 $2mn$ 个样本点; m 为采样层数; n 为 $\mathbf{X}_{k-1}$ 的维数; $(\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}})_l$ 表示矩阵 $\mathbf{P}_{k-1}$ 平方根的第 l 列; λ_{p_j} 为估计误差 $\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 所服从分布的一维标准分布概率为 p_j 的分位点; p_j 为与第 j 层采样点对应的概率,其取值一般为 $p_j = (j-0.3)/(2m+1.4)$ 或 $p_j = j/(2m+2)$; r_j 为第 j 层采样点修正系数,且满足

$$\sum_{j=1, j \neq m+1}^{2m+1} r_j \lambda_{p_j} = 0 \quad (5)$$

1.3 一般非高斯分布秩 Kalman 滤波

在已获得 $k-1$ 时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 及其误差方差矩阵 $\mathbf{P}_{k-1}$ 时, k 时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 及其误差方差矩阵 $\mathbf{P}_k$ 可按下述步骤求解。

时间更新:状态一步预测

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} = \frac{1}{2mn} \sum_{i=1}^{2mn} \mathbf{X}_{k/(k-1),i} \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{X}_{k/(k-1),i} = f(\mathbf{x}_{k-1,i}) + \boldsymbol{\mu}_{k-1}^w \quad i=1,2,\dots,2mn \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{k-1}^w = E[\mathbf{W}_{k-1}] \quad (8)$$

式中 $E[\cdot]$ 为数学期望。一步预测误差的方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k/(k-1)} &= \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{2mn} \left\{ r_i^* (\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) \times \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)})^T \right\} + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (9)$$

量测更新:重新秩采样,得到采样点集 $\{\mathbf{x}_{k/(k-1),i}\}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k/(k-1),i} &= \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + r_j \lambda_{p_j} (\sqrt{\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_l \\ l &= 1,2,\dots,n; \\ \text{当 } j &= 1,2,\dots,m \text{ 时, } i = (j-1)n+l; \\ \text{当 } j &= m+2, m+3, \dots, 2m+1 \text{ 时,} \\ i &= (j-2)n+l \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\mathbf{x}_{k/(k-1),i}$ 为 $\mathbf{X}_{k/(k-1)}$ 的第 i 个采样点,共有 $2m$ n 个样本点; m 为采样层数; n 为 $\mathbf{X}_{k/(k-1)}$ 的维数; $(\sqrt{\mathbf{P}_{k/(k-1)}})_l$ 为 $\mathbf{P}_{k/(k-1)}$ 平方根的第 l 列向量; p_j , λ_{p_j} , r_j 的定义与式(4)相同。

状态估计

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Z}_k - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)}) \quad (11)$$

估计误差的方差矩阵

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/(k-1)} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{ZZ} \mathbf{K}_k^T \quad (12)$$

滤波增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{XZ} \mathbf{P}_{ZZ}^{-1} \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} = h(\mathbf{x}_{k/(k-1),i}) + \boldsymbol{\mu}_k^v \quad i=1,2,\dots,2mn \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\mu}_k^v = E[\mathbf{V}_k] \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)} = \frac{1}{2mn} \sum_{i=1}^{2mn} \mathbf{Z}_{k/(k-1),i} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ZZ} &= \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{2mn} \left\{ r_i^* (\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)}) \times \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)})^T \right\} + \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XZ}} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{2mn} \left\{ r_i^* (\mathbf{x}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) \times (\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)})^T \right\} \quad (18)$$

式中 r_i^* 为对应于第 i 个采样点的协方差修正系数,一般可取 $r_i^* = r^* = 1, i = 1, 2, \dots, 2mn$; r^* 为协方差修正系数;协方差权重系数 ω 由下式计算:

$$\omega = \sum_{j=1, j \neq m+1}^{2m+1} r_j^2 \lambda_{p_j}^2 \quad (19)$$

2 非高斯非加性噪声情况

针对非高斯非加性噪声的系统方程,下面给出其滤波方法。

2.1 基本方程

工程应用中,具有非高斯非加性噪声的一般非线性离散系统为

$$\mathbf{X}_k = f(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1}) \quad (20)$$

$$\mathbf{Z}_k = h(\mathbf{X}_k, \mathbf{V}_k) \quad (21)$$

式中系统噪声向量 $\mathbf{W}_k$ 和量测噪声向量 $\mathbf{V}_k$ 满足式(3)。

采用状态扩维的形式,对式(20)和式(21)中的噪声项进行处理,即令

$$\mathbf{X}_{k-1}^a = [\mathbf{X}_{k-1}^T, \mathbf{W}_{k-1}^T, \mathbf{V}_k^T]^T \quad (22)$$

设非线性离散系统的状态初始条件为

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = E[\mathbf{X}_0] \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)^T] \quad (24)$$

则由式(23)和式(24)可知扩维后的状态初始条件为

$$\hat{\mathbf{X}}_0^a = E[\mathbf{X}_0^a] = [\hat{\mathbf{X}}_0^T, (\boldsymbol{\mu}_0^w)^T, (\boldsymbol{\mu}_0^v)^T]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_0^a = E[(\mathbf{X}_0^a - \hat{\mathbf{X}}_0^a)(\mathbf{X}_0^a - \hat{\mathbf{X}}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & & \\ & \mathbf{Q}_0 & \\ & & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

2.2 一般非高斯分布秩采样点集

非加性噪声情况下,由秩滤波原理^[16-17]可知,一般非高斯分布秩采样点集 $\{\mathbf{x}_{k-1,i}^a\}$ 为

$$\mathbf{x}_{k-1,i}^a = [(\mathbf{x}_{k-1,i}^x)^T, (\mathbf{x}_{k-1,i}^w)^T, (\mathbf{x}_{k-1,i}^v)^T]^T =$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^a + r_j \lambda_{p_j} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a})_l$$

$$l = 1, 2, \dots, n;$$

当 $j = 1, 2, \dots, m$ 时, $i = (j-1)n + l$;

当 $j = m+2, m+3, \dots, 2m+1$ 时,

$$i = (j-2)n + l \quad (27)$$

式中 $\mathbf{x}_{k-1,i}^a$ 为扩维后向量 $\mathbf{X}_{k-1}^a$ 的第 i 个采样点,共有 $2mn$ 个样本点; m 为采样层数; n 为 $\mathbf{X}_{k-1}^a$ 的维数,其中 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^a = [\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^T, (\boldsymbol{\mu}_{k-1}^w)^T, (\boldsymbol{\mu}_{k-1}^v)^T]^T$; $\mathbf{x}_{k-1,i}^x$, $\mathbf{x}_{k-1,i}^w$ 和 $\mathbf{x}_{k-1,i}^v$ 分别为与扩维状态相对应的采样点; $(\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a})_i$ 表示矩阵 $\mathbf{P}_{k-1}^a$ 平方根的第 i 列,其中 $\mathbf{P}_{k-1}^a = \text{diag}(\mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}, \mathbf{R}_k)$; λ_{p_j} 为状态估计误差的一维分布偏量;其中 $p_j = (j-0.3)/(2m+1.4)$ 或 $p_j = j/(2m+2)$; r_j 为第 j 层采样点修正系数,且满足

$$\sum_{j=1, j \neq m+1}^{2m+1} r_j \lambda_{p_j} = 0 \quad (28)$$

2.3 一般非高斯分布秩 Kalman 滤波

在已获得 $k-1$ 时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 及其误差方差矩阵 $\mathbf{P}_{k-1}$ 时, k 时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 及其误差方差矩阵 $\mathbf{P}_k$ 可按下述步骤求解。

时间更新:状态一步预测

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} = \frac{1}{2mn} \sum_{i=1}^{2mn} \mathbf{x}_{k/(k-1),i} \quad (29)$$

式中

$$\mathbf{x}_{k/(k-1),i} = f(\mathbf{x}_{k-1,i}^x, \mathbf{x}_{k-1,i}^w) \quad i = 1, 2, \dots, 2mn \quad (30)$$

一步预测误差的方差矩阵

$$\mathbf{P}_{k/(k-1)} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{2mn} \left[r_i^* (\mathbf{x}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) \times (\mathbf{x}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)})^T \right] \quad (31)$$

量测更新:状态估计

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Z}_k - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)}) \quad (32)$$

估计误差的方差矩阵

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/(k-1)} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{ZZ}} \mathbf{K}_k^T \quad (33)$$

滤波增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{XZ}} \mathbf{P}_{\mathbf{ZZ}}^{-1} \quad (34)$$

式中

$$\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} = h(\mathbf{x}_{k/(k-1),i}^x, \mathbf{x}_{k-1,i}^v) \quad i = 1, 2, \dots, 2mn \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)} = \frac{1}{2mn} \sum_{i=1}^{2mn} \mathbf{Z}_{k/(k-1),i} \quad (36)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{ZZ}} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{2mn} \left[r_i^* (\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)}) \times (\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)})^T \right] \quad (37)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XZ}} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{2mn} \left[r_i^* (\mathbf{X}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{X}}_{k/(k-1)}) \times (\mathbf{Z}_{k/(k-1),i} - \hat{\mathbf{Z}}_{k/(k-1)})^T \right] \quad (38)$$

式中 r_i^* 为对应于第 i 个采样点的协方差修正系数,一般可取 $r_i^* = r^* = 1, i=1, 2, \dots, 2mn$; r^* 为协方差修正系数;协方差权重系数 ω 由下式计算:

$$\omega = \sum_{j=1, j \neq m+1}^{2m+1} r_j^2 \lambda_{p_j}^2 \quad (39)$$

3 非高斯噪声秩滤波方法仿真验证

采用常用的单变量非平稳增长模型^[16-18]进行仿真,其系统方程为

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \quad (40)$$

$$z_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k \quad (41)$$

式中

$$f(x_{k-1}) = 0.9x_{k-1} + \frac{25x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + \cos(0.004k) \quad (42)$$

其中 x_k 为状态变量; z_k 为量测变量;系统噪声 $w_{k-1} \sim \Gamma(3, 2)$;量测噪声 $v_k \sim N(0, 10^{-5})$;状态初始值及其误差方差矩阵分别取 $x_0 = 1$ 和 $\mathbf{P}_0 = 0.75$;采样点修正系数 $r_1 = r_2 = 1$;仿真时间为 60 个单位时间,采样间隔为 1 个单位时间,粒子数为 50。

分别采用无迹 Kalman 滤波(UKF)、粒子滤波(PF)和秩滤波(RF)对非平稳增长模型进行递推估计,通过 100 次独立仿真实验,可以计算各滤波方法估计值与状态真值的方均根误差(root mean square error, RMSE)。图 1 为 UKF、PF 和

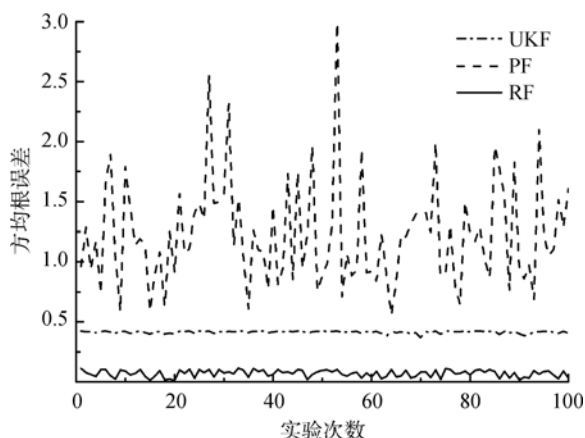


图 1 UKF、PF 和 RF 的方均根误差比较

Fig. 1 Comparison of RMSE of UKF, PF and RF

RF 三种滤波方法的方均根误差。

从图 1 可以看到,通过 100 次独立仿真实验,UKF 和 PF 的方均根误差要明显大于 RF。经过计算,其方均根误差均值分别为 0.42、1.23 和 0.07。由此可知,RF 能更好地跟踪系统状态 x_k 的变化。因此,RF 能在非线性非高斯的情况下有效地提高滤波的精度。

4 结 论

通过上述理论推导及仿真分析,可得如下 5 个结论:

1) 根据秩采样原理,给出了加性噪声情况的秩采样点集和重新秩采样点集,与其他采样方法相比,得到的点集分布更加合理,能够更好地模拟系统状态的概率分布。

2) 针对加性噪声情况,提出了非线性非高斯秩滤波方法,给出其滤波递推公式。

3) 针对非加性噪声情况,通过扩维,给出了一般非高斯的秩采样点集,它具有信息量大、分布合理的优点。

4) 建立了适用于非加性噪声的非线性非高斯秩滤波公式,给出其算法及递推步骤。

5) 从非高斯情况的单变量非平稳增长模型算例可以看到,与 UKF 和 PF 相比,RF 的滤波精度提高了 500% 以上。

参考文献:

- [1] Doucet A, Vo B N, Andrieu C, et al. Particle filtering for multi-target tracking and sensor management[C] // Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion. Annapolis, MD, USA: IEEE, 2002: 474-481.
- [2] Gustafsson F, Gunnarsson F, Bergman N, et al. Particle filters for positioning, navigation, and tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2): 425-437.
- [3] LI Shuang, PENG Yuming. Radio beacons/IMU integrated navigation for Mars entry[J]. Advances in Space Research, 2011, 47(7): 1265-1279.
- [4] 周东华, 席裕庚, 张钟俊. 一种带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器[J]. 自动化学报, 1991, 17(6): 689-696. ZHOU Donghua, XI Yugeng, ZHANG Zhongjun. A sub-optimal multiple fading extended Kalman filter[J]. Acta Automatica Sinica, 1991, 17(6): 689-696. (in Chinese)
- [5] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山, 等. 自校准 Kalman 滤波方法[J]. 航空动力学报, 2014, 29(6): 1363-1368. FU Huimin, WU Yunzhang, LOU Taishan, et al. Self-calibration Kalman filter method[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(6): 1363-1368. (in Chinese)
- [6] 付梦印, 邓志红, 闫莉萍. Kalman 滤波理论及其在导航系

- 统中的应用[M]. 北京:科学出版社,2010.
- [7] Sunahara Y. An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems[J]. *Journal of Basic Engineering*, 1970, 92(2): 385-393.
- [8] Fujimoto O, Okita Y, Ozaki S. Nonlinearity compensation extended Kalman filter and its application to target motion [J]. *Oki Technical Review*, 1997, 63(159): 1-12.
- [9] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of Kalman filter to nonlinear systems[C]// *Proceedings of 11th International Symposium Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*. Orlando, FL: SPIE, 1997: 182-193.
- [10] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477-482.
- [11] Doucet A, Godsill S, Andrieu C. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering[J]. *Statistics and Computing*, 2000, 10(3): 197-209.
- [12] Djuric P M, Kotecha J H, Zhang J Q, et al. Particle filtering[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2003, 20(5): 19-38.
- [13] 傅惠民. 连续分布百分位值和百分率的区间估计和假设检验[J]. *航空学报*, 1993, 14(11): 569-577.
- FU Huimin. Interval estimation and hypothesis test for percentiles and percentages of continuous distributions[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1993, 14(11): 569-577. (in Chinese)
- [14] 傅惠民. 不完全数据秩分布理论[J]. *航空学报*, 1993, 14(11): 578-584.
- FU Huimin. Theory of incomplete data rank distributions [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1993, 14(11): 578-584. (in Chinese)
- [15] 傅惠民. 二维单侧容限系数方法[J]. *航空学报*, 1993, 14(3): 167-172.
- FU Huimin. A method of two-dimensional one-sided tolerance factors[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1993, 14(3): 167-172. (in Chinese)
- [16] 傅惠民, 肖强, 吴云章, 等. 秩滤波方法[J]. *机械强度*, 2014, 36(4): 521-526.
- FU Huimin, XIAO Qiang, WU Yunzhang, et al. Rank filter method[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2014, 36(4): 521-526. (in Chinese)
- [17] 傅惠民, 肖强, 娄泰山, 等. 秩粒子滤波[J]. *机械强度*, 2014, 36(6): 894-898.
- FU Huimin, XIAO Qiang, LOU Taishan, et al. Rank particle filter[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2014, 36(6): 894-898. (in Chinese)
- [18] Gordon N, Salmond D. Novel approach to nonlinear and non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. *Proceedings of Institute Electric Engineering*, 1993, 140(2): 107-113.

(编辑:王碧琚)