

采用近似边界求解壁板颤振的 CBS 有限元算法

李凯伦^{1,2}, 魏 云¹, 张玫琳³, 张家忠¹

(1. 西安交通大学 能源与动力工程学院, 西安 710049;

2. 西安热工研究院有限公司 锅炉设备及环保事业部, 西安 710032;

3. 中国电力建设集团有限公司 河南省电力勘测设计院, 郑州 450007)

摘 要: 为了简化 Euler 方程求解壁板颤振问题, 将近似边界条件成功地推广到 CBS(characteristic-based split)有限元方法求解壁板颤振领域, 把运动壁面的影响转化为 Euler 方程的边界条件, 避免了对动网格的处理. 通过对近似边界方法、动网格方法以及 3 阶活塞理论的数值模拟结果进行对比发现: 首先, 加载近似边界的 CBS 有限元方法操作非常简便, 且模拟结果与动网格方法完全吻合; 其次, Euler 方程可以准确捕捉到壁板前后两端不光滑尖点所引起的压力突跳, 而 3 阶活塞理论则无法做到; 最后, 采用近似边界的 CBS 有限元方法在求解无黏可压缩流动中细长体小变形的流-固耦合问题上具有潜力和优势.

关 键 词: 壁板颤振; 流-固耦合; CBS 有限元算法; 近似边界条件; 动网格

中图分类号: V414.4

文献标志码: A

CBS finite element method with approximate boundary conditions for panel flutter

LI Kai-lun^{1,2}, WEI Yun¹, ZHANG Mei-lin³, ZHANG Jia-zhong¹

(1. School of Energy and Power Engineering,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Boiler and Enviromental Protection Department,

Xi'an Thermal Power Research Institute Company Limited, Xi'an 710032, China;

3. Henan Electric Power Survey and Design Institute,

Power Construction Corporation of China, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: In order to simplify the solving process of Euler equation for panel flutter, approximate boundary conditions were successfully introduced into CBS (characteristic-based split) finite element method to simulate the panel flutter. The impact of moving boundary was treated as normal boundary conditions for Euler equation. From analysis, it is found that: first, the results by approximate boundary conditions agree very well with those by moving boundary method, and the application of approximate boundary conditions is more convenient; then, Euler equation, rather than 3rd-order piston theory is able to capture the pressure jump caused by sharp points at the ends of panels; finally, CBS finite element method with approximate boundary conditions has potentials and advantages in solving the fluid-structure interaction problems of small deformation of slender bodies in inviscid compressible flows.

Key words: panel flutter; fluid-structure interaction; CBS finite element method; approximate boundry conditions; moving mesh

在航空航天领域,超声速流动中气动弹性及热气动弹性所引发的壁板颤振一直是该领域的重点研究问题,众多的学者对该问题进行了大量的研究^[1-6]。在过去,由于计算机能力所限,求解气动力大多采用活塞理论等气动力近似模型,然而随着计算机能力的进步,越来越多的学者将求解壁板颤振气动力问题的目光投向了非定常 Euler 方程和 N-S 方程,即将壁板颤振的气弹问题当做流-固耦合问题进行求解。通过求解流场对气动力进行模拟的优点在于:应用范围更加广泛,计算结果更加精确,并且可以充分了解结构振动对流场的影响。

过去的几十年,学者们对气动力求解方法以及流-固耦合问题进行了充分的研究^[7-10],采用流-固耦合方法求解壁板颤振,就必须涉及流场求解、动边界及动网格等问题。在求解流场方面,有限体积分法和有限差分法已经得到广泛的应用,而采用有限元求解流场,也有其巨大的潜力。目前在该领域,应用最广泛的是 CBS(characteristic-based split)有限元方法,该方法于 1995 年由 Zienkiewicz 等人^[11-14]首次提出,采用 CG(characteristic-Galerkin)方法进行时间离散,并采用算子分裂法对离散后的方程进行分步求解,有效地抑制了 N-S 方程中对流项引起的速度场数值振荡,且成功避免了 BB(Babuška-Brezzi)条件的限制。

流-固耦合求解涉及到动边界问题,就需要采用特殊的方法处理运动网格,目前应用较多的是 ALE(arbitrary Lagrangian Eulerian)方法。由于该方法需要采用网格速度对原始 N-S 方程中的对流项进行修正,操作多有不便。最近 Sun 等人^[15-16]提出了一种处理流-固耦合动边界和动网格问题的新方法,通过将前一时刻网格节点的信息(速度、压力)投影到新一时刻的网格节点上,巧妙地完成了流-固耦合过程中新旧网格的信息传递,成功地处理了该类动边界和动网格问题,操作简单且精确性非常好。

在 Euler 方程求解动边界问题方面,近些年来,Gao 等人^[17-18]提出了一种近似边界条件方法,用来处理无黏可压缩流动中细长体小变形的动边界问题。该方法最大的优点在于:其将壁面运动对流场的影响转化为速度和压力边界条件,避免了处理动边界和动网格问题,操作十分简单方便。通过与传统动网格求解方法进行比较发现,该方法具有非常好的精确性。由于一般壁板在厚度方向上的变形远远小于长度方向的尺度,因此壁板颤

振的流-固耦合问题完全可以采用加载近似边界条件的 Euler 方程进行求解,简化计算过程。

基于以上所述,本文对加载近似边界条件的 CBS 有限元求解 Euler 方程动边界问题进行研究,通过公式推导,将动壁面对流场的影响以边界条件的方式加载到求解 Euler 方程的 CBS 有限元中,巧妙地避免了对动网格的处理,极大地简化了计算及编程。最后,对采用近似边界条件的 CBS 有限元、CBS 有限元动网格方法以及 3 阶活塞理论模拟壁板颤振的数值结果进行了对比研究。

1 问题描述

壁板颤振示意图如图 1 所示, y 轴垂直于纸面,且壁板沿 y 轴无限长; x 轴为长度方向,壁板两端采用简支边界,且两端不可移动; z 轴为板厚方向,壁板沿 z 轴具有横向位移 w (即挠度);无穷远来流平行于外壁面掠过,壁板在来流气动力及本身弹性和惯性力的影响下进行自激振动。图中 H 为板厚, a 为壁板长度, N_0 为施加在壁板两端的预紧力, u_∞, p_∞ 分别为来流速度与压力。

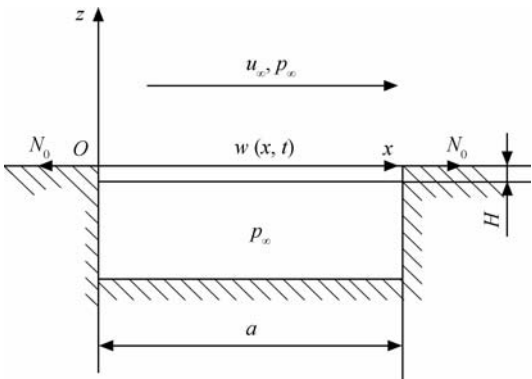


图 1 二维壁板气弹颤振示意图
Fig. 1 Schematic diagram of 2-D aeroelastic panel flutter

2 控制方程及数值求解

2.1 求解 Euler 方程的 CBS 有限元双时间步长法

本文采用 CBS 有限元双时间步长法求解非定常 Euler 方程获取气动力,根据双时间步长方法的思想,需要在控制方程中引入一个与虚拟时间相关的导数项,带有虚拟时间导数项的 Euler 方程无量纲形式及其相关辅助方程如下(其中 $\bar{\tau}$ 表示虚拟时间)。

质量方程

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} = - \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_i}$$

(1)

动量方程

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (\bar{u}_j \bar{U}_i) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} \quad (2)$$

能量方程

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{e}_t)}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{e}_t)}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (\bar{u}_j \bar{\rho} \bar{e}_t) - \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{p})}{\partial \bar{x}_i} \quad (3)$$

声速方程

$$\kappa^2 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\rho}} = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} = \gamma \bar{R} \bar{T} = (\gamma - 1) \bar{T} \quad (4)$$

内能方程

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{e}_t &= \bar{\rho} (\bar{e} + \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i) = \\ &\frac{1}{\gamma - 1} \bar{p} + \frac{\bar{U}_i \bar{U}_i}{2 \bar{\rho}} = \frac{\bar{T}}{\gamma} \bar{\rho} + \frac{\bar{U}_i \bar{U}_i}{2 \bar{\rho}} \end{aligned} \quad (5)$$

从式(5)中可以获取 $\bar{p}$ 和 $\bar{T}$ 的表达式为

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{\rho} \bar{e}_t - \frac{\bar{U}_i \bar{U}_i}{2 \bar{\rho}} \right) \quad (6)$$

$$\bar{T} = \frac{\gamma}{\bar{\rho}} \left(\bar{\rho} \bar{e}_t - \frac{\bar{U}_i \bar{U}_i}{2 \bar{\rho}} \right) \quad (7)$$

以上公式中无量纲变量形式表达式如下:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \bar{t} = \frac{t}{(a/u_\infty)}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad \bar{\kappa}^2 = \frac{\kappa^2}{u_\infty^2}, \\ \bar{x}_i &= \frac{x_i}{L}, \quad \bar{U}_i = \bar{\rho} \bar{u}_i, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{u_\infty}, \quad \bar{e}_t = \frac{e_t}{u_\infty^2}, \\ \bar{e} &= \frac{e}{u_\infty^2}, \quad \bar{c}_v = \frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{\gamma}, \quad \bar{T} = \frac{T c_p}{u_\infty^2}, \\ \bar{h} &= \frac{h}{u_\infty^2}, \quad \bar{R} = \frac{R}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \end{aligned} \quad (8)$$

式中下标 ∞ 表示来流; ρ 表示气体密度; t 表示时间; u 表示气体速度; p 表示气体压力; κ 表示声速; e_t 表示气体比总能; e 表示气体比内能; c_p 和 c_v 分别表示气体的比定压热容和比定容热容; γ 表示等熵指数; T 表示绝对温度; h 表示气体的比焓; R 表示理想气体常数.

按照 CBS 有限元的步骤,采用 split B 方法的全显式格式^[14]依次将质量、动量以及能量方程对虚拟时间 $\bar{\tau}$ 进行离散可得公式如下:

$$\begin{aligned} \bar{U}_i^{m+1} - \bar{U}_i^m &= \Delta \bar{\tau} \left[-\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (\bar{u}_j \bar{U}_i)^m - \frac{\partial \bar{p}^m}{\partial \bar{x}_i} \right] + \\ &\frac{\Delta \bar{\tau}^2}{2} \bar{u}_k^m \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (\bar{u}_j \bar{U}_i)^m + \frac{\partial \bar{p}^m}{\partial \bar{x}_i} \right] - \\ &\frac{\Delta \bar{\tau}}{2 \Delta \bar{t}} \frac{3 \bar{U}_i^m - 4 \bar{U}_i^n + \bar{U}_i^{n-1}}{2 \Delta \bar{t}} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{m+1} - \bar{\rho}^m &= -\Delta \bar{\tau} \left(\frac{\partial \bar{U}_i^m}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\partial \Delta \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) - \\ &\frac{\Delta \bar{\tau}}{2 \Delta \bar{t}} \frac{3 \bar{\rho}^m - 4 \bar{\rho}^n + \bar{\rho}^{n-1}}{2 \Delta \bar{t}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$(\bar{\rho} \bar{e}_t)^{m+1} - (\bar{\rho} \bar{e}_t)^m =$$

$$-\Delta \bar{\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} [\bar{u}_i (\bar{\rho} \bar{e}_t + \bar{p})] \right\}^m +$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta \bar{\tau}^2}{2} \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} [\bar{u}_i (\bar{\rho} \bar{e}_t + \bar{p})] \right\}^m - \\ &\Delta \bar{\tau} \frac{3 (\bar{\rho} \bar{e}_t)^m - 4 (\bar{\rho} \bar{e}_t)^n + (\bar{\rho} \bar{e}_t)^{n-1}}{2 \Delta \bar{e}_t} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta \bar{U}_i = \bar{U}_i^{m+1} - \bar{U}_i^m \quad (12)$$

式中 m 表示虚拟时间步; $\Delta \tau$ 表示虚拟时间步长;上标 n 表示真实时间步; Δt 表示真实时间步长;

式(9)~式(11)右端最后一项分别为 $-\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{t}}, -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}}$

和 $-\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{e}_t)}{\partial \bar{t}}$ 的时间离散项.

2.2 壁板控制方程

无量纲形式的壁板控制方程及边界条件为

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \left[\bar{N}_0 + 6 \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = \Delta \bar{p} \quad (13)$$

$$\bar{w}|_{\bar{x}=0, \bar{x}=1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=0, \bar{x}=1} = 0 \quad (14)$$

式中 $\Delta \bar{p}$ 向上为正,与壁板位移方向相同,其物理意义为壁板内外侧压力差.式(13)中无量纲形式的变量表达式如下:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{H}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{\rho_p} H a^4 / D}, \\ \Delta \bar{p} &= \frac{\Delta p}{(DH/a^4)}, \quad \bar{N}_0 = \frac{N_0 a^2}{D}, \end{aligned}$$

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)} \quad (15)$$

式中 ρ_p 为壁板密度; D 为壁板的弯曲刚度; E 为壁板弹性模量; μ 为泊松比.

在求解过程中,采用 Euler 方程求得壁板各点内外压差 $\Delta \bar{p}$ 后,再采用有限元方法对壁板控制方程进行求解.

2.3 近似边界条件方法

2.3.1 近似边界条件的原始表达

考虑一个细长体围绕其平衡位置在做微小振动,该细长体沿 x 轴并且位于 $x=0$ 到 $x=1$ 之间.假设该细长体瞬时形状函数为 $f(x, t)$,这样 t 时刻细长体表面速度和压力近似边界条件可以写为

$$v(t, x, f) = u(t, x, f) f_x + f_t \quad (16)$$

$$\begin{aligned} p_y(t, x, f) &= f_x p_x(t, x, f) - \rho(t, x, f) \cdot \\ &[f_u + 2 f_{ux} u(t, x, f) + f_{xx} u^2(t, x, f)] \end{aligned} \quad (17)$$

以上便是 Gao 等人^[17-18]的文章中所给出的近似边界条件原始表达式,在下面通过公式推导将其加载到 CBS 有限元求解 Euler 方程动边界问题中.

2.3.2 速度近似边界条件的数值加载方法

为了加载速度边界条件,定义壁面外法线方向(流场内法线方向)以及壁面切线方向的单位向量分别为

$$\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta'_x, \zeta'_y\} = \left\{ \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}} \right\} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{v} = \{v'_y, -v'_x\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}}, \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2}} \right\} \quad (19)$$

式(16)可以写为

$$U \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2}} + V \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}} = U_{\zeta'} + V_{\zeta} = U_{\zeta} = \frac{f_i \rho}{\sqrt{1+f_x^2}} \quad (20)$$

式中 $U = \rho u, V = \rho v$. 对于速度边界条件,将其作为强制边界条件加入

$$U = U_{\zeta'} \zeta'_x + U_v \zeta'_y \quad (21)$$

$$V = U_{\zeta'} \zeta'_y - U_v \zeta'_x \quad (22)$$

式中 U_v 表示壁面切线方向上的密度与速度乘积,其通过上一时刻的流场参数 U 和 V 向 $\boldsymbol{v}$ 方向投影得到.

2.3.3 压力近似边界条件的数值加载方法

关于压力边界条件,定义壁面上流场的外法线方向单位向量为

$$\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_x, \zeta_y\} = \left\{ \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2}} \right\} \quad (23)$$

则式(17)无量纲化后可以写为

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \zeta_x + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \zeta_y = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} = \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{1+\bar{f}_x^2}} (\bar{f}_{ii} + 2\bar{f}_{ix} + \bar{f}_{xx} \bar{u}^2) \quad (24)$$

从式(9)可以看出,压力对空间坐标的导数 $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}$ 会对速度与密度乘积 U 和 V 产生影响,同时从式(10)可以看出, U 和 V 的变化又会对密度产生影响,这样,考虑压力对密度的影响后,式(10)可以修正为

$$\bar{\rho}^{m+1} - \bar{\rho}^m = -\Delta \bar{\tau} \left[\frac{\partial \bar{U}_i^m}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \bar{U}_i}{\partial x_i} - \Delta \bar{\tau} \frac{\partial^2 \bar{p}}{x_i^2} \right] - \Delta \bar{\tau} \frac{3\bar{\rho}^m - 4\bar{\rho}^n + \bar{\rho}^{n-1}}{2\Delta \bar{t}} \quad (25)$$

在 Galerkin 有限元求解的过程中,需要采用插值函数 N_a 表示单元上的变量,同时将其作为权函数在整个求解区域上对上式进行积分,这样式(25)中括号内第 3 项便可以写为

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\tau}^2 \int_{\Omega} N_a \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i^2} d\Omega &= \\ \Delta \bar{\tau}^2 \int_{\Omega} N_a \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} d\Gamma - \Delta \bar{\tau}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} d\Omega &\approx \\ \Delta \bar{\tau}^2 \int_{\Omega} N_a N_{\beta} d\Gamma \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} \right)_{\beta} &\quad (26) \end{aligned}$$

式中 Ω 表示有限元积分区域, Γ 表示积分区域边界. 式(26)中可以将带负号项略去而进行简化的原因在于:式(26)仅发生在动边界上,其内部相关项可以忽略. 采用 $\bar{\rho}$ 表示式(25)右端最后一项(含负号),这样式(25)在有限元求解中便可以表示为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_a N_{\beta} d\Omega \bar{\rho}_{\beta}^{m+1} &= \\ \int_{\Omega} N_a N_{\beta} d\Omega \bar{\rho}_{\beta}^m - \Delta \bar{\tau} \int_{\Omega} N_a \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_i} d\Omega \bar{U}_{\beta i}^m - \\ \Delta \bar{\tau} \int_{\Omega} N_a \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_i} d\Omega \Delta \bar{U}_{\beta i} + \int_{\Omega} N_a N_{\beta} d\Omega \hat{\rho}_{\beta i}^m + \\ \Delta \bar{\tau}^2 \int_{\Omega} N_a N_{\beta} d\Gamma \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{\beta} &\quad (27) \end{aligned}$$

求解过程中,通过式(24)求取 $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta}$,再将其代入式(27),便可以完成对压力边界条件的加载.

2.3.4 求解步骤

本文中采用近似边界方法求解流程如下.

1) 真实时间步开始循环.

2) 虚拟时间步循环:①根据 m 虚拟时刻已知流场信息,采用式(9)求解 $\bar{U}_i^{m+1}$;②采用式(27)求解 $\bar{\rho}^{m+1}$ (运动壁面产生的压力或者密度变化包含在式(27)中);③采用式(11)求解 $(\bar{\rho} \bar{E})^{m+1}$;④采用式(21)和式(22)加载速度边界条件;⑤判定 $\bar{U}_i^{m+1} - \bar{U}_i^m < \epsilon, \bar{\rho}^{m+1} - \bar{\rho}^m < \epsilon, (\bar{\rho} \bar{E})^{m+1} - (\bar{\rho} \bar{E})^m < \epsilon$ 是否满足,若不满足则继续虚拟时间步循环;若满足,则结束虚拟时间步循环,并令: $\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^{m+1}, \bar{\rho}^{n+1} = \bar{\rho}^{m+1}, (\bar{\rho} \bar{E})^{n+1} = (\bar{\rho} \bar{E})^{m+1}$,并根据式(6)、式(7)和式(4)确定 $\bar{p}^{n+1}, \bar{T}^{n+1}$ 和 $\bar{\kappa}^{n+1}$.

3) 采用 $\bar{p}_i^{n+1}$ 对结构方程式(13)进行计算,获得 $n+1$ 时刻壁面的位移 $\bar{w}^{n+1}$,同时令壁面形状函数 $\bar{f} = \bar{w}^{n+1}$,求其对空间和时间的导数 $\bar{f}_x, \bar{f}_{ix}, \bar{f}_{xx}$ 和 $\bar{f}_{ii}$ 等变量以确定下一时刻的近似边界条件的加载信息.

4) 当前真实时间步循环结束,进入下一时间步的循环中.

2.4 流-固耦合界面的信息传递

在本研究中,流体和固体采用不同的特征时间、特征尺度或压力对相应变量进行无量纲化,因此在计算中,当流体和固体的信息在流-固耦合界面上进行交换时,需要对无量纲变量进行转化,以时间变量为例说明:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f \frac{a/u_\infty}{\sqrt{\rho_p Ha^4/D}} \tag{28}$$

$$\bar{t}_f = \bar{t}_s \frac{\sqrt{\rho_p Ha^4/D}}{a/u_\infty} \tag{29}$$

式中 $\bar{t}_s$ 和 $\bar{t}_f$ 分别表示求解壁板和流场的无量纲特征时间. 同样的道理,压力、位移、速度等变量在界面信息交换时也需要根据无量纲化公式进行转化以适应各自计算需要.

3 Euler 方程 CBS 有限元算法的数值验证

图 2 中对本研究模拟翼型表面压力系数 C_p 分布与参考文献[19]进行了对比,图中 c 为翼型弦长. 从图 2 中可以看出,本研究所采用的 CBS 算法与 Davis^[19] 的计算结果非常吻合,从而验证 CBS 算法求解 Euler 方程静止边界问题的正确性.

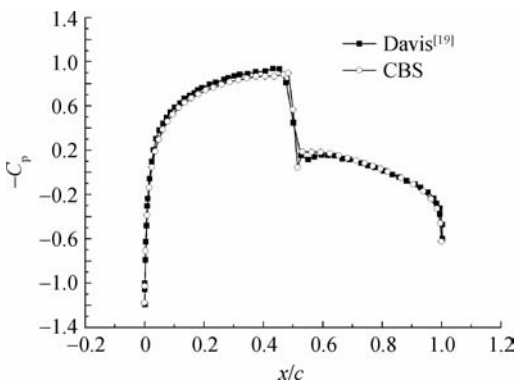


图 2 NACA0012 翼型表面压力系数分布对比验证角 ($\alpha=0^\circ, Ma_\infty=0.8$)

Fig. 2 Verification of pressure coefficient distribution on NACA0012 airfoil surface ($\alpha=0^\circ, Ma_\infty=0.8$)

为了与近似边界方法进行对比,本研究同时采用动网格方法对壁板颤振进行研究,以期对这两种方法进行比较. 本研究中采用 Sun 等^[15-16] 提出的方法对动网格问题进行处理,具体细节请参

阅文献[15-16],限于篇幅所限,此处不做细述. 图 3 中对这两种方法所得动壁面压力系数与 Bein 等人^[20] 的结果进行了对比验证,可以发现,采用近似边界条件以及动网格方法均可以得到足够精确的结果.

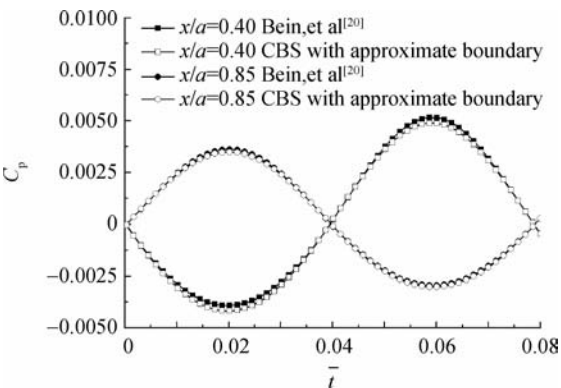
数值验证中动壁面与高超声速来流平行,来流参数设置为:来流马赫数 $Ma_\infty=10.05$;来流温度 $T_\infty=223.16\text{ K}$;来流压力 $p_\infty=2641.6\text{ Pa}$;壁面函数及其相关参数如式(30)及式(31)所示:

$$g(x,t) = A \sin \frac{2\pi x}{a} \sin(\omega t) \tag{30}$$

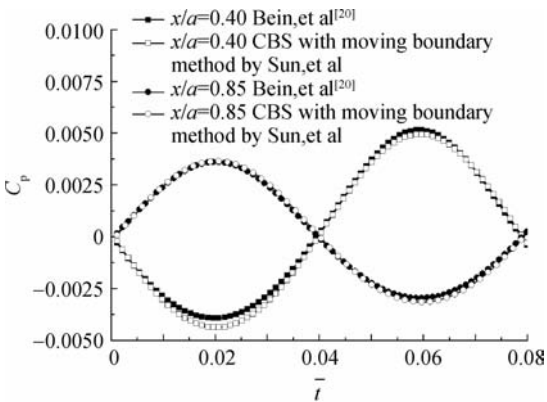
$$A = 0.002\text{ m}$$

$$\omega = 1.206 \times 10^3\text{ rad/s}, a = 0.45\text{ m} \tag{31}$$

式中 A 为壁板上下振动的幅值, ω 为角频率.



(a) 近似边界条件数值验证



(b) 动网格方法数值验证

图 3 动壁面压力系数时间历程图对比

Fig. 3 Comparison of pressure coefficient histories on moving boundary

4 Euler 方程与 3 阶活塞理论模拟壁板颤振比较研究

本研究中数值模拟所采用参数设置如表 1 所示.

表 1 本研究物理参数设置
Table 1 Physical parameters in this study

物理参数	数值
来流压力/Pa	15 330
来流温度/K	288. 15
壁板长度/m	1. 5
壁板厚度/m	0. 003
壁板材料密度/(kg/m ³)	7 850
壁板材料弹性模量/GPa	201. 04
壁板材料泊松比	0. 29
壁板两端预紧力/(N/m)	0

在壁板的气弹研究中,无量纲气动力 λ 是一个非常重要的研究参数($\lambda = \frac{2a^3 q_\infty}{DMa_\infty}$, q 为来流动压),当壁板及来流的相关参数确定时,无量纲气动力与马赫数存在一一对应的关系。为了与以往的壁板气弹问题研究相一致,本研究以无量纲气动力 λ 作为参数对壁板颤振进行分析。图 4 中给出了 λ 为分岔参数时,采用近似边界条件、动网格方法以及 3 阶活塞理论得到的壁板颤振分岔图。可以看出,采用近似边界条件求解 Euler 方程模拟结果与动网格方法吻合得非常好,并且 3 阶活塞理论模拟结果与 Euler 方程模拟结果在分岔点处吻合得很好,只是随着无量纲气动力的增大,Euler 方程计算所得振幅略微偏小。

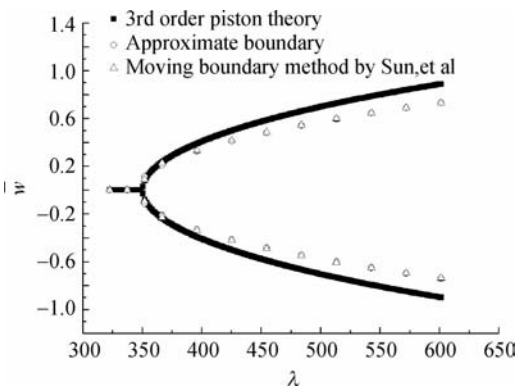


图 4 不同气动力模拟壁板颤振分岔对比图
($x/a=0.75$ 处位移极值)
Fig. 4 Comparison of bifurcation diagram of panel flutter simulated by different aerodynamic force models (extreme values at $x/a=0.75$)

图 5 中给出了在 $\lambda=425.33$ 时 3 种方法所得壁板的位移时间历程图对比,可以看出,采用

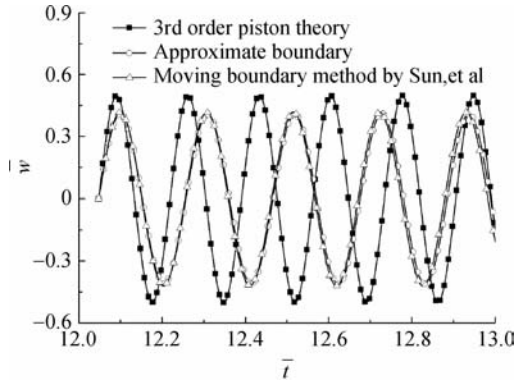


图 5 不同气动力所得壁板颤振的位移时间历程图比较
($\lambda=425.33, x/a=0.75$)
Fig. 5 Comparison of displacement-time histories of panel flutter by different aerodynamic force models ($\lambda=425.33, x/a=0.75$)

近似边界条件和动网格方法所得时间历程图非常吻合,但是采用 3 阶活塞理论与 Euler 方程所得时间历程图在振幅和周期上均稍有差距,Euler 方程所得振幅略小于 3 阶活塞理论所得,而 Euler 方程所得振动周期则略大于 3 阶活塞理论所得。

图 6~图 9 中分别给出了壁板 $x/a=0.75$ 处位移取最小值、零值(上行)、最大值、零值(下行)时,3 种方法所得壁板的位移($\bar{w}$)分布图和压力(p)分布图。可以看出,依旧是近似边界条件模拟结果与动网格方法吻合得很好,而 Euler 方程与 3 阶活塞理论模拟结果则稍有差距,但大体是一致的。值得注意的是,在壁板表面压力分布图上,由 Euler 方程所得压力值在壁板前缘和后缘点处有突跳现象存在($x/a=0.75$ 处取最小、最大值时最为明显),这主要是由于壁板的位移分布在前后缘两端点处导数变化不连续引起的,3 阶活塞理论不能捕捉这一现象,而 Euler 方程可以准确模拟出壁板前后缘两端不光滑尖点引起的压力突跳。

图 10 和图 11 中分别给出了 $x/a=0.75$ 处位移取最小值和最大值时,两种 Euler 方程动边界处理方法所得到的压力场对比,可以看出,这两种算法所得到的压力场非常接近,几乎是一致的。

从上面的算例中可以知道,近似边界条件模拟壁板颤振结果与动网格方法所得结果非常吻合,因此,采用近似边界条件的 CBS 有限元方法在求解无黏可压缩流动中细长体小变形的流-固耦合问题上具有较大的优势和潜力。

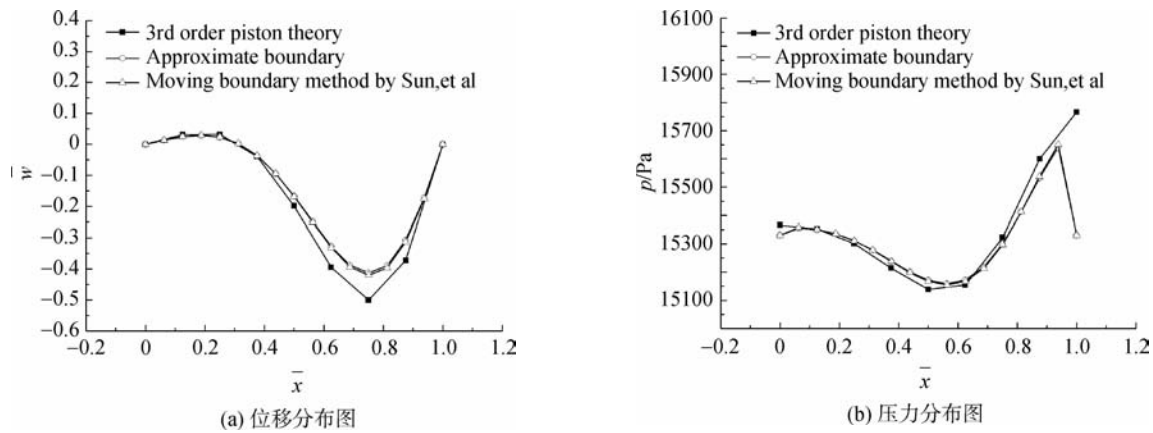


图 6 壁板 $x/a=0.75$ 处位移取最小值时壁板位移与压力分布($\lambda=425.33$)

Fig. 6 Displacement and pressure distribution of panel with minimum displacement at $x/a=0.75$ ($\lambda=425.33$)

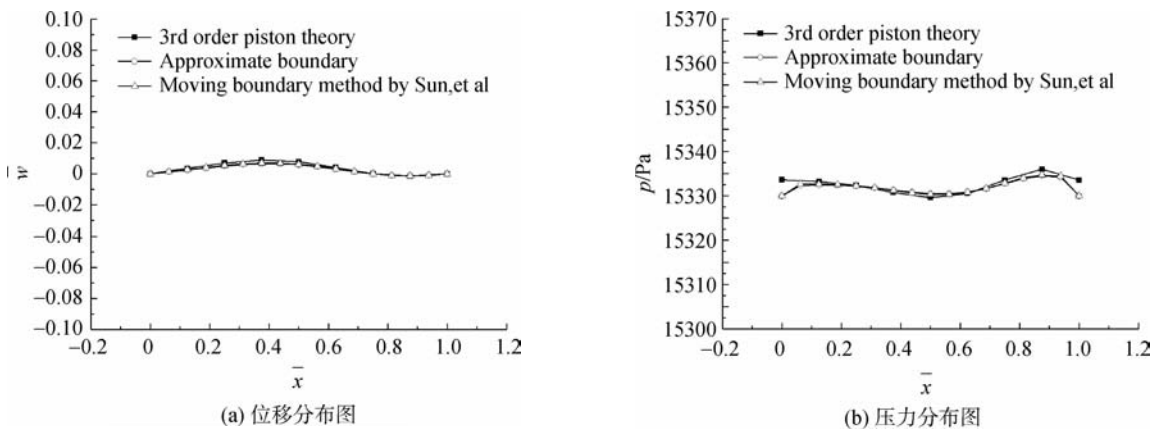


图 7 壁板 $x/a=0.75$ 处位移取零值时(上行)壁板位移与压力分布图($\lambda=425.33$)

Fig. 7 Displacement and pressure distribution of panel with zero displacement (upward) at $x/a=0.75$ ($\lambda=425.33$)

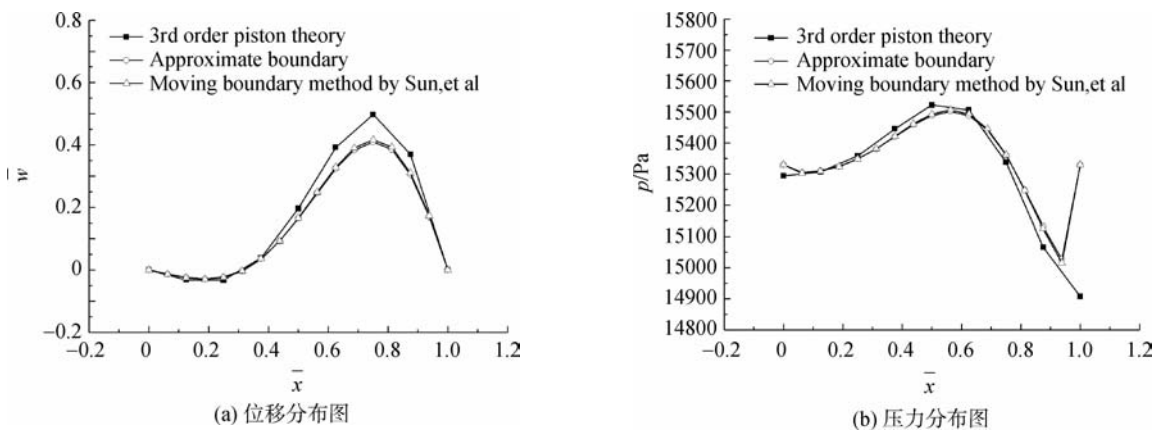


图 8 壁板 $x/a=0.75$ 处位移取最大值时壁板位移与压力分布图($\lambda=425.33$)

Fig. 8 Displacement and pressure distribution of panel with maximum displacement at $x/a=0.75$ ($\lambda=425.33$)

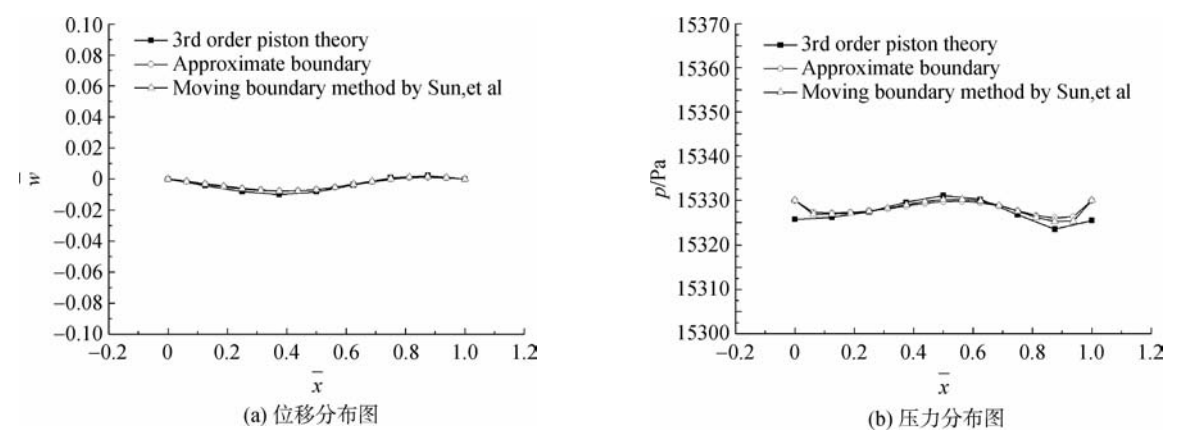


图 9 壁板 $x/a=0.75$ 处位移取零值时(下行)壁板位移与压力分布图($\lambda=425.33$)

Fig. 9 Displacement and pressure distribution of panel with zero displacement (downward) at $x/a=0.75$ ($\lambda=425.33$)

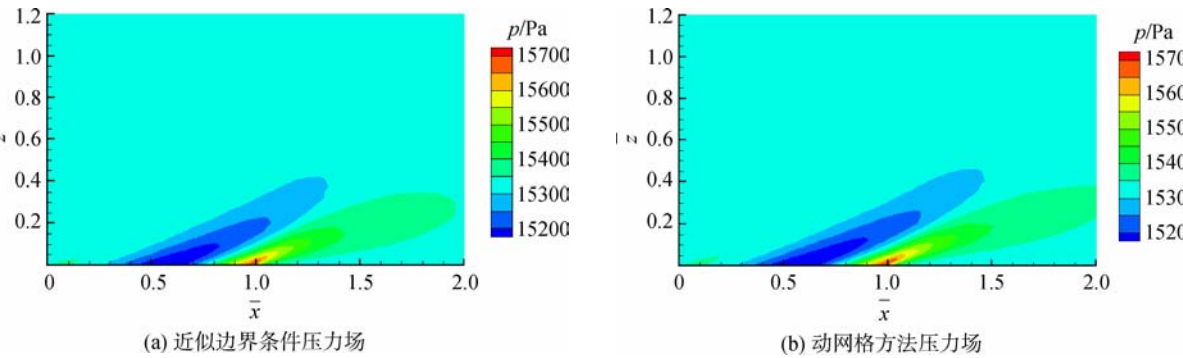


图 10 $x/a=0.75$ 处位移取最小值时两种方法所得压力场对比($\lambda=425.33$)

Fig. 10 Comparison of pressure field by two methods with minimum displacement at $x/a=0.75$ ($\lambda=425.33$)

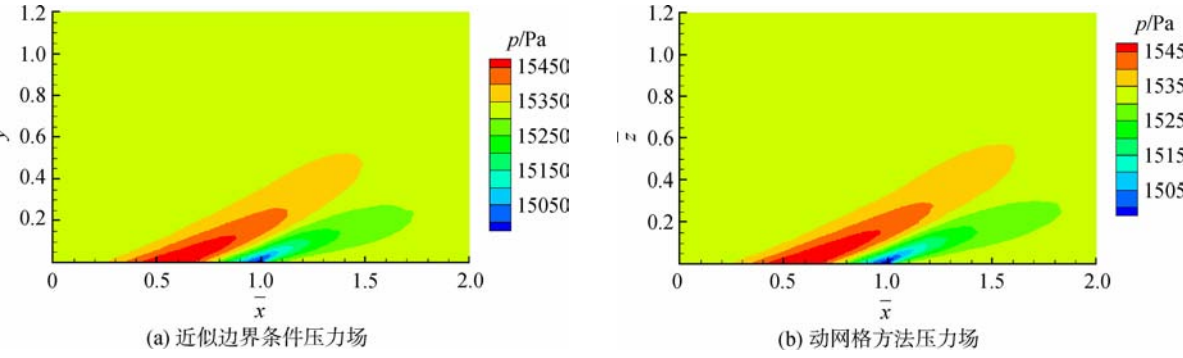


图 11 $x/a=0.75$ 处位移取最大值时两种方法所得压力场对比($\lambda=425.33$)

Fig. 11 Comparison of pressure field by two methods with maximum displacement at $x/a=0.75$ ($\lambda=425.33$)

5 结 论

本文重点在于将近似边界条件成功地引入到 CBS 有限元求解壁板颤振的动边界问题中,将动壁面对速度和压力所产生的影响以边界条件的形式加载到 Euler 方程的求解过程当中,避免了采用传统动网格方法求解壁板颤振问题所必需的复

杂过程. 通过对近似边界条件、动网格方法以及 3 阶活塞理论进行对比研究发现:

- 1) 近似边界条件方法模拟壁板颤振的数值结果与动网格方法非常地吻合,并且操作非常简便,不用处理动网格.
- 2) 3 阶活塞理论不能模拟出壁板前后两端不光滑尖点所引起的压力突跳,而 Euler 方程却

可以准确地捕捉到这一现象。

3) 采用近似边界条件的 CBS 有限元方法在求解无黏可压缩流动中细长体小变形的流-固耦合问题上具有潜力和优势。

参考文献：

[1] Dowell E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate[J]. AIAA Journal,1966,4(7):1267-1275.

[2] Dowell E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate; II [J]. AIAA Journal,1967,5(10):1856-1862.

[3] Dowell E H. Panel flutter;a review of the aeroelastic stability of plates and shells[J]. AIAA Journal,1970,8(3):385-399.

[4] Culler A J,Crowell A R,McNamara J J. Studies on fluid-structural coupling for aerothermoelasticity in hypersonic flow[C] // 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Palm Springs,California;AIAA,2009.

[5] Culler A J,McNamara J J. Studies on fluid-thermal-structural coupling for aerothermoelasticity in hypersonic flow [J]. AIAA Journal,2010,48(8):1721-1738.

[6] Culler A J,McNamara J J. Impact of fluid-thermal-structural coupling on response prediction of hypersonic skin panels[J]. AIAA Journal,2011,49(11):2393-2406.

[7] Nydick I,Friedmann P P,Zhong X. Hypersonic panel flutter studies on curved panels[C] // 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. New Orleans; AIAA,1995:2995-3011.

[8] Friedmann P P,McNamara J J,Thuruthimattam B J,et al. Aeroelastic analysis of hypersonic vehicles[J]. Journal of Fluids and Structures,2004,19(5):681-712.

[9] Piperno S,Farhat C,Larroutourou B. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems; Part I model problem,theory and two-dimensional application[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1995,124:79-112.

[10] Farhat C,Lesoinne M,Stern P. High performance solution of three-dimensional nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms; methodology and preliminary

nary results[J]. Advances in Engineering Software,1997,28(1):43-61.

[11] Zienkiewicz O C,Codina R. A general algorithm for compressible and incompressible flow;Part I the split, characteristic-based scheme[J]. International Journal for Numerical Method in Fluids,1995,20(8/9):869-885.

[12] Zienkiewicz O C,Morgan K,Sai B V K S,et al. A general algorithm for compressible and incompressible flow;Part II tests on the explicit form[J]. International Journal for Numerical Method in Fluids,1995,20(8/9):887-913.

[13] Codina R,Vázquez M,Zienkiewicz O C. A general algorithm for compressible and incompressible flow;Part III the semi-implicit form[J]. International Journal for Numerical Method in Fluids,1998,27(1/2/3/4):13-32.

[14] Zienkiewicz O C,Taylor R L,Nithiarasu P. The finite element method for fluid dynamics[M]. 6th ed. Burlington; Elsevier Butterworth-Heinemann,2005.

[15] Sun X,Zhang J Z,Mei G H. An improved characteristic-based split (CBS) scheme for compressible and incompressible moving boundary flows[J]. International Journal of Aerospace and Lightweight Structures,2012,2(2):281-297.

[16] Sun X,Zhang J Z,Ren X L. Characteristic-based split (CBS) finite element method for incompressible viscous flow with moving boundaries[J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics,2012,6(3):461-474.

[17] Gao C,Luo S,Liu F,et al. Calculation of unsteady transonic flow by an Euler method with small perturbation boundary conditions[C] // Reno,Nevada:41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit,2003.

[18] Gao C,Yang S,Luo S,et al. Calculation of airfoil flutter by an Euler method with approximate boundary conditions [J]. AIAA Journal,2005,43(2):295-305.

[19] Davis G A. Transonic aeroelasticity solutions using finite elements in an arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation [D]. Los Angeles,California;University of California,1994.

[20] Bein T,Friedmann P,Zhong X,et al. Hypersonic flutter of a curved shallow panel with aerodynamic heating[R]. Los Angeles, California; 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference,1993.

(编辑:陈 越)