

奇异积分方程方法在接触压力分析中的应用

刘 闯¹, 崔海涛²

(1. 中国航空工业集团公司 沈阳发动机设计研究所, 沈阳 110015;

2. 南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 总结回顾了奇异积分方程的数值解法, 对于第二类奇异积分方程使用分段连续函数法进行了求解; 对于两个弹性体接触问题, 通过接触体之间的滑移函数和间隙函数, 建立求解接触压力的奇异积分方程. 分别针对圆柱体与弹性半空间体、抛物线型压头与弹性半空间体、榫头与榫槽 3 类接触问题, 确立奇异积分方程的具体表达式, 而后使用分段连续函数方法进行求解, 获得接触面上的接触压力. 最后将计算所得的接触压力分别与理论解和有限元解进行了对比. 对于圆柱体与弹性半空间体接触问题, 奇异积分方程法的最大接触压力与理论解和有限元解的相对误差分别为 0.3% 和 0.5%; 对于榫头与榫槽接触问题, 奇异积分方程方法计算所得的最大接触压力与有限元解的相对误差为 1.8%, 验证了奇异积分方程方法的有效性.

关 键 词: 奇异积分方程; 分段连续函数法; 滑移函数; 间隙函数; 接触压力

中图分类号: V219; O346.1

文献标志码: A

Contact pressure analysis by using singular integral equation method

LIU Chuang¹, CUI Hai-tao²

(1. Shenyang Engine Design and Research Institute,

Aviation Industry Corporation of China, Shenyang 110015, China;

2. College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The numerical solution of singular integral equation (SIE) was summarized, the 2nd type of SIE was solved by piece-wise continuous linear function procedure; for two elastic bodies contact, the SIE was deduced by correlating the slip function and gap function between the two bodies. The contact bodies include the cylinder contact with half space body, parabola shape indenter contact with half space body and tenon contact with mortise cases. These equations were solved by using the piece-wise continuous function method, then contact pressure on the contact surface was acquired. The results of SIE analysis were compared with those obtained from contact theory and finite element method (FEM) analysis. For cylinder contact with half space body, the maximum contact pressure of SIE method is compared with contact theory and FEM, the relative tolerance is 0.3% and 0.5% respectively; for tenon contact with mortise, the relative tolerance of maximum contact pressure between SIE method and FEM is 1.8%, proving the effectiveness and applicability of SIE method.

Key words: singular integral equation; piece-wise continuous function method; slip function; gap function; contact pressure

奇异积分方程理论是 20 世纪 40 年代发展起来的一种数学理论. 在断裂力学, 电磁学, 接触分

析等方面有着广泛的应用^[1-3]. 对于奇异积分方程的数值解法, 国内外很多学者都进行了较为深入

的研究^[4-5],提出了如高斯-切比雪夫多项式展开方法,雅可比多项式展开方法等一系列数值解法^[6-11].本文采用了 Gerasoulis 提出的分段连续函数方法^[12]对柯西核型奇异积分方程进行求解,与以前的多项式展开法和求积公式法有所不同,本方法中将求解区间离散为若干个子区间,设立积分点和配置点,将积分方程转化为代数方程,直接获得积分方程的数值解.分段连续函数法积分点与配置点的设置相对于多项式法和求积公式法更为灵活,可以根据函数梯度的变化进行局部细化,具有更高的计算效率.在很多工程上的接触问题中,准确的计接触面上接触压力是很重要的.目前在计算接触压力时主要采用有限元法^[13-14],但该方法存在计算速度较慢的缺点.利用弹性理论把接触面间的间隙函数与接触压力联系起来建立奇异积分方程,通过求解此奇异积分方程来获得接触压力的方法是一种非常有效的办法^[15-16].在本文中,通过分析圆柱体与弹性半空间体、抛物线型压头与弹性半空间体、樨头与樨槽 3 种类型的接触,建立接触面间的间隙函数与接触压力之间的关系,推导相应的奇异积分方程并对其进行求解.计算结果表明奇异积分方程方法在求解接触压力方面具有重要的工程价值.

1 方程的求解流程及算例分析

1.1 数值解法

柯西核型奇异积分方程的一般形式为

$$a\phi(x) + \frac{b}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \frac{\phi(t)}{t-x} dt + \int_{c_1}^{c_2} k(t,x)\phi(t)dt = f(x) \quad (1)$$

$$x \in [c_1, c_2]$$

式中 a 和 b 为常数, $\frac{1}{t-x}$ 为柯西核, $\phi(x)$ 为式

(1)的解.若 $\int_{c_1}^{c_2} k(t,x)\phi(t)dt = 0$, 则式(1)转化为如下形式:

$$a\phi(x) + \frac{b}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \frac{\phi(t)}{t-x} dt = f(x) \quad (2)$$

式(2)被称为式(1)的特征方程.在特征方程中,如果 $a=0$ 为第 1 类柯西核型奇异积分方程,如果 $a \neq 0$ 为第 2 类柯西核型奇异积分方程.

本文采用分段线性插值连续函数法对奇异积分方程进行求解,通过离散化的方法,将奇异积分方程转化为代数方程组进行求解,求解程序的流程图如图 1 所示.

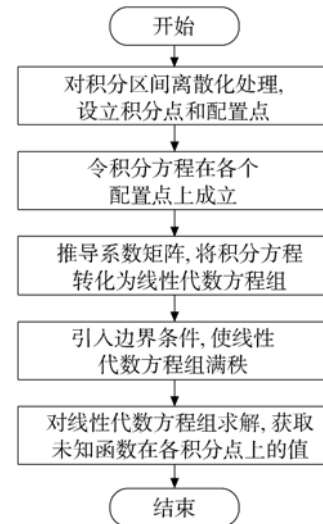


图 1 奇异积分方程求解的流程图

Fig. 1 Flow chart for solving SIE

1.2 算例分析

对于式(2)所示柯西核型奇异积分方程,当 $\phi(x) = p(x)$, $a = 1$, $b = \tan(\pi A)$, $f(x) = x \tan(\pi A)$ 时,则式(2)变为

$$p(x) + \frac{\tan(\pi A)}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \frac{p(t)}{t-x} dt = x \tan(\pi A) \quad (3)$$

在对此方程求解时,先假设基础解 $p(x) = p_0(x) + \phi_1 \left[\frac{x-c_1}{c_2-x} \right]^A$, 其中 $p_0(x)$ 为在离散子区间上分段线性变化的连续函数,在积分边界处函数值为 0, $\phi_1 \left[\frac{x-c_1}{c_2-x} \right]^A$ 体现了函数的奇异特征, ϕ_1 为常数,然后将此基础解代入式(3)中.把积分区间 $[c_1, c_2]$ 分成 n 等份,积分点依次为 $t_0, t_1, \dots, t_n$, 共 $n+1$ 个积分点,在每个子区间中设置配置点 $x_i (i=0, 1, \dots, n-1)$, 共有 n 个配置点.积分点和配置点的相对位置如图 2 所示.

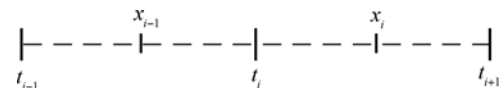


图 2 积分点与配置点相对位置

Fig. 2 Relative position of integral point and deploy point

在图 2 中, t_{i-1}, t_i, t_{i+1} 为积分点, x_{i-1} 和 x_i 为配置点,积分点和配置点之间的关系满足以下公式:

$$h = \frac{c_2 - c_1}{n}$$

$$t_i = c_1 + ih \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$$x_i = (t_i + t_{i+1})/2 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

将各配置点 $x_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 代入柯西核型奇异积分方程, 如在子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上方程为

$$p_0(x_i) + \phi_1 \left[\frac{x_i - c_1}{c_2 - x_i} \right]^A + \frac{\tan(\pi A)}{\pi} \cdot \int_{c_1}^{c_2} \frac{p_0(t) + \phi_1 \left[\frac{t - c_1}{c_2 - t} \right]^A}{t - x_i} dt = x_i \tan(\pi A) \quad (5)$$

代入如下关系:

$$p_0(x_i) = [p_0(t_i) + p_0(t_{i+1})]/2 \quad (6)$$

$$x_i = (t_i + t_{i+1})/2 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (7)$$

共可获得 n 个方程构成的方程组, 其中未知数为 $p_0(t_i) (i=0, 1, \dots, n)$ 和常数 ϕ_1 , 共有 $n+2$ 个未知数, 增加两个边界条件

$$p_0(t_0) = p_0(t_n) = 0 \quad (8)$$

这样可以获得 $n+2$ 个方程. 提取这个方程组系数矩阵, 可得形如 $A'X=B$ 的线性方程组, 采用高斯消去法对此方程组进行求解, 就可以获得 $p_0(x)$ 在各个积分点上的函数值以及 ϕ_1 的值. 同时, 此方程具有理论解

$$p(x) = -\sin(\pi A)(x - c_1)^A(c_2 - x)^{1-A} - \sin(\pi A)(A + Ac_2 - c_2) \left[\frac{x - c_1}{c_2 - x} \right]^A \quad (9)$$

可见 ϕ_1 的理论解为

$$\phi_{1t} = -\sin(\pi A)(A + Ac_2 - c_2) \quad (10)$$

若 $A=0.4, c_1=0, c_2=1$, 由式(10)可知 $\phi_{1t}=0.190211$. 使用数值方法计算出的 ϕ_1 与子区间数 n 有关, 具体关系详见表 1.

表 1 子区间数与数值解之间的关系

Table 1 Relationship between numerical value and subinterval number

n	ϕ_1	数值解与理论解的相对误差/%
16	0.185807	2.31
32	0.188064	1.13
64	0.189114	0.56
128	0.189412	0.42
256	0.189672	0.28
512	0.190061	0.08
1024	0.190126	0.04
2048	0.190157	0.03

由表 1 可见: ϕ_1 的理论解一直大于数值解; 当子区间数为 16 时, 相对误差为 2.31%; 当子区间数为 2048 时, 相对误差为 0.02%, 说明随着子

区间数的增加, 数值解与理论解的相对误差会不断减小, 即子区间数的增加有助于提高方程的求解精度.

2 方程在接触压力分析中的应用

2.1 接触问题奇异积分方程的建立

为了对两个弹性体间的接触压力进行求解, 需要把接触压力与两个弹性体之间的滑动函数及间隙函数联系起来, 建立相应的奇异积分方程并对其进行求解, 获得接触面间的接触压力.

弹性体①和弹性体②接触, 其示意图见图 3. 两物体的接触区域为 (a_1, a_2) 之间的部分, P 为法向载荷, Q 为切向载荷, M 为弯矩.

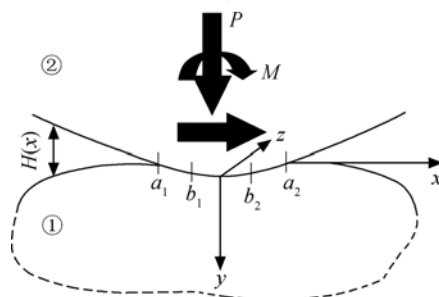


图 3 两构件接触示意图

Fig. 3 Contacting schematic diagram of two components

两弹性体间的滑移函数为

$$s(x) = u_{x,2} - u_{x,1} \quad (11)$$

间隙函数表示为

$$H(x) + C_1 x = u_{y,2} - u_{y,1} + H_0 \quad (12)$$

其中 $u_{x,2}$ 为弹性体②在 x 方向的位移, $u_{x,1}$ 为弹性体①在 x 方向的位移, $u_{y,2}$ 为弹性体②在 y 方向的位移, $u_{y,1}$ 为弹性体①在 y 方向的位移, $H(x)$ 表达了两个弹性体之间的间隙, H_0 为刚体位移, C_1 为刚体转动角度. 对于各项异性半空间体承受 y 方向的线载荷, 其位移可以用 Stroh 公式表示^[17]

$$u = \frac{1}{\pi} \text{Im}[\mathbf{V} \mathbf{q} \ln(x)] \quad (13)$$

其中 $\mathbf{V}$ 为 3×3 矩阵, $\mathbf{q}$ 为 3×1 向量. 其中, $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{q}$ 都是由弹性常数和施加的载荷所得. 对于各项异性材料, 其刚度矩阵为 $\mathbf{C}_{ijk}$, 并由此可以获得 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ 矩阵, 分别为

$$\mathbf{Q}_{ik} = \mathbf{C}_{i1k1}, \mathbf{R}_{ik} = \mathbf{C}_{i1k2}, \mathbf{T}_{ik} = \mathbf{C}_{i2k2} \quad (14)$$

因此可由材料的弹性矩阵获得 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ 矩阵.

而矩阵 $\mathbf{V}$ 则可由 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$ 矩阵组成的方程求解. 对应的特征方程为

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T}] \mathbf{v} = 0 \quad (15)$$

式中 p 为此特征方程的特征值, 而向量 $\mathbf{v}$ 为正虚部的特征值所对应的的特征向量. 式(13)中矩阵 $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$, 即由正虚部的特征值所对应的特征向量构成. 而向量 $\mathbf{q} = \mathbf{w}^{-1} \mathbf{f}$, 其中矩阵 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3]$, 其中:

$$\mathbf{w}_i = (\mathbf{R}^T + p_i \mathbf{T}) \mathbf{v}_i \quad (16)$$

于是可以建立关于位移的函数

$$u = \begin{cases} \operatorname{Re}[\mathbf{VW}^{-1}] \mathbf{f} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}[\mathbf{VW}^{-1}] \mathbf{f} \ln |x| & x < 0 \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}[\mathbf{VW}^{-1}] \mathbf{f} \ln |x| & x > 0 \end{cases} \quad (17)$$

对位移进行求导, 有

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\alpha_{11})_m & (\alpha_{12})_m \\ (\alpha_{21})_m & (\alpha_{22})_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(x) \\ p(x) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (\beta_{11})_m & (\beta_{12})_m \\ (\beta_{21})_m & (\beta_{22})_m \end{bmatrix} \int_{a_1}^{a_2} \begin{Bmatrix} q(r) \\ p(r) \end{Bmatrix} \frac{dr}{r-x} \quad (18)$$

其中 $(\alpha_{ij})_m = \operatorname{Re}[\mathbf{VW}^{-1}]$, $(\beta_{ij})_m = \operatorname{Im}[\mathbf{VW}^{-1}]$, 下标 $m=1, 2$ 分别代表弹性体①和弹性体②.

如图 3 所示的两个弹性体接触, 作用于两个弹性体上的法向力和切向力大小相等, 方向相反, 使用式(11), 式(12), 式(18)可以把两个弹性体间的间隙函数、滑动函数与接触压力关联起来, 其关系可以通过奇异积分方程表示

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \alpha_{11} q(x) + \frac{\beta_{11}}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{q(r)}{r-x} dr + \alpha_{12} p(x) + \frac{\beta_{12}}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{p(r)}{r-x} dr \quad (19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + C_1 = \alpha_{21} q(x) + \frac{\beta_{21}}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{q(r)}{r-x} dr + \alpha_{22} p(x) + \frac{\beta_{22}}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{p(r)}{r-x} dr \quad (20)$$

式中系数 α_{ij}, β_{ij} 可由弹性体的材料参数获取, 为零的分量

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \beta_{12} = \beta_{21} = 0 \quad (21)$$

对于两个弹性体均为各向同性材料且材料相同的情况, 由于两个弹性体的弹性模量与泊松比相同, 这时存在

$$\begin{aligned} -\alpha_{21} &= \alpha_{12} = \frac{(1-2\nu_2)(1+\nu_2)}{E_2} - \frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} = 0 \\ -\beta_{21} &= -\beta_{12} = \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} + \frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \end{aligned} \quad (22)$$

其中 E, ν 分别为材料的弹性模量和泊松比. 在方程中弹性模量为常数, 因此仅适用于弹性应力状态求解.

2.2 接触压力分析实例

2.2.1 赫芝接触问题

选取圆柱体与弹性半空间体接触, 且两者材料相同. 已知载荷为 $P=100 \text{ kN/m}$, 材料的弹性模量 $E=2 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.5$, 圆柱体半径 $R=1 \text{ m}$. 接触压力峰值 p_0 与接触半宽度 b 可由理论解公式计算^[18-19].

由理论公式可以计算出接触半宽度理论值 $b_t=10.75 \text{ mm}$, 接触压力峰值理论值为 $p_{0t}=5.91 \text{ MPa}$. 使用奇异积分方程求解时, 选取接触点为原点, 则圆柱体型面的函数为 $x^2 + (y-R)^2 = R^2$, 而弹性半空间体型面函数为 $y=0$, 由此可获得间隙函数为 $H(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$. 由于载荷及接触体的对称性, 可知 $C_1=0$, 此时可得简化后的奇异积分方程为

$$\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{a_1}^{a_2} \frac{p(r)}{r-x} dr \quad (23)$$

由载荷及模型对称可知发生弹性变形后的接触区间对称, 即 $-a_1 = a_2 = b$.

对此方程采用分段连续函数法求解, 可知 $b=10.9 \text{ mm}$, 与理论解的相对误差为 1.4% . $p_0=5.93 \text{ MPa}$, 与理论解的相对误差为 0.3% . 将接触区划分为 32 个子区间, 接触压力在各区间节点分布的数值解和理论解见图 4.

对此接触问题, 同时采用 ABAQUS 有限元软件进行了计算, 分析得出 $p_0=5.96 \text{ MPa}$, $b=8.9 \text{ mm}$, 通过将理论解、数值解及有限元解对照, 可知奇异积分方程方法是一种比较有效的求解接触压力的方法.

对于同样的材料及同样的载荷, 改变压头的形状为抛物线型压头, 压头型面函数为 $y=x^2$, 同样可以计算出接触压力和接触半宽度, 接触压力峰值为 8.42 MPa , 接触半宽度为 7.75 mm , 可以

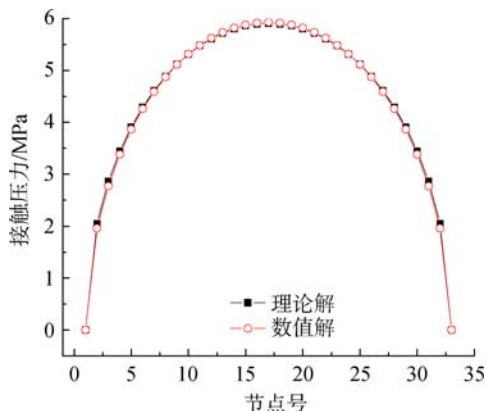


图4 理论解与数值解接触压力比较

Fig. 4 Contact pressure comparison between theoretical value and numerical value

看出,与赫芝接触相比,抛物线形压头接触半宽度变窄,同时接触压力水平升高.将接触区划分为32个子区间,在各区间节点上两种压头的接触压力比较如图5所示.

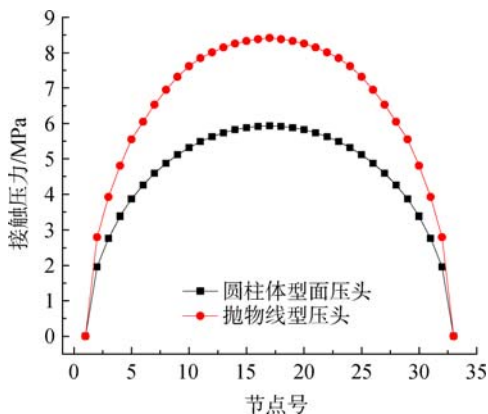


图5 不同形状压头接触压力比较

Fig. 5 Contact pressure comparison with different indentors

2.2.2 榫连接接触问题

选取的榫连接结构为燕尾榫,底角为 45° .材料为TA12,弹性模量 $E=120\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,榫连接结构厚度为7 mm.

在榫头施加载荷为10 kN,榫槽作用在榫头上的摩擦力和正压力与榫头上施加的载荷平衡.通过力平衡方程可知作用于接触面上的法向正压力为5.349 kN,切向摩擦力为2.675 kN.将法向正压力转化为沿厚度方向的线载荷即为 $0.777 \times 10^6\text{ N/m}$.

燕尾榫结构在受径向载荷作用时,榫头产生向外滑动,榫槽发生转动,张开一定的角度.此时榫头和榫槽的接触面为紧密配合,间隙为零.由于

榫头沿接触面向外发生整体滑动,因此存在 $q(x)=\mu p(x)$,其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 分别为接触面上法向和切向分布载荷.又由于接触面间的紧密配合,所以有 $\frac{\partial H}{\partial x}=0$.此时的奇异积分方程简化为

$$C_1 = -\frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{c_1}^{c_2} \frac{p(r)}{r-x} dr \quad (24)$$

使用分段连续函数方法对式(24)进行求解.同时采用有限元方法求解了此问题,采用8节点Plane82单元,在接触面上均匀划分50个单元,燕尾榫结构的有限元模型如图6所示.有限元法与奇异积分方程法的接触压力求解结果如图7所示.

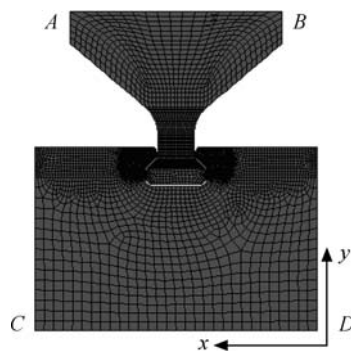


图6 燕尾榫结构有限元模型

Fig. 6 Finite element model of dovetail joint structure

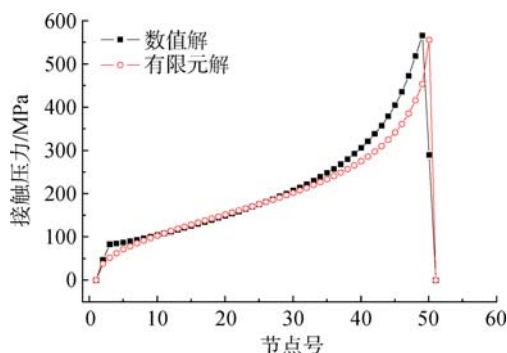


图7 榫头与榫槽接触压力分布

Fig. 7 Contact press distribution of tenon and mortise contact

从图7中可以看出,接触压力在接触区逐渐增大,到榫头底部增大到最大值,而后迅速减少到零.由奇异积分方程方法获得的接触压力峰值为565 MPa,有限元法获得的接触压力峰值为555 MPa,两种方法所获得的接触压力峰值的相对误差为1.8%.在整个接触区上,由两种方法所得的接触压力吻合较好.

对此榫连接结构接触问题,在相同求解精度的条件下(节点数目相同),有限元方法耗时为 5 min,奇异积分方程方法耗时为 30 s,计算速度提升了 10 倍。

3 结 论

1) 使分段连续函数法能有效求解奇异积分方程;数值解精度与子区间数有关,子区间数越大,数值解精度越高;

2) 在相同求解精度的条件下,奇异积分方程方法在求解速度上明显优于有限元方法;

3) 使用奇异积分方程方法对不同接触类型的接触压力进行了分析,并与接触压力的理论解或有限元解进行了对比,证明了奇异积分方程方法在接触压力分析中的有效性。

参考文献:

- [1] 侯宗义,李明忠,张万国. 奇异积分方程论及其应用[M]. 上海:上海科学技术出版社,1990.
- [2] 高闯,汤任基. 两项材料倾斜裂纹的界面应力场[J]. 上海交通大学学报,2001,35(5):1491-1496.
GAO Chuang, TANG Renji. The interface stress fields of biomaterial incline crack[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2001, 35(5): 1491-1496. (in Chinese)
- [3] 乐金朝,汤任基,王复明,等. 双材料中平片裂纹问题的超奇异积分方程解法[J]. 应用力学学报,1999,16(4):1-6.
YUE Jinchao, TANG Renji, WANG Fuming, et al. Method of hypersingular integral equations for planer crack subject to tension in biomaterial[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1999, 16(4): 1-6. (in Chinese)
- [4] Muskhelishvili N I. Singular integral equations[M]. Groningen, Holland: Noordhoff Press, 1953.
- [5] 沈以淡. 积分方程[M]. 北京:北京理工大学出版社,2002.
- [6] Erdogan F, Gupta G D. On the numerical solution of singular integral equations[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1972, 30(3): 525-534.
- [7] Krenk S. On the use of interpolation polynomial for solutions of singular integral equations[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1975, 32(2): 479-484.
- [8] Theocaris P S, Ioakimidis N I. Numerical integration methods for the solution of singular equations[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1975, 35(1): 173-183.
- [9] Ioakimidis N I. On convergence of two direct methods for solution of Cauchy-type singular integral equations of the first kind[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1980, 20(1): 83-87.
- [10] Russell D K, Farris T N, Sun C T. The numerical solution of Cauchy singular integral equations with application to fracture[J]. International Journal of Fracture, 1994, 66(2): 139-154.
- [11] 黄社华,李炜,魏庆鼎. 一类非线性奇异积分方程及其数值方法研究[J]. 计算力学学报,2002,19(2):166-172.
HUANG Shehua, LI Wei, WEI Qingding. A numerical method of nonlinear integral equation with singularity[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(2): 166-172. (in Chinese)
- [12] Gerasoulis A, Srivastav R P. A method for the numerical solution of singular integral equations with a principle value integral[J]. International Journal of Engineering, 1981, 19(9): 1293-1298.
- [13] 刘军,刘道新,刘元镭,等. 微动接触压力的有限元分析[J]. 机械强度,2005,27(4):504-509.
LIU Jun, LIU Daoxin, LIU Yuanyong, et al. Finite element analysis for fretting contacting stress[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(4): 504-509. (in Chinese)
- [14] 吴艳华,郝艳华. 燕尾榫连接结构 ANSYS 工作平台开发[J]. 航空发动机,2010,36(4):29-31.
WU Yanhua, HAO Yanhua. Development of ANSYS platform for the dovetail joint structure[J]. Aeroengine, 2010, 36(4): 29-31. (in Chinese)
- [15] Rajeev P T, Farris T N. Numerical analysis of fretting contacts of dissimilar isotropic and anisotropic materials[J]. Journal of Strain Analysis, 2002, 37(6): 503-517.
- [16] Rajeev P T, Farris T N. Two dimensional contact of dissimilar/anisotropic materials[R]. AIAA-2001-1252, 2001.
- [17] Ting T C. Anisotropic elasticity[M]. New York: Oxford University Press, 1996.
- [18] 何明鉴. 机械构件的微动疲劳[M]. 北京:国防工业出版社,1993.
- [19] Johnson K L. Contact mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

(编辑:王碧琚)