

凹型粗糙元对边界层稳定性的影响

刘开平, 罗纪生
(天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

摘 要: 为了能够利用 e^N 方法对带有凹型粗糙元的平板边界层进行转捩预测. 通过数值模拟和流动稳定性的方法研究了马赫数为 4.5 的超声速边界层中凹型粗糙元对扰动演化的影响. 对两种尺度的凹型粗糙元下扰动沿流向的幅值和增长率分布进行了计算. 结果表明:凹型粗糙元对基本流的影响只是局限在凹型粗糙元及其附近很小的范围内. 凹型粗糙元对扰动幅值的演化有抑制作用, 尺度越大抑制作用越明显. 在凹型粗糙元的后面, 凹型粗糙元对扰动幅值的增长率的影响很小, 相对变化量在 2% 以内. 验证了对壁面有凹型粗糙元的情况, 可以通过流动稳定性分析加 N 值修正的方法进行转捩预测.

关 键 词: 转捩预测; 边界层; 局部扰动; 凹型粗糙元; 流动稳定性; e^N 方法

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A

Effect of concave groove on the stability of boundary layer

LIU Kai-ping, LUO Ji-sheng
(Department of Mechanics, School of Mechanical Engineering,
Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In order to predict the transition position using e^N method for flat boundary layer with concave groove, the effects of concave groove on the evolution of disturbance in supersonic boundary layer with Mach number of 4.5 were studied by numerical simulation and flow stability method. The amplitude and growth rate distribution along the flow direction with two sizes of concave groove was revealed. The results show that the range of effect of concave groove on the basic flow is only limited in the concave groove and near range. Concave groove has a suppressed effect on the evolution of disturbance to some extent, the bigger size means the more obvious inhibitory effect. After concave groove, the effect of concave groove on the growth rate of disturbance amplitude is little, and relative variation is smaller than 2%. At the same time, the position of transition can be predicted more accurately with a smaller concave groove by e^N method combined with stability analysis and a correction factor of N .

Key words: transition prediction; boundary layer; local disturbance; concave groove; flow stability; e^N method

边界层转捩位置的准确预测对于飞行器的设计有着非常重要的意义^[1],而边界层转捩是由边界层的流动不稳定性引起的. 边界层的不稳定性受很多因素的影响,壁面局部突变条件对稳定性的影响直接影响转捩预测,是实际问题中广泛关注的

的重要影响之一. 壁面局部突变的形式是多种多样的,总的可以分为两大类:一类是为了流动控制,人为在边界层中加入较大的壁面粗糙元,如主动减阻装置、大涡发生器等;另一类是由于设计等原因,在边界层上存在不可避免的较小的壁面粗

糙元,如壁面不可避免存在的小折角,局部凸起、局部曲率突变、飞行器蒙皮接缝,或由于壁面烧蚀产生的凹凸不平的壁面等,这类问题的研究主要目的是为了了解该类壁面粗糙元对流动稳定性的影响,以便更准确地进行转捩预测,为工程设计中转捩预测提供理论依据.因此,对于壁面粗糙元对边界层影响的研究具有重要的实际意义.

对于粗糙元的研究可以追溯到 20 世纪 40 年代, Liepmann 等^[2]对半圆柱形粗糙元对转捩的影响进行了研究,结果发现,粗糙元会使流动出现分离,当粗糙元高度 $k > 0.92$ 倍当地边界层位移厚度 δ 时,粗糙元下游会立即发生转捩,而当 $k = 0.76\delta$ 时,流动将保持层流. Smith 和 Clutter^[3]提出了用只与粗糙元形状相关的粗糙元雷诺数来描述流动的转捩,在低速情况下,粗糙元雷诺数能较好地与实验吻合. Gao 等^[4]进行了利用二维峰型粗糙元触发转捩的数值研究,计算发现,粗糙元高度、宽度都会明显地影响触发转捩的效率,当粗糙元高度大于临界层高度,粗糙元宽度为不稳定扰动波长的一半时,最容易促使流动不稳定.一般认为粗糙元对转捩具有促进的作用,但也有研究者发现粗糙元也可能抑制转捩,如 Holloway 和 Sterrett^[5]发现,当马赫数为 6,单位雷诺数为 $2.69 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 时,在距前缘 71 mm 处安装高度为 0.56 mm 半球型粗糙元将推迟转捩的发生. 陆昌根等^[6]利用抽吸结构来模拟壁面粗糙的特征,进行了局部扰动对平板边界层流动稳定性影响的研究,也发现了粗糙元对转捩有抑制作用. 李慧^[7]对马赫数为 4.5,飞行高度为 30 km,有鼓包的平板边界层中扰动的演化进行了研究,发现粗糙元对一些频率的扰动起促进增长的作用,而对另一些频率的扰动起抑制的作用. 以往的研究大多是针对较大凸型粗糙元,主要是为了工程方面主动控制的需要. 在国内,由于大飞机及超燃发动机研制的需求,已经积极开展利用了粗糙元主动减阻^[8-9]、利用粗糙元对高超声速进气道强制转捩^[10-11]等问题的研究.

实际工程应用中人们通常采用 e^N 方法进行转捩预测, e^N 方法是 20 世纪 50 年代, Smith, Gamberoni^[12] 和 van Ingen^[13] 基于流动稳定性理论提出来的. 该方法成功地应用于低速飞行器的设计中^[14]. 近年来人们在尝试着将 e^N 方法推广应用到高速飞行器的设计中,对此做了大量的研究工作并取得一定成果^[15]. 在高声速下,为了能利用 e^N 方法对有飞行器蒙皮接缝的边界层进行

转捩位置预测,本文将飞行器蒙皮接缝处简化为凹型粗糙元,研究壁面局部存在的凹型粗糙元对边界层稳定性的影响. 吴宁宁和罗纪生^[16]在研究壁面小折角对边界层中扰动演化的影响时,指出利用 e^N 方法对有壁面局部突变的边界层进行转捩位置预测时,需要对 N 值进行修正,提出了利用 N 值修正的方法对该类边界层进行转捩预测. 本文将利用该方法对凹型粗糙元影响转捩位置预测的程度进行了评估,为工程设计中考虑类似飞行器蒙皮接缝对转捩预测的影响提供了理论指导.

1 物理模型及网格划分

本文研究的是平板边界层上的一个矩形凹型粗糙元(下文简称粗糙元),设其长度为 l ,高度为 h ,粗糙元的示意图如图 1 所示, x 为流向, y 为法向.

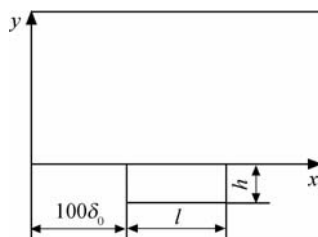


图 1 粗糙元的计算模型

Fig. 1 Computation model of concave groove

计算工况为飞行高度为 5 km,来流速度 U_∞ , 马赫数为 4.5. 根据国际标准大气,5 km 高空处的来流黏度 $\mu_\infty = 1.628 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$,来流密度 $\rho_\infty = 0.7364 \text{ kg/m}^3$,来流温度 $T_\infty = 255.7 \text{ K}$,考虑两个雷诺数 $Re = 30\,000, 50\,000$. 根据雷诺数的定义

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty \delta_0}{\mu_\infty} \quad (1)$$

式中 $Re = 30\,000, 50\,000$ 对应的边界层位移厚度 δ_0 分别为 $4.60 \times 10^{-4} \text{ m}$ 和 $7.66 \times 10^{-4} \text{ m}$.

针对上述雷诺数,计算了小、大两种尺度的粗糙元:小尺度粗糙元 $l \times h = 0.1\delta_0 \times 0.05\delta_0$,粗糙元内的计算网格点数为 101×76 . 大尺度粗糙元 $l \times h = 0.5\delta_0 \times 0.25\delta_0$,粗糙元内的计算网格点数为 171×151 .

本文采用的网格形式为法向上靠近壁面处渐密,流向上在靠近粗糙元左右边界处采用局部加密.图 2 给出尺度为 $0.5\delta_0 \times 0.25\delta_0$ 的大尺度粗糙元局部的网格分布情况.

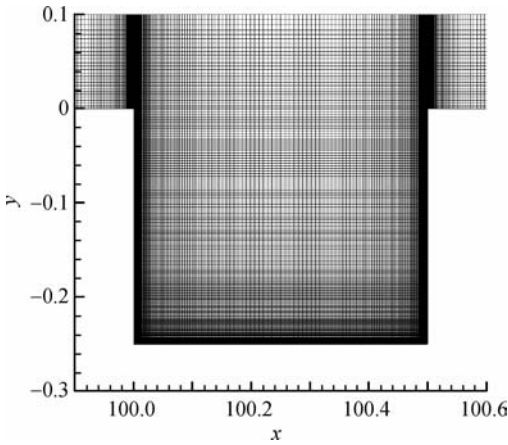


图 2 粗糙元网格分布($0.5\delta_0 \times 0.25\delta_0$)
Fig. 2 Grid distribution of concave groove
($0.5\delta_0 \times 0.25\delta_0$)

粗糙元的左边界取为 $x = 100\delta_0$ 的位置, 当 $Re = 30\,000$ 时距平板边界层前缘的距离约为 0.3 m , 当 $Re = 50\,000$ 时约为 0.76 m .

利用二维可压缩的通量形式 Navier-Stokes (N-S) 方程进行数值模拟获得本文的基本流, 不同频率扰动的演化利用扰动方程求解, 扰动方程及其计算方法见文献[17]. 在求解扰动方程前, 用来流速度 U_∞ 、来流密度 ρ_∞ 、来流温度 T_∞ 及入口处边界层位移厚度 δ_0 对方程进行无量纲化. 本文求解所得的数值均为无量纲. 入口处加入的扰动形式为

$$q'(x, y, t) = a_0 \hat{q}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \text{c. c.} \quad (2)$$

其中 α 为波在 x 方向的波数, ω 为频率, c. c. 表示共轭复数, $q' = \{\rho', u', v', T'\}$ 为扰动量, $\hat{q} = \{\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{T}\}$ 为扰动波的形状函数, 初始幅值 $a_0 = 0.00001$. 壁面边界条件是无滑移, 壁面温度 $T_w = 900.5\text{ K}$. 出口采用嵌边区边界条件^[18-19].

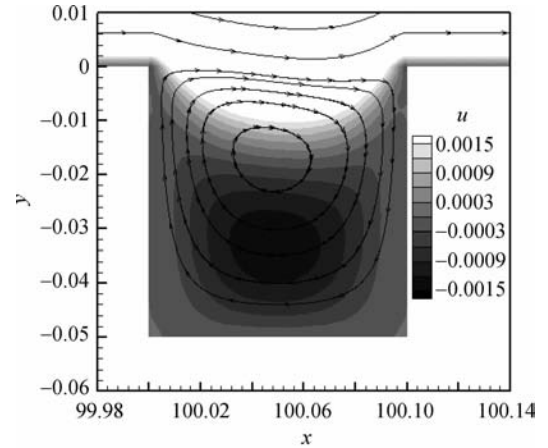
2 数值计算结果分析

2.1 粗糙元内的基本流

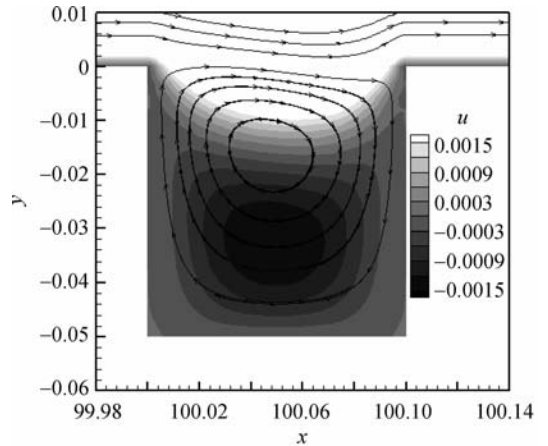
由 N-S 方程得到有粗糙元的基本流, 图 3 给出了粗糙元附近基本流流向速度(u)灰度图和流线图. 图中带箭头的曲线是流线, 灰度图的 u 描述的是基本流流向速度的分布情况.

图 3 中的流线表明粗糙元内出现回流现象. 观察流向速度的灰度图可以发现, 小粗糙元内回流的流向速度最大值约为 0.0015 , 大尺度粗糙元内回流的流向速度最大值约为 0.0035 , 粗糙元尺度越大其内部回流的速度也越大. 粗糙元外的上下游流线基本平行, 没有明显的变化. 由此可知粗

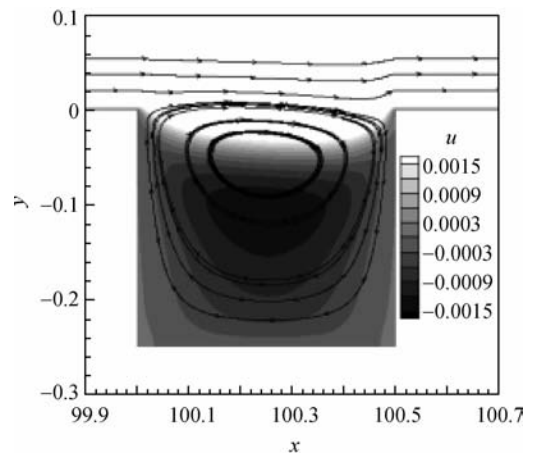
糙元只影响粗糙元外附近的很小范围内的基本流. 图 4 给出了大尺度粗糙元, $Re = 50\,000$ 附近的基本流流向速度沿法向分布及与平板情况的对比, 同时还给出了粗糙元内不同位置处的流向速度沿法向分布曲线. 图 4(b) 中图标为“ $0.1\delta_0$ ”的黑色实线表示沿流向距离粗糙元左侧边界 $0.1\delta_0$ 处的速度分布, 其他类推.



(a) 小尺度粗糙元, $Re = 30\,000$



(b) 小尺度粗糙元, $Re = 50\,000$



(c) 大尺度粗糙元, $Re = 30\,000$

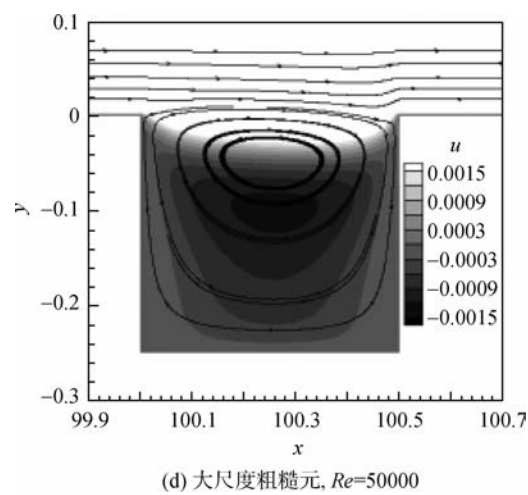


图 3 粗糙元内基本流的流向速度分布及流线图
Fig. 3 Distribution of velocity along the flow direction and streamlines of basic flow in the concave groove

由图 4 可以发现,速度只在粗糙元内发生变化,出现负的极小值点,这表明粗糙元内流动有回流,而在离开粗糙元 $0.02\delta_0$ 的距离以外,基本流与没有粗糙元的基本流就符合很好了.由此可见,粗

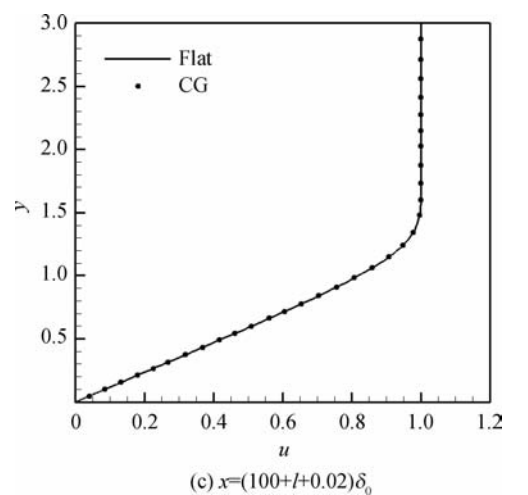
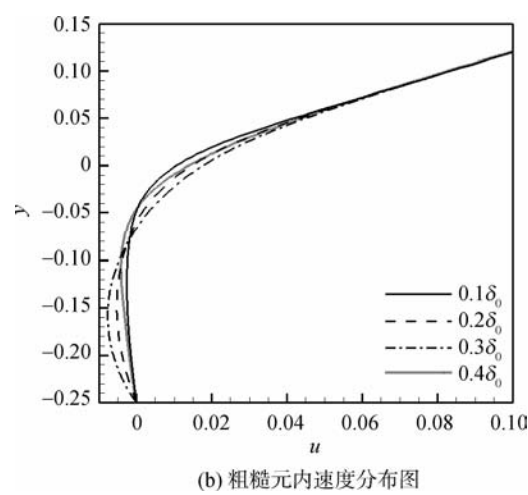
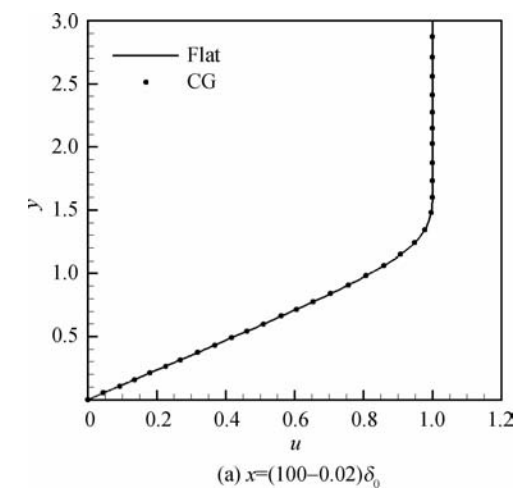


图 4 大尺度粗糙元, $Re=50000$ 时,流向速度演化曲线
Fig. 4 Evolution curves of flow velocity of the bigger concave groove at $Re=50000$

糙元对基本流的影响只局限在粗糙元内部,对粗糙元外部的基

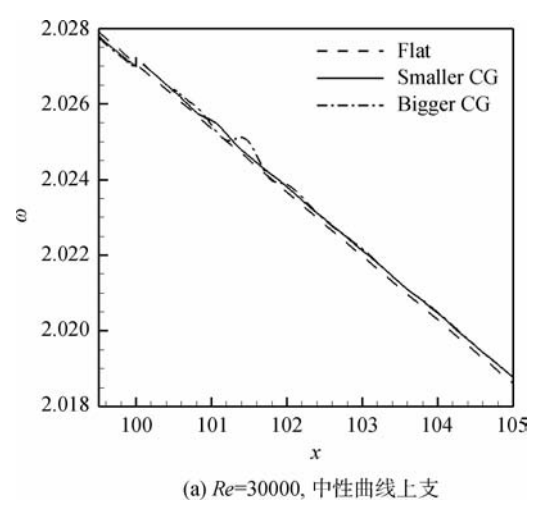
2.2 稳定性分析的结果及对比

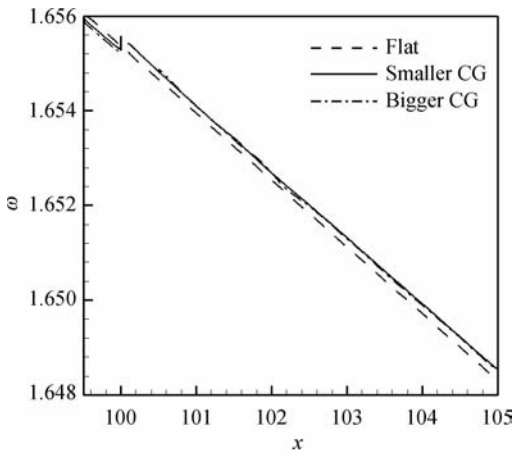
图 5 给出了 $Re=30000, 50000$, 大小两种尺度粗糙元(CG)的基本流得到的中性曲线及与平板中性曲线的比较.

由图 5 可知,所研究的粗糙元对中性曲线集中在粗糙元的附近,对整体的影响并不大.相比较而言,大尺度的粗糙元对中性曲线影响较大.同样尺度的粗糙元,对中性曲线的上支影响较大,对中性曲线的下支影响较小.

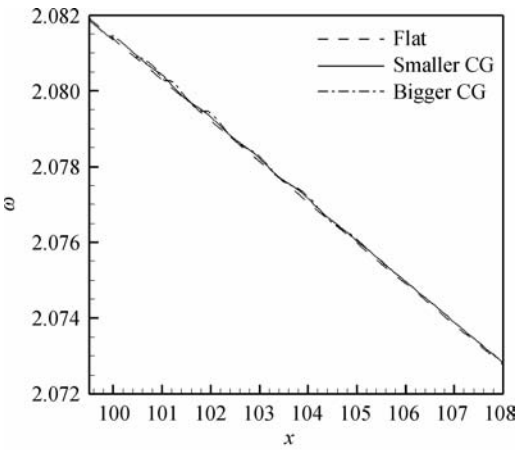
2.3 粗糙元对扰动幅值演化及增长率的影响

粗糙元会引起流场的局部突变,流动稳定性分析(LST)一般不适用,需要用数值模拟(DNS)研究粗糙元对扰动演化的影响.为了考察粗糙元对边界层内扰动演化的影响,在扰动增长的频率

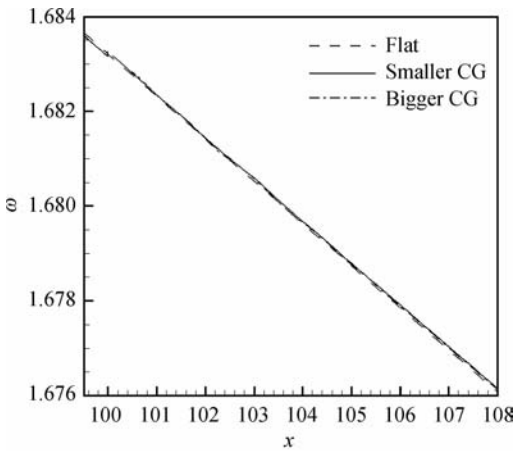




(b) $Re=30000$, 中性曲线下支



(c) $Re=50000$, 中性曲线上支



(d) $Re=50000$, 中性曲线下支

图 5 中性曲线对比

Fig. 5 Comparison of neutral curve

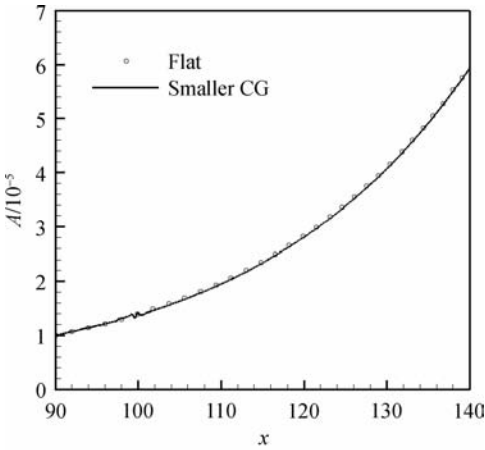
范围内选取了不同频率的扰动进行计算,比较扰动幅值演化. 根据不同的雷诺数,选择不同频率的扰动进行计算. 对 $Re=30000$,选取的扰动频率 $\omega=1.70, 1.80, 1.90$,其中 1.80 的扰动幅值的增长率最大,其他频率在整个计算域内都是增长的; $Re=50000$ 时,选取的频率 $\omega=1.75, 1.85, 1.95$,

选取原则与 $Re=30000$ 的相同. 下边给出计算结果及分析.

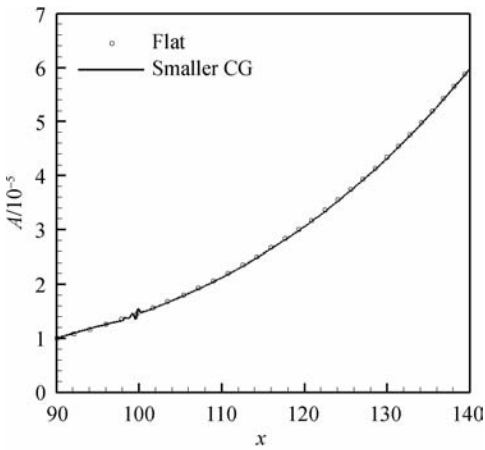
2.3.1 小尺度粗糙元的结果

图 6 给出了小尺度粗糙元两个雷诺数工况的扰动幅值(A)的演化情况,同时还给出了无粗糙元的结果.

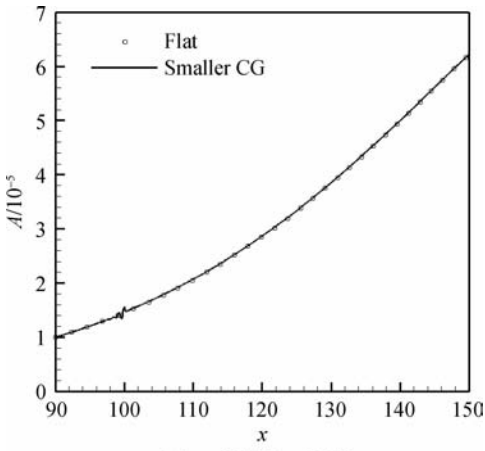
从图 6 可以看到,只是在粗糙元附近扰动幅



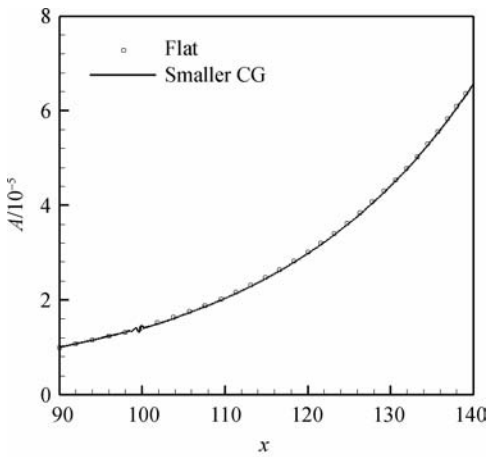
(a) $\omega=1.70, Re=30000$



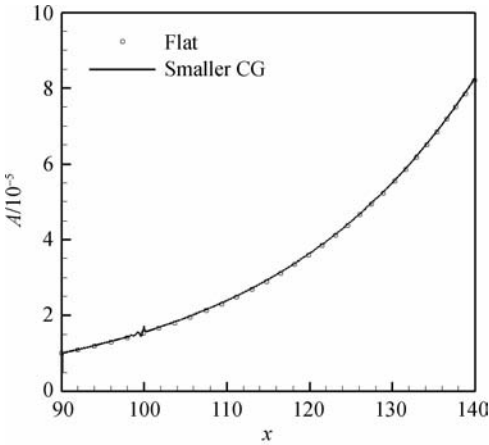
(b) $\omega=1.80, Re=30000$



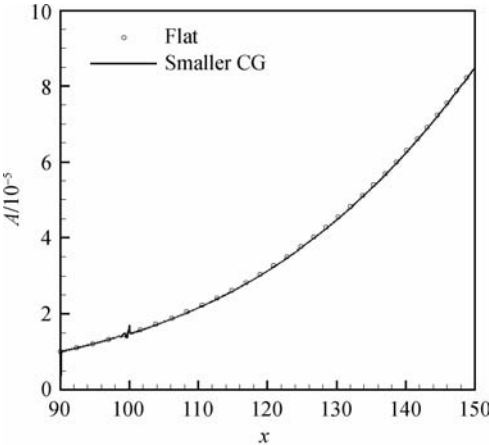
(c) $\omega=1.90, Re=30000$



(d) $\omega=1.75, Re=50000$



(e) $\omega=1.85, Re=50000$



(f) $\omega=1.95, Re=50000$

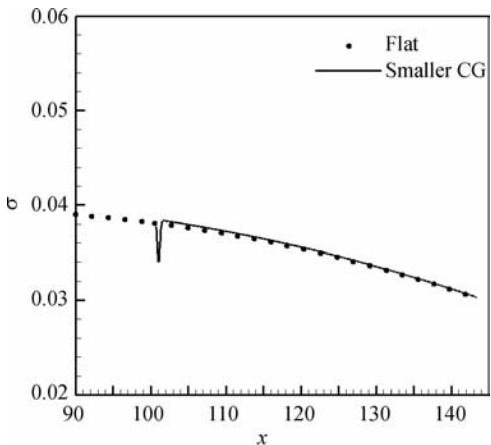
图 6 小尺度粗糙元扰动幅值的演化及对比
Fig. 6 Evolution and comparison of disturbance amplitude of the smaller concave groove

值有微小的波动,随后就很快地稳定,扰动幅值增长的情况与无粗糙元的结果几乎没有差别.看来对于小尺度粗糙元,由于对流场的影响较小,因此与无粗糙元的结果一致.

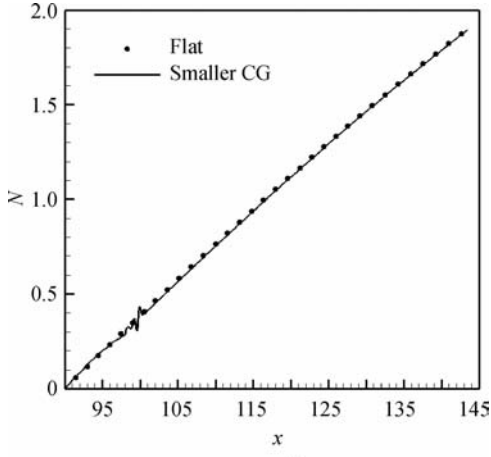
为了便于用 e^N 方法进行转捩预测的分析,下

面给出了扰动幅值的增长率(σ)及 N 值的分布.图 7 给出了小尺度粗糙元下 $\omega=1.80$ 的扰动幅值的增长率和 N 值与其对应平板的对比.可以看出,对于小尺度粗糙元, $Re=30\,000, \omega=1.80$ 时,过了粗糙元之后扰动幅值的增长率与平板的符合较好. N 值的分布,除了粗糙元处有很小的波动外,其余位置也符合很好.其他频率的扰动及雷诺数为 $50\,000$ 的结果与雷诺数为 $30\,000, \omega=1.80$ 的结果类似,在此不一一给出.

结果表明,小尺度的粗糙元对扰动的影响很小,在利用 e^N 方法进行转捩预测可以不考虑它的影响.



(a) 增长率



(b) N 值

图 7 小尺度粗糙元扰动幅值的增长率和 N 值演化及对比($Re=30\,000, \omega=1.80$)

Fig. 7 Evolution and comparison of growth rate of disturbance amplitude and N of the smaller concave groove ($Re=30\,000, \omega=1.80$)

2.3.2 大尺度粗糙元的结果

图 8 给出了大尺度粗糙元两个雷诺数工况的扰动幅值(A)的演化情况及对比.

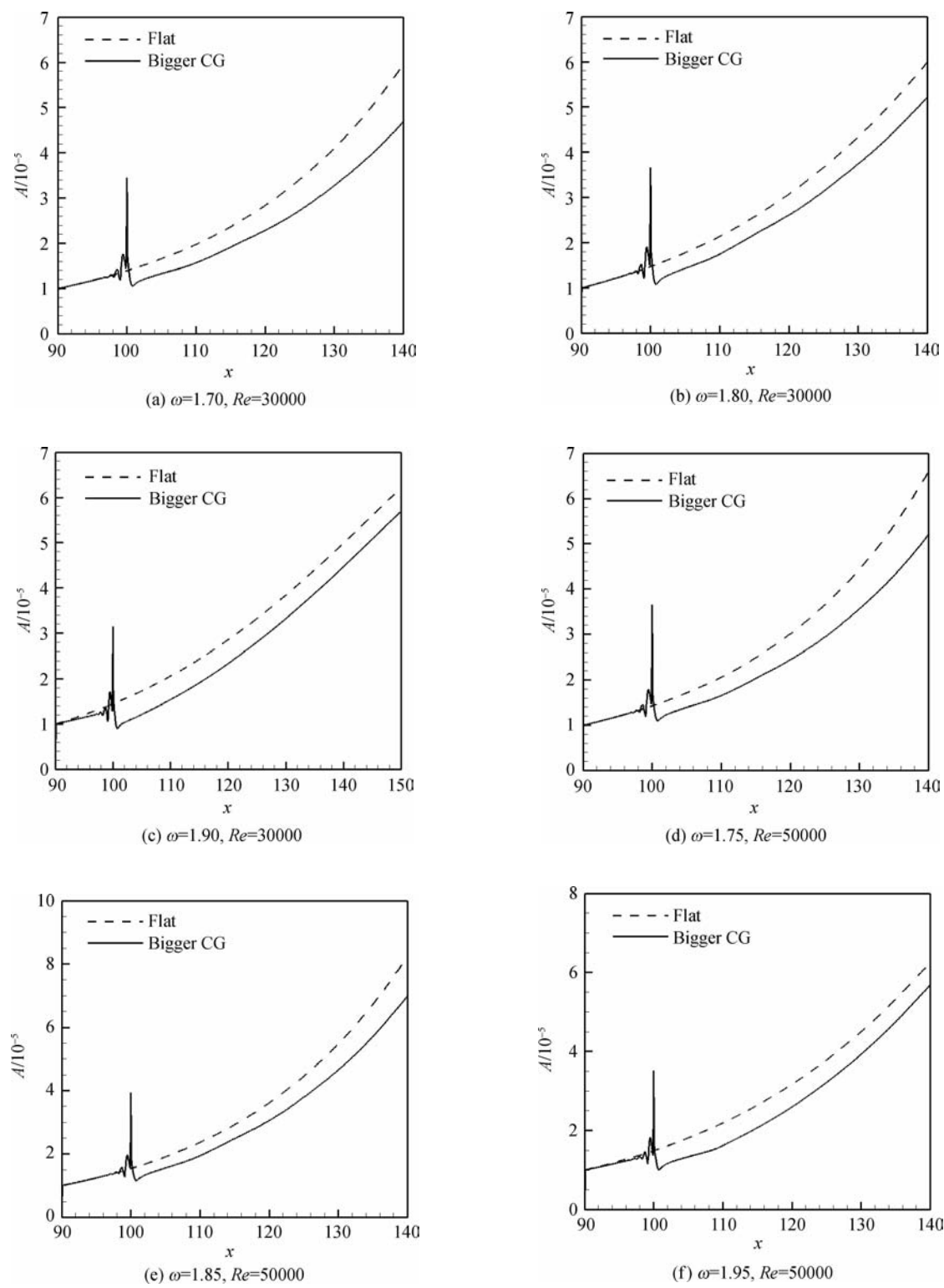


图 8 大尺度粗糙元扰动幅值的演化及对比

Fig. 8 Evolution and comparison of disturbance amplitude of the bigger concave groove

从图 8 可以看出,大尺度粗糙元对扰动幅值演化的影响是明显的,影响主要集中在粗糙元附近,总的趋势是使扰动幅值减小.粗糙元之后,扰动幅值的增长曲线与平板情况的扰动幅值增长曲线几乎平行,这表明粗糙元之后,扰动幅值的增长

率与平板的扰动幅值增长率是符合的,与粗糙元之后基本流的变化不大是一致的.

图 9 给出了大尺度粗糙元的扰动幅值的增长率与平板结果的比较.

从图 9 可以看出,在粗糙元的位置扰动幅值

变化很大,之后扰动幅值的增长率波动的形式趋于平板情况的扰动幅值增长率,基本稳定后,两者的相对差别约在 2%。这表明在粗糙元下游的一定位置后,扰动幅值增长率与平板的结果能符合

得更好。

从以上分析可以看出大尺度粗糙元对扰动幅值演化有明显的抑制作用,但集中在粗糙元附近,粗糙元后扰动幅值增长率与平板情况的一致。

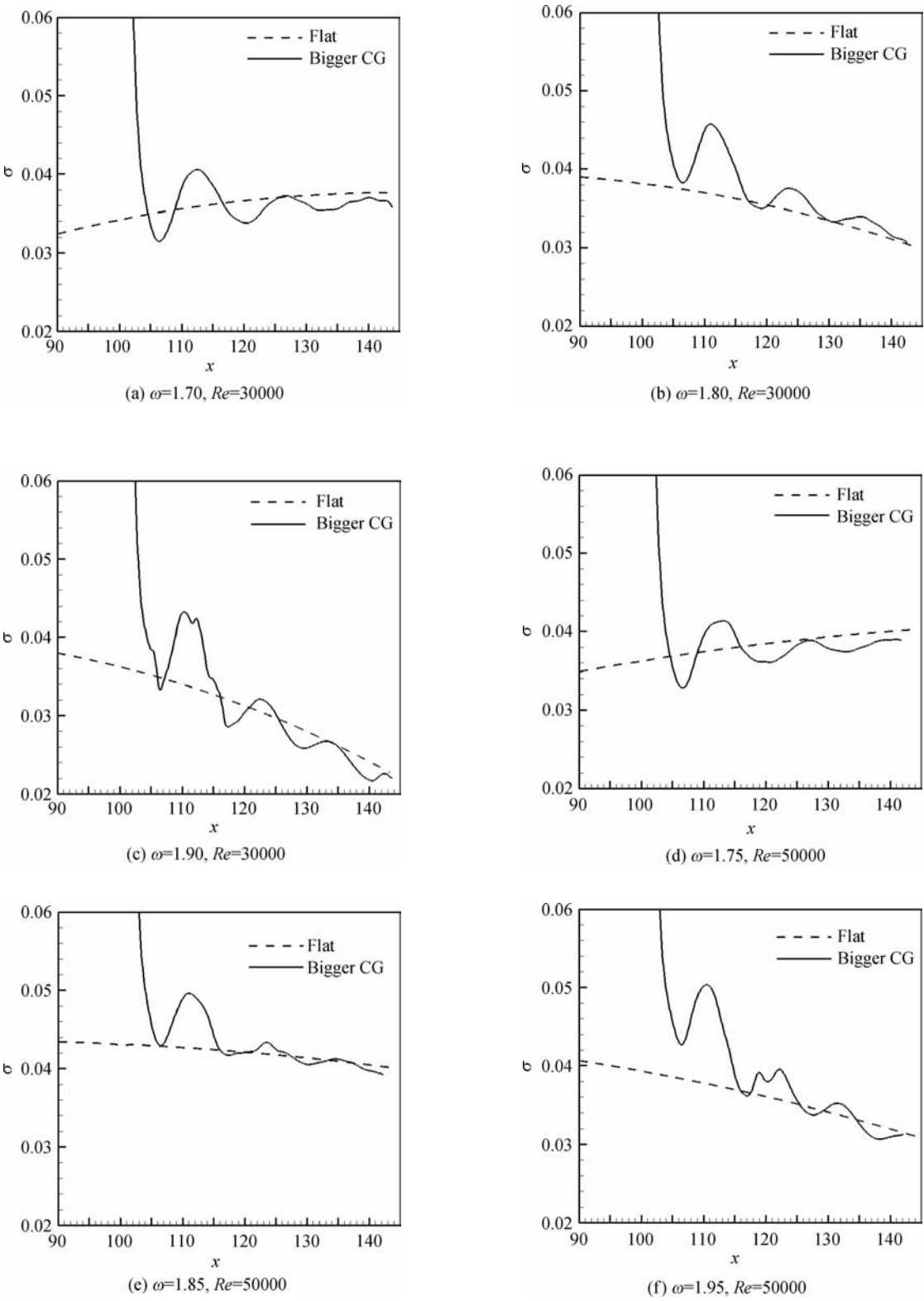


图 9 大尺度粗糙元扰动幅值的增长率的演化及对比

Fig. 9 Evolution and comparison of growth rate of disturbance amplitude of the bigger concave groove

2.4 大尺度粗糙元的 N 值修正

为了用 e^N 方法对转捩进行预测,图 10 给出了 N 的计算结果,共给出了 5 种结果:①基本流用平板边界层 Blassius 解进行 LST 分析的结果,

记为 LST_flat;②基本流用有粗糙元的数值模拟解进行 LST 分析的结果,记为 LST_CG;③基本流用有粗糙元的数值模拟计算扰动演化所得的结果,记为 DNS_CG;④ LST_flat 的 N 值进行修正

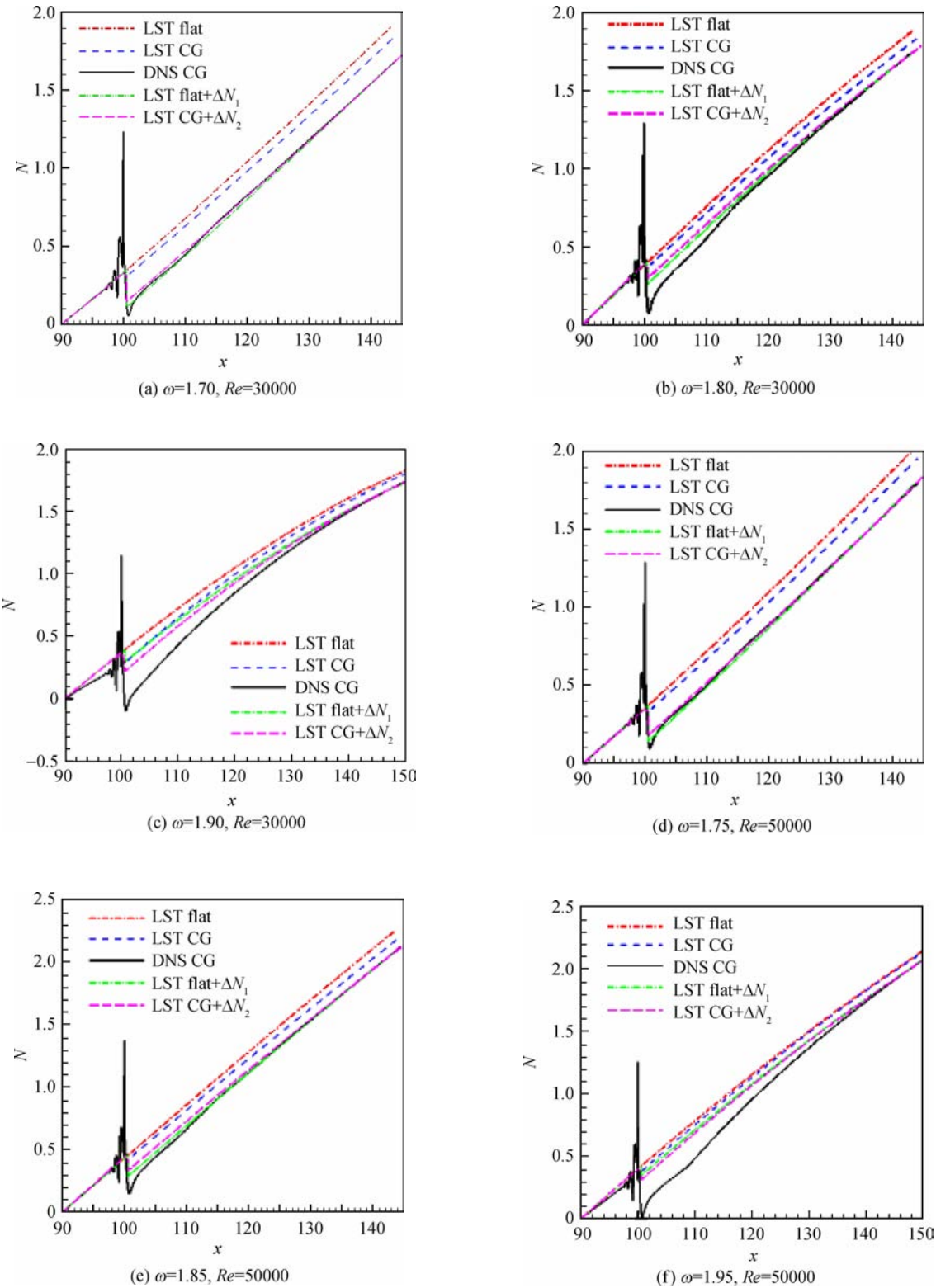


图 10 大尺度粗糙元 N 值比较

Fig. 10 Comparison of N of the bigger concave groove

的结果,记为 $LST_flat + \Delta N_1$; ⑤ LST_CG 的 N 值进行修正的结果,记为 $LST_CG + \Delta N_2$. 其中 N 值修正 ΔN 的确定方法是使经修正后的 N 值在计算域的下游与 DNS_CG 的结果符合.

从图 10 中 N 值的比较可以看出,只要在粗糙元处对 LST 的结果进行一定量的修正,则从粗糙元下游的某一个位置开始, N 值就能很好地与数值模拟的结果相符. 这说明对于带有凹型粗糙元的平板,只要对过粗糙元后的 N 值进行一定的修正,即可以利用 e^N 加 N 值修正的方法进行转捩预测.

表 1 给出了大尺度粗糙元的 N 值修正的 ΔN .

表 1 大尺度粗糙元的 ΔN
Table 1 ΔN of the bigger concave groove

Re	ω	ΔN_1	ΔN_2
30 000	1.70	-0.240	-0.160
30 000	1.80	-0.140	-0.070
30 000	1.90	-0.095	-0.068
50 000	1.75	-0.230	-0.150
50 000	1.85	-0.167	-0.087
50 000	1.95	-0.075	-0.067

从表 1 看, N 值的修正都不大,总体上小于 0.25. 修正值 ΔN_2 的绝对值总是小于 ΔN_1 的绝对值,这表明用有粗糙元的基本流得到的 LST 结果与数值模拟扰动演化的结果更接近,但差别很小,对转捩的预测影响不大. 因此,在对带有粗糙元的平板边界层利用 e^N 方法进行转捩预测时,可以用无粗糙元的基本流进行 LST 分析得到 N 值,再加 N 值修正 ΔN_1 就可以了. 从计算结果来看,频率越大, ΔN 的绝对值越小.

3 结 论

本文讨论了两种尺度的粗糙元对扰动演化的影响. 尺度为 $l \times h = 0.1\delta_0 \times 0.05\delta_0$ 的粗糙元对扰动幅值演化的影响很小,在利用 e^N 方法进行转捩预测时可以忽略,直接用无粗糙元的情况进行代替. 尺度为 $l \times h = 0.5\delta_0 \times 0.25\delta_0$ 的粗糙元对扰动幅值的演化有影响,使各频率的扰动幅值都有不同程度的降低,但在粗糙元后的扰动幅值增长率逐渐趋向于无粗糙元情况下的扰动幅值增长率. 在用 e^N 方法进行转捩预测时,可用 LST 分析的结果加 N 值修正 ΔN 的方法进行. 计算结果表

明,频率越大, ΔN 的绝对值越小. 在本文研究的粗糙元尺度范围内, ΔN 的绝对值小于 0.25.

参考文献:

[1] 黄志澄. 空天飞机的边界层转捩[J]. 气动实验与测量控制,1994,8(1):1-9.
HUANG Zhicheng. Boundary layer transition for aerospace plane[J]. Aerodynamic Experiment and Measurement and Control,1994,8(1):1-9. (in Chinese)

[2] Liepmann H W, Fila G H. Investigations of effects of surface temperature and single roughness elements on boundary-layer transition[R]. NACA Report 890,1947.

[3] Smith A M O, Clutter D W. The smallest height of roughness capable of affecting boundary-layer transition[J]. Journal of the Aerospace Sciences,1959,26(4):229-245.

[4] Gao B, Park D H, Park S O. Stability analysis of a boundary layer over a hump using parabolized stability equations[J]. Fluid Dynamics Research,2011,43(5):1-19.

[5] Holloway P F, Sterrett J R. Effect of controlled surface roughness on boundary-layer transition and heat transfer at Mach numbers of 4.8 and 6.0[R]. NASA TN-D-2054, 1964.

[6] 陆昌根, 赵玲慧, 沈露予. 局部扰动对平板边界层流动稳定性影响的研究[J]. 空气动力学学报,2012,30(1):63-67.
LU Changgen, ZHAO Linghui, SHEN Luyu. Influence of local disturbance on the stability of boundary layer[J]. Acta Aerodynamica Sinica,2012,30(1):63-67. (in Chinese)

[7] 李慧. 单个粗糙元对可压缩平板边界层稳定性影响的研究[D]. 天津:天津大学,2013.
LI Hui. The effect of single roughness element on the stability in a compressible boundary layer on a flat plate[D]. Tianjin: Tianjin University,2013. (in Chinese)

[8] 陈金, 陈方, 刘洪. 超临界翼型加装鼓包减阻的数值研究及优化设计[J]. 微型电脑应用,2011,27(2):1-3.
CHEN Jin, CHEN Fang, LIU Hong. The optimization design and numerical study of drag-reducing using bumps on supercritical wings[J]. Microcomputer Applications,2011,27(2):1-3. (in Chinese)

[9] 杨洋, 陈迎春, 黄炜. 跨音速机翼采用鼓包主动减阻技术研究[J]. 民用飞机设计与研究,2012,28(2):13-17.
YANG Yang, CHEN Yingchun, HUANG Wei. Active drag-reducing technique using bumps on transonic wings[J]. Civil Aircraft Design and Research,2012,28(2):13-17. (in Chinese)

[10] 蔡巧言, 谭慧俊. 前体边界层状态对高超声速进气道流动结构及性能的影响[J]. 航空动力学报,2008,23(4):699-705.
CAI Qiaoyan, TAN Huijun. Effects of the fore-body boundary layer state on flow structure and performance of hypersonic inlets[J]. Journal of Aerospace Power,2008,23(4):699-705. (in Chinese)

[11] 赵慧勇, 周瑜, 倪鸿礼, 等. 高超声速进气道边界层强制转捩实验[J]. 实验流体力学,2012,26(1):1-6.

ZHAO Huiyong, ZHOU Yu, NI Hongli, et al. Test of forced boundary-layer transition on hypersonic inlet[J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2012, 26(1): 1-6. (in Chinese)

[12] Smith A M O, Gamberoni N. Transition pressure gradient and stability theory[R]. Long Beach, California: Douglas Aircraft Company Report ES26388, 1956.

[13] Van Ingen J L. A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region[R]. Delft, Netherland: Aerospace Engineering Report VTH-74, 1956.

[14] Malik M R, Orszag S A. Comparison of methods for prediction of transition by stability analysis[J]. AIAA Journal, 1980, 18(12): 1485-1489.

[15] 苏彩虹, 周恒. 小攻角高超音速尖锥边界层的转捩预测及 e^N 法的改进[J]. 中国科学, 2009, 39(1): 123-130.

SU Caihong, ZHOU Heng. The transition prediction of hypersonic boundary-layer with a small angles of attack and the improvement of e^N [J]. Science in China, 2009, 39(1): 123-130. (in Chinese)

[16] 吴宁宁, 罗纪生. 壁面小折角对马赫数 4.5 边界层中扰动演化的影响[J]. 空气动力学学报, 2014, 32(2): 219-227.

WU Ningning, LUO Jisheng. The effect of small wall-angle on the evolution of disturbances in the boundary layer of Mach number 4.5[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2014, 32(2): 219-227. (in Chinese)

[17] 张华, 罗纪生. 用扰动方程研究可压缩流动边界层中扰动的演化[J]. 燕山大学学报, 2007, 30(3): 248-252.

ZHANG Hua, LUO Jisheng. The study of evolution of perturbations in the compressible boundary layer flow using perturbation equations[J]. Journal of Yanshan University, 2007, 30(3): 248-252. (in Chinese)

[18] 刘建新, 罗纪生. 小攻角高超声速钝锥边界层中不同扰动对转捩的影响[J]. 应用数学和力学, 2010, 31(5): 505-515.

LIU Jianxin, LUO Jisheng. Effect of disturbances at inlet on hypersonic boundary layer transition on a blunt cone at small angle of attack[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(5): 505-515. (in Chinese)

[19] 安德森. 计算流体力学基础及其应用[M]. 吴松平, 刘赵森, 译. 北京: 机械工业出版社, 2007.

(编辑: 陈 越)