

多级叶盘结构动力特性分析的一种方法

陈毓迪, 王延荣, 许柱山
(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 因各级转子叶片数的不同,基于传统循环对称法的通用有限元程序无法直接用于多级叶盘结构动力特性分析,发展了一种方法,分别对每一级扇区模型施加相应的循环对称边界条件,级间则通过施加自由度耦合来保证位移场的连续.若对每一级叶盘结构选取合理的扇区数目进行建模,最大程度地考虑级间耦合效应,则精度可进一步提高.由于循环对称边界条件和级间耦合通过对位移自由度施加约束方程来实现,因此该方法易于在通用有限元程序系统中实现.对两级叶盘结构分别采用该方法和全环模型进行动力特性分析,两种方法的频率差控制在 3% 内.探讨了多级叶盘结构中级间耦合对模态的影响,在低节径模态两级叶盘结构耦合效应较为明显,随着节径数的增加,耦合效应降低.

关 键 词: 多级叶盘结构; 动力特性分析; 循环对称性; 级间约束; 耦合效应

中图分类号: V215.3 **文献标志码:** A

A method of structural dynamic characteristics analysis for multistage bladed disks

CHEN Yu-di, WANG Yan-rong, XU Zhu-shan
(School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Concerning different blade numbers in each stage, the commercial finite element solvers developed on the traditional cyclic symmetry method can not be applied directly to the structural dynamic analysis of multistage bladed disks. A method was developed to deal with this issue by applying corresponding cyclic symmetry boundary constraints on each stage's cyclic interface, and coupling constraints were also applied on the inter-stage's nodes to ensure continuous displacement field. To achieve a better accuracy, appropriate number of sectors for each stage was selected to consider the coupling effects to the greatest degree. The method could be easily implemented in the commercial finite element solvers since the cyclic symmetry boundary conditions for each stage and the inter-stage coupling constraints could be handled by the displacement degrees of freedom respectively. The modal analysis got by this method shows a good agreement with the full circle method and the frequency difference is below 3%. The influence of coupling effect on the multistage bladed disks structure was presented and with the increase of nodal number the coupling effects decrease.

Key words: multistage bladed disks; dynamic characteristics analysis; cyclic symmetry; inter-stage constraints; coupling effects

循环对称结构广泛应用于航空航天领域,如涡轮和风扇压气机中的叶盘结构就是典型的循环对称结构.利用叶盘结构的循环对称性,在建立模型和求解时,可以通过分析单扇区模型来得到整级的力学行为,大大缩减了求解规模.国内外学者都对此做了大量的工作,并已经发展得较为成熟,

形成了较为系统的理论与方法^[1-6]. 在多级叶盘结构分析中,由于每级叶盘结构的叶片数目通常不同,因此不能直接应用循环对称法进行计算分析. 工程应用中,通常忽略了不同级间的耦合效应,分别对单级叶盘结构进行动力特性分析来获得多级叶盘结构的动力特性. Bladh 等^[7]研究表明,考虑级间耦合效应的多级叶盘结构动力特性与单级叶盘结构动力特性有较大的差别,耦合效应对多级叶盘结构动力特性具有较为明显的影响.

一些学者^[8-10]使用全环模型对级间的耦合效应进行了分析,但求解规模过于巨大. Bladh 等^[11]和 Song 等^[12]和 Sternchüss 等^[13]使用了模态综合法对多级叶盘结构的求解规模进行缩减,Bhartiya 等^[14]提出了一种通过分析每级叶盘结构的扇区模型的模态,从而缩减多级叶盘结构全环模型自由度的方法. 以上几种方法虽然具有较高的精度,但实施上具有一定的难度. Laxalde 等^[15-16]提出一种近似的多级叶盘结构的动力特性分析方法,通过对多级叶盘结构分别进行单扇区建模,但未考虑每级叶盘结构的扇区数对级间耦合的影响. 本文通过合理地选择每一级的扇区数进行建模,最大程度地考虑级间耦合效应;应用波传播技术^[17]分别对每一级有限元模型的左右循环对称面的位移自由度施加合理的相位差边界条件;级间施加位移自由度耦合约束,从而满足扩展后全环在位移场上的连续性. 本文首先回顾了循环对称法的理论和应用方法,而后提出了多级叶盘结构循环对称法,给出了主要公式. 将多级叶盘结构全环模型的动力特性分析作为参考基准,对两级叶盘结构的分析结果进行了对比分析,验证了该方法的有效性. 在此基础上探讨了级间耦合对多级叶盘结构的动力特性的影响.

1 单级叶盘结构循环对称方法

1.1 理论分析

对于协调的单级叶盘结构,所有扇区的振动位移向量幅值相等,相邻扇区对应节点的位移向量之间存在固定的相位差 α ,因此可以取一个基本扇区进行分析.

考虑单个扇区,其节点位移向量可表示为

$$\boldsymbol{U}_s = [\boldsymbol{U}_{s,l}^T \quad \boldsymbol{U}_{s,o}^T \quad \boldsymbol{U}_{s,r}^T]^T \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{U}_{s,l}, \boldsymbol{U}_{s,r}, \boldsymbol{U}_{s,o}$ 分别表示扇区左、右循环对称面的节点位移向量以及其余节点的位移向量.

对于叶盘结构的节径型振动模态,扇区间的相位差 α 可以表示为

$$\alpha = 2n\pi/N \quad (2)$$

式中 N 为扇区数, n 为节径数.

左、右循环对称面的节点位移向量 $\boldsymbol{U}_{s,l}$ 和 $\boldsymbol{U}_{s,r}$ 之间存在如下关系:

$$\boldsymbol{U}_{s,l} = \boldsymbol{U}_{s,r} e^{i\alpha} \quad (3)$$

式中 i 为虚数单位.

将式(3)带入式(1)可得

$$\boldsymbol{U}_s = \hat{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{U}_s = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{s,r} \\ \boldsymbol{U}_{s,o} \end{bmatrix} \quad (4)$$

因此,系统的动力平衡方程可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_s \hat{\boldsymbol{U}}_s = \hat{\boldsymbol{M}}_s \hat{\boldsymbol{U}}_s \omega^2 \quad (5)$$

式中 ω 为叶盘结构的固有频率.

全环结构的位移可通过下式得到:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_s &= \boldsymbol{e}_{N,n} \otimes \hat{\boldsymbol{U}}_s \\ \boldsymbol{e}_{N,n} &= [1 \quad e^{2in\pi/N} \quad e^{4in\pi/N} \quad \cdots \quad e^{2(N-1)n\pi/N}]^T \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\otimes$ 为克罗内克符号.

1.2 方法应用

波传播技术应用简单,因此工程上多使用其进行循环对称结构分析,如多数的通用有限元程序. 对于循环对称结构,其节径型固有模态并不完全唯一,即同一个频率下存在两个互为正交的模态. 为了简便,通常用复数来表示,即

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\delta} + i\boldsymbol{\delta}' \quad (7)$$

式中 $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{\delta}'$ 为实数, i 为虚数单位.

将该式带入式(3)并展开,分别考虑其实部和虚部,可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta}_{s,l} = \cos\alpha \boldsymbol{\delta}_{s,r} - \sin\alpha \boldsymbol{\delta}'_{s,r} \\ \boldsymbol{\delta}'_{s,l} = \sin\alpha \boldsymbol{\delta}_{s,r} + \cos\alpha \boldsymbol{\delta}'_{s,r} \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\boldsymbol{\delta}_s$ 和 $\boldsymbol{\delta}'_s$ 分别表示基本扇区和复制扇区相应的节点位移向量.

上式确定了基本扇区与复制扇区左侧和右侧对应节点的位移约束关系,从而两侧节点位移向量满足相应的相位差要求,这是使用波传播技术对循环对称结构进行振动分析的关键.

2 多级叶盘结构的循环对称方法

多级叶盘结构循环对称法仍基于单级叶盘结构的循环对称性. 分别选取每级叶盘结构合理的扇区数进行建模,最大程度地考虑级间耦合效应,级间则通过施加耦合约束来满足扩展后全环位移场的连续性.

考虑两级叶盘结构,前一级和后一级叶盘结

构的扇区数目分别为 N_1 和 N_2 , 不妨设 $N_2 > N_1$, 则前一级叶盘结构选取单个扇区进行建模, 后一级叶盘结构建模时所选取的扇区数目与前一级叶盘结构扇区数目的比值有关, 可表示为

$$k = \text{round}(N_2/N_1)$$

式中 round 函数返回四舍五入后的整数。

两级叶盘结构左、右循环对称面上节点位移向量的相位差^[18]可分别表示为

$$\alpha_1 = 2n\pi/N_1 \quad \alpha_2 = 2nk\pi/N_2 \quad (9)$$

因此, 两级模型的循环对称面上的位移自由度具有如下关系:

$$\mathbf{U}_{s,l}^{(1)} = \mathbf{U}_{s,r}^{(1)} e^{i\alpha_1} \quad \mathbf{U}_{s,l}^{(2)} = \mathbf{U}_{s,r}^{(2)} e^{i\alpha_2} \quad (10)$$

由于多级(现以两级为例)叶盘结构循环对称法中两级叶盘结构建模所对应的扇区角度分别为 θ_1 和 θ_2 , 一般 $\theta_1 \neq \theta_2$, 为了保证扩展成全环后级间的位移场连续, 应对级间位移自由度施加耦合约束。全环级间自由的位移场连续条件可表示为

$$\mathbf{U}_b^{(1)} = \mathbf{U}_b^{(2)} \quad (11)$$

其中上标(1)和(2)表示两级叶盘结构, 下标 b 表示级间交界面的自由度。

多级叶盘结构由单级叶盘结构组合而成, 考虑单级叶盘结构具有循环对称性, 因此两级叶盘结构的级间自由度可分别表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_b^{(1)} &= (\mathbf{e}_{N_1} \otimes \mathbf{I}_{b_1}) \mathbf{U}_{s,b}^{(1)} \\ \mathbf{U}_b^{(2)} &= (\mathbf{e}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{b_2}) \mathbf{U}_{s,b}^{(2)} \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵。联立式(11)和式(12)可得

$$\mathbf{U}_{s,b}^{(2)} = \boldsymbol{\beta}_n \mathbf{U}_{s,b}^{(1)} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\beta}_n = (\mathbf{e}_{N_2,n}^* \otimes \mathbf{I}_{b_2}) (\mathbf{e}_{N_1,n} \otimes \mathbf{I}_{b_1})$$

两级叶盘结构的位移向量可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s^{(1)} &= [\mathbf{U}_{s,b}^{(1)T} \quad \mathbf{U}_{s,l}^{(1)T} \quad \mathbf{U}_{s,o}^{(1)T}]^T \\ \mathbf{U}_{s,b}^{(2)} &= [\mathbf{U}_{s,b}^{(2)T} \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{s,b}^{(2)T}]^T \\ \mathbf{U}_s^{(2)} &= [\mathbf{U}_{s,b}^{(2)T} \quad \mathbf{U}_{s,l}^{(2)T} \quad \mathbf{U}_{s,o}^{(2)T}]^T \end{aligned} \quad (14)$$

上式可以合写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^{(1)} \\ \mathbf{U}_s^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \mathbf{U}_s^{(1 \cup 2)} \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{b_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{o_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}_n e^{i\varphi^{(1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n e^{i\varphi^{(k)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{o_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_s^{(1 \cup 2)} = [\mathbf{U}_{s,b}^{(1)T} \quad \mathbf{U}_{s,l}^{(1)T} \quad \mathbf{U}_{s,o}^{(1)T} \quad \mathbf{U}_{s,l}^{(2)T} \quad \mathbf{U}_{s,o}^{(2)T}]^T$$

$$\phi(k) = 2(k-1)n\pi/N_2$$

两级叶盘结构的特征方程转化为

$$\mathbf{K}_n^{(1 \cup 2)} \mathbf{U}_s^{(1 \cup 2)} = \mathbf{M}_n^{(1 \cup 2)} \mathbf{U}_s^{(1 \cup 2)} \lambda \quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n^{(1 \cup 2)} &= \mathbf{T}_n^T \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_n^{(1)} \\ \mathbf{K}_n^{(2)} \end{Bmatrix} \mathbf{T}_n \\ \mathbf{M}_n^{(1 \cup 2)} &= \mathbf{T}_n^T \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_n^{(1)} \\ \mathbf{M}_n^{(2)} \end{Bmatrix} \mathbf{T}_n \end{aligned}$$

利用上述的多级叶盘结构循环对称法可以对多级叶盘结构进行较为显著的求解规模缩减。这种方法基于单级叶盘结构的循环对称性, 能够最大程度地考虑级间的耦合效应, 同时级间位移自由度的耦合约束保证了扩展后全环位移场的连续。

3 数值分析示例

级间位移自由度的耦合可以通过通用有限元程序(如 ANSYS)中的约束方程来实现, 这一般要求多级叶盘结构的级间网格划分一致, 若不一致, 可采用约束方程实现关联。考虑两级叶盘结构, 扇区数分别为 $N_1=24$ 和 $N_2=45$, 则 $k=2$ 。前一级叶盘结构选取一个扇区建模, 后一级叶盘结构则选取 2 个扇区建模, 其全环模型和扇区模型如图 1 所示。

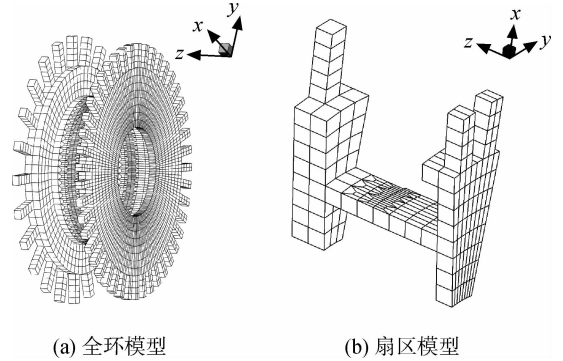


图 1 两级叶盘有限元模型

Fig. 1 Finite element model of two-stage bladed disks

图 2 给出了全环模型和扇区模型得到的每个节径簇下的前几阶模态固有频率的对比, 可以看出多级叶盘结构循环对称法所得到的固有频率与全环模型计算的固有频率相差很小, 而且随着节径数的增加, 两种方法计算的固有频率基本一致。为更好地考查扇区模型所计算的振型, 将计算结果扩展到全环, 并和全环模型相同节径下的同一阶频率进行了对比。

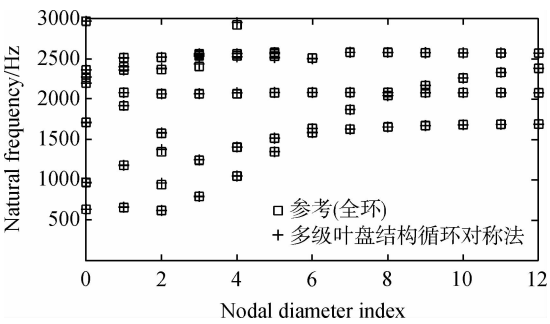


图 2 两种方法得到的固有频率对比

Fig. 2 Comparison of natural frequencies between two methods

图 3 和图 4 分别表示了 0 节径和 6 节径下相应振型的对比,可以看出两种方法得到的振型一致,验证了多级叶盘结构循环对称法可行性. 由图 3 还可以看出该频率下级间存在着较为明显的耦合效应.

对于算例中两级叶盘结构,考虑扇区数目对级间耦合效应的影响时,第 2 级叶盘结构选取 $k=\text{round}(N_2/N_1)=2$,未考虑扇区数目对级间耦合效应时,即选取单扇区 $k=1$. 提取 1 节径振动模式下的固有频率进行对比,如图 5 所示. 计算误差

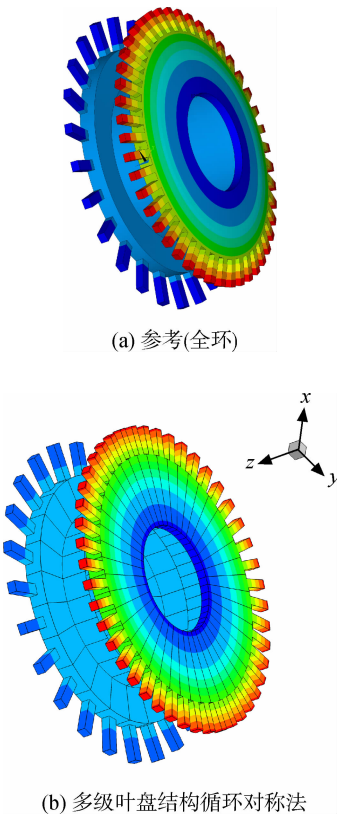


图 3 0 节径, $f=633\text{ Hz}$ 下振型对比

Fig. 3 Comparison of mode at 633 Hz, 0 nodal diameter

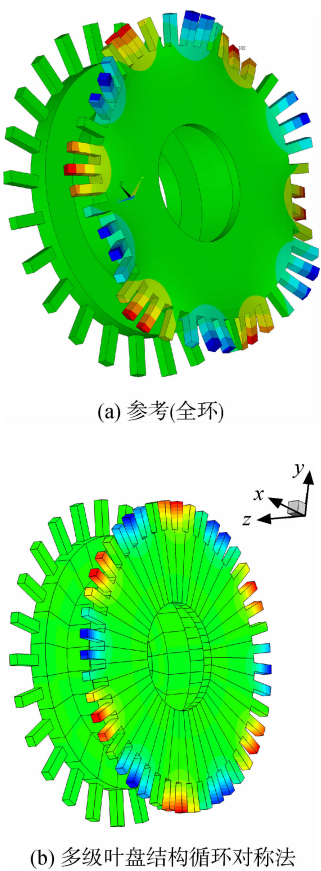


图 4 6 节径, $f=1635\text{ Hz}$ 下振型对比

Fig. 4 Comparison of mode at 1635 Hz, 6 nodal diameter

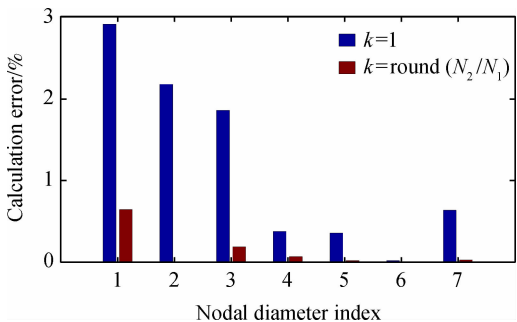


图 5 扇区数目对精度的影响

Fig. 5 Effects of different numbers of sector on precision

Δ 按下式计算:

$$\Delta = \left| \frac{f_k - f_{\text{ref}}}{f_{\text{ref}}} \right|$$

式中 f_k 为多级叶盘结构循环对称法计算的固有频率, f_{ref} 为全环模型计算的固有频率. 容易看出, $k=\text{round}(N_2/N_1)$ 的计算精度明显高于 $k=1$ 的计算精度. 合理地选择多级叶盘结构中每级叶盘的扇区数目进行建模可以更加真实地考虑级间耦合效应, 得到较高的计算精度.

4 级间耦合效应

前文已指出,多级叶盘结构存在的耦合模式,无法通过单级叶盘结构分析进行模拟. 以前述的两级叶盘结构作为示例,对比了利用多级叶盘结构循环对称法得到的固有频率和与传统的单级叶盘结构分析得到的固有频率,其中单级叶盘结构分析时,级间位移固定. 由图 6 可以看出在低节径模式,由于盘参与的振动成分较大,级间的耦合效应明显,传统的单级叶盘结构分析不能捕捉耦合模式,计算误差较大. 随着节径数的增加,盘参与振动的成分逐渐降低,级间的耦合效应降低,多级叶盘结构循环对称法和传统的单级叶盘结构分析结果趋于一致. 因此在对多级叶盘结构进行模态分析时,尤其是低节径模式,有必要考虑级间的耦合效应来保证结果的准确性.

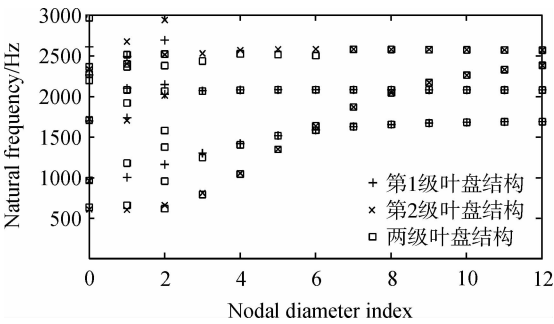


图 6 级间耦合效应

Fig. 6 Inter-stage coupling effects

5 结 论

本文发展了一种针对多级叶盘结构进行动力特性分析的循环对称法,该方法基于单级叶盘结构的循环对称性,通过合理选取每级叶盘结构的扇区数目进行建模,最大程度地考虑了级间的耦合效应,同时对级间位移自由度施加耦合约束以满足扩展后全环位移场的连续. 该方法易于在有限元中实施,且计算精度得到了数值验证. 探讨了级间耦合对多级叶盘结构振动模式的影响,在低节径模式下,多级叶盘结构具有较为明显的耦合效应,随着节径数目的增加,级间耦合效应降低.

参考文献:

[1] 王勰成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2002.
[2] 张锦,刘晓平. 叶轮机振动模态分析理论及数值方法[M]. 北京:国防工业出版社,2001
[3] Thomas D L. Dynamics of rotationally periodic structures

[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,1979,14(1):81-102.
[4] Wildheim J. Excitation of rotating circumferentially periodic structures[J]. Journal of Sound and Vibration,1981,75(3):397-416.
[5] Srinivasan A V. Vibrations of bladed disks assemblies a selected survey[J]. Journal of Vibration and Acoustics,1984,106(2):165-168.
[6] Slater J C. Forced response of bladed disks assemblies a survey[J]. Shock and Vibration,1999,31(1):17-24.
[7] Bladh R, Castanier M P, Pierre C. Effects of multistage coupling and disk flexibility on mistuned bladed disk dynamics[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power,2003,125(1):121-130.
[8] 张锦,陈向均,王文亮. 转动盘-片系的循环对称模综[J]. 固体力学学报,1992,3(13):225-234.
ZHANG Jin, CHEN Xiangjun, WANG Wenliang. Cyclic symmetric modal synthesis of rotating bladed disc system [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 1992, 125: 121-130. (in Chinese)
[9] Rzadkowski R, Drewczynski M. Natural frequencies and modes shapes of two mistuned bladed discs on the shaft [R]. ASME Paper 2004-GT-54265,2004.
[10] Rzadkowski R, Drewczynski M. Forced vibration of several bladed discs on the shaft [R]. ASME Paper 2006-GT-90158,2006.
[11] Bladh R, Castanier M P, Pierre C. Reduced order modeling techniques for dynamic analysis of mistuned multi-stage turbomachinery rotors[R]. ASME Paper 2001-GT-0276,2001.
[12] Song S H, Castanier M P, Pierre C. Multistage modeling of turbine engine rotor vibration[R]. ASME Paper 2007-DE-TC-35361,2007.
[13] Sternchüss A, Balmès E. Reduction of multistage rotor models using cyclic modeshapes[R]. ASME Paper 2007-GT-27974,2007.
[14] Bhartiya Y, Sinha A. Reduced order model of a multistage bladed rotor with geometric mistuning via modal analyses of finite element sectors [R]. ASME Paper GT2010-22725,2010.
[15] Laxalde D, Thouverez F, Lombard J P. Dynamical analysis of multistage cyclic structures[J]. Mechanical Research Communications,2007,34(4):379-384.
[16] Laxalde D, Thouverez F, Lombard J P. Dynamics of multi-stage bladed disks systems[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power,2007,129(4):1058-1064.
[17] 王延荣,田爱梅. 叶/盘结构振动分析中几个问题的探讨 [J]. 推进技术,2002,23(3):233-236.
WANG Yanrong, TIAN Aimei. Several issues in the implementation of vibration analysis of bladed disk[J]. Journal of Propulsion Technology,2002,23(3):233-236. (in Chinese)
[18] Petrov E. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks [J]. Journal of Turbomachinery,2004,126(1):175-183.