

考虑空间机动飞行的直升机尾传动轴 建模与临界转速分析

倪德^{1,2}, 朱如鹏¹, 陆凤霞¹, 鲍和云¹, 靳广虎¹, 李苗苗¹

(1. 南京航空航天大学 机电学院 江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京 210016;
2. 中国航空工业集团公司 中国航空动力机械研究所, 湖南 株洲 412002)

摘 要:建立了具有普遍性的考虑直升机空间机动飞行的尾传动轴动力学模型. 分析了机动飞行对尾传动轴临界转速的影响,发现只有俯仰角速度、偏航角速度、横滚角速度和角加速度 4 个转动运动分量会影响尾传动轴的临界转速. 通过算例着重分析了俯仰、偏航和横滚角速度对尾传动轴前 3 阶临界转速的影响规律. 结果表明:俯仰角速度使尾传动轴的临界转速降低,但只对反进动第 1 阶临界转速有较大影响;偏航角速度对尾传动轴临界转速的影响效果与俯仰角速度完全相同;正向横滚角速度使尾传动轴的正进动临界转速提高,而使反进动临界转速降低;但对于反向横滚,在以横滚角速度等于某值的分界线之前,横滚角速度对尾传动轴临界转速的影响规律与正向横滚相反,前 3 阶临界转速变化曲线的分界线对应的横滚角速度分别为 1.86, 27.41, 124.5 rad/s.

关 键 词: 弯曲振动; 临界转速; 尾传动轴; 直升机; 机动飞行
中图分类号: V214.3; TH113.1; O32 **文献标志码:** A

Modeling and analysis of its critical speed for tail drive shaft considering maneuvering flight of helicopter

NI De^{1,2}, ZHU Ru-peng¹, LU Feng-xia¹,
BAO He-yun¹, JIN Guang-hu¹, LI Miao-miao¹

(1. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology,
College of Mechanical and Electrical Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. China Aviation Powerplant Research Institute,
Aviation Industry Corporation of China, Zhuzhou Hunan 412002, China)

Abstract: The universal dynamical model of tail drive shaft considering maneuvering flight of helicopter was established. The reasons for maneuvering flight of helicopter affecting the critical speed of tail drive shaft were analyzed. It is pointed out that only a portion of the rotational motion components can affect the critical speed of tail drive shaft, including: pitching angular velocity, yawing angular velocity, rolling angular velocity and acceleration. The influence law of the pitching angular velocity, yawing angular velocity and rolling angular velocity on the first three order critical speeds of drive shaft was discussed through a numerical example. The results reveal that the pitching angular velocity reduces the critical speeds of tail drive shaft, but only has a greater impact on the first order critical speed of tail drive shaft in a backward whirl, and the yawing angular velocity has the same effect. The

positive rolling angular velocity increases the critical speed of tail drive shaft in a forward whirl, and reduces the critical speed of tail drive shaft in a backward whirl; but in the case of negative roll maneuver, there is a reverse case compared with the positive roll maneuver that the backward rolling angular velocity reduces the critical speeds of tail drive shaft in a forward whirl and increases the critical speeds of shaft in a backward whirl, before the boundary of the rolling angular velocity equals to a special value. The rolling angular velocities corresponding to the boundary of variation curve of the first, second and third critical speeds are respectively 1.86, 27.41 and 124.5 rad/s.

Key words: bending vibration; critical speed; tail drive shaft; helicopter; maneuvering flight

直升机尾传动系统负责给尾桨传递动力,是直升机最长的传动链,其动力学性能的优劣将对直升机整体性能产生重要影响.尾传动轴是尾传动系统的主要部件,单独研究其动力学特性,便于掌握其对尾传动系统动力学特性的影响,有利于更好地研究整个尾传动系统的动力学特性.直升机为一非惯性系,会对机体上的部件产生附加载荷^[1-3],从而对其动力学特性产生不利影响.因此,有必要研究机动飞行时尾传动轴的动力学特性.

祝长生等^[4-5]利用 Lagrange 方程建立了任意机动飞行下考虑发动机安装位置影响的多盘、多质量和多轴承的不平衡柔性转子系统动力学模型的一般形式,并分析了机动飞行对系统动力学特性的影响.林富生等^[6-9]对飞行器机动飞行下的发动机转子变速运动及转子系统的非线性动力学特性做了深入的研究,得到了很多有意义的结论.徐敏等^[10-11]研究了水平盘旋和俯冲拉起状态下双盘悬臂转子和带挤压油膜阻尼器的 Jeffcott 转子的振动特性.顾致平等^[12]在考虑飞机水平盘旋的情况下分析了刚性和弹性支承的 Jeffcott 转子的振动特性.杨永锋等^[13-14]研究了俯冲拉起和水平盘旋机动飞行条件下裂纹转子的动力学特性.这些文献均未将考虑转子分布质量的影响.许兆棠^[15]考虑了尾传动轴的分布质量和非惯性力的影响,但仅考虑了水平和垂直方向加速度的影响,未完整考虑直升机任意空间机动飞行的影响,而本文对其进行了全面考虑.

由于尾传动轴的弯曲振动固有频率通常远低于其纵向和扭转振动的频率,更容易被激发^[16],所以本文研究其横向弯曲振动.直升机尾传动轴为典型的质量连续分布轴,不宜采用集中质量模型进行研究,而应当作具有圆形截面的旋转梁.采用超临界设计的尾传动轴系可以大大减小支承数

量,是国外采用较多的设计方案,也是国内直升机未来设计的一种趋势.这样在尾传动轴的计算模型中应该考虑转动惯量和陀螺力矩的影响,而剪切变形与转动惯量对轴动力学行为的影响是同阶的^[17],且剪切变形的影响更大^[18],应同时予以考虑.文中称这种同时考虑轴的弯矩、横向位移、剪切变形、转动惯量和陀螺力矩的模型为旋转 Timoshenko 梁模型.

本文建立了描述直升机空间运动与尾传动轴横向弯曲运动的坐标系,基于能量原理推导了惯性系下旋转 Timoshenko 梁的动力学方程,在此基础上,利用非惯性系中质点动力学基本原理,通过附加牵连惯性力、科氏惯性力和惯性力矩的方式,建立了直升机机动飞行下旋转 Timoshenko 梁的动力学方程.与祝长生教授的建模过程相比,本文的建模方法更为直接和简单,当惯性系下尾传动轴采用的动力学模型发生改变时,无需重新推导方程.本文还分析了机动飞行对尾传动轴固有频率的影响.其中,重点分析了垂直爬升飞行、垂直俯冲飞行、水平盘旋飞行和横滚飞行几种典型机动飞行对尾传动轴临界转速的影响,得到了俯仰角速度、偏航角速度和横滚角速度对尾传动轴临界转速的影响规律.研究工作可为空间非惯性系下分布质量轴的动力学建模与分析提供理论参考,对尾传动轴的设计具有一定的指导意义.

1 直升机机动飞行的位姿描述

近似将直升机机体当作刚体,利用刚体的位姿描述方法,即直角坐标系的 3 个移动和 3 个转动,来描述直升机在空中飞行时的位姿,其坐标系如图 1 所示.选取地球为惯性系,过惯性空间中的定点 O_0 建立固定坐标系 $O_0x_0y_0z_0$,用于描述直升机的平动特性.以直升机重心 O_r 为原点建立固

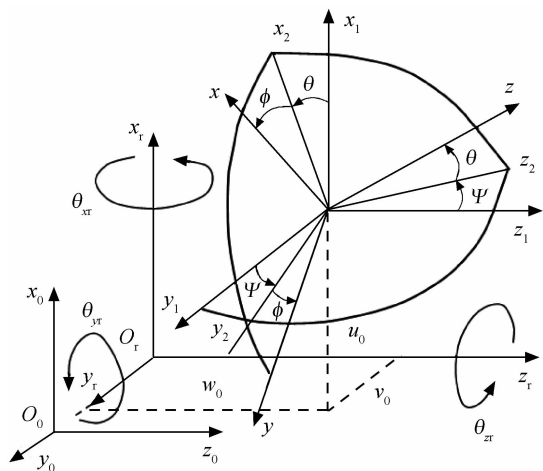


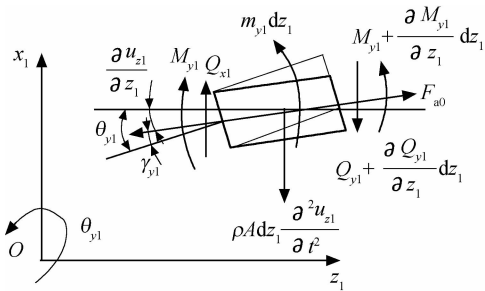
图 1 直升机空间运动的坐标系

Fig. 1 Coordinate system of helicopter space motion

连在直升机机体上的机体坐标系 $O_r x_r y_r z_r$, 用于描述直升机的转动特性. 其中, $O_r z_r$ 轴为机身对称轴, 指向与直升机飞行方向相反. 因此, 直升机的空间位姿可由固定坐标系 $O_0 x_0 y_0 z_0$ 上的平动分量 $[x_0, y_0, -z_0]^T$ 和相对坐标系 $O_r x_r y_r z_r$ 上的转动分量 $[\theta_{xr}, \theta_{yr}, -\theta_{zr}]^T$ 来描述. 其中, θ_{xr} 为直升机的偏航角, θ_{yr} 为俯仰角, $-\theta_{zr}$ 为直升机的正向横滚角. 对于采用欧拉角描述直升机空间转动的情况, 仍然可以通过坐标转换矩阵将各欧拉角用 θ_{xr}, θ_{yr} 和 $-\theta_{zr}$ 表示. 平面 $y_1 O z_1$ 与平面 $y_r O_r z_r$ 、平面 $x_1 O z_1$ 与平面 $x_r O_r z_r$ 和平面 $x_1 O y_1$ 与平面 $x_r O_r y_r$ 之间的距离分别为 u_0, v_0 和 w_0 , 表示尾传动轴相对于直升机重心的位置参数. 根据相对坐标系 $O x_1 y_1 z_1$ 与动坐标系 $O x y z$ 之间的转换关系, 采用 3 个欧拉角描述圆盘的空间偏摆运动, 即绕 $O x_1$ 轴的转角 $\Psi(z_1, t)$, 绕 $O y_2$ 轴的转角 $\theta(z_1, t)$ 和绕 $O z$ 轴的转角 $\phi(z_1, t)$, 三者均为小量.

2 尾传动轴横向弯曲运动的坐标系与运动参数

直升机尾传动轴具有质量连续分布的特点,



可视为无限多个圆盘的组合体. 由于偏心的存在, 直升机尾传动轴绕两端支承轴颈中心连线作涡动. 所以, 对于不在尾传动轴跨中的离散圆盘, 除了有横向运动外, 还有偏摆运动. 以静变形状态下尾传动轴左端支承的轴颈中心 O 为原点, 建立与机体坐标系 $O_r x_r y_r z_r$ 平行的相对坐标系 $O x_1 y_1 z_1$, 其轴线与机体坐标系的对应轴线平行. 尾传动轴的横向弯曲运动可用坐标系 $O x_1 y_1 z_1$ 在 x_1 和 y_1 方向上的挠度分量 $u(z_1, t), v(z_1, t)$ 和转角分量 $\theta_{y1}(z_1, t), \theta_{x1}(z_1, t)$ 描述. 为描述离散圆盘的偏摆运动, 建立与圆盘固结的动坐标系 $O x y z$, 各轴线的起始位置与坐标系 $O x_1 y_1 z_1$ 的对应轴线平行. 本文的坐标系和转向的定义符合右手法则, 大拇指的指向同轴的正方向一致.

3 考虑直升机空间机动飞行时的旋转 Timoshenko 梁模型

文中假定尾传动轴做等速转动, 转速为 ω_ϕ , 则有 $\phi = \omega_\phi t$. 截取尾传动轴的微元段 dz_1 为分离体, 其受力分析如图 2 所示. 求得由平动和转动引起的动能 T_s 以及由弯矩、剪力和轴向力引起的应变能 U_s 后, 可根据 Hamilton 原理建立尾传动轴单元的运动微分方程, 即其挠度和转角应满足平衡方程

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_{x1}}{\partial z_1} - F_{a0} \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z_1^2} = F_{x1} \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{y1}}{\partial z_1} + Q_{x1} - m_{y1} = 0 \\ \rho A \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_{y1}}{\partial z_1} - F_{a0} \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z_1^2} = F_{y1} \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial t^2} + \frac{\partial M_{x1}}{\partial z_1} - Q_{y1} - m_{x1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 ρ 为尾传动轴密度, A 为尾传动轴截面面积, I 为尾传动轴截面关于中性轴的惯性矩, u_{z1}, v_{z1}

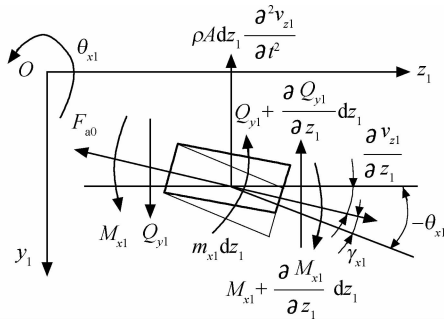


图 2 尾传动轴微段在平面 $x_1 O z_1$ 和 $y_1 O z_1$ 上的受力分析图

Fig. 2 Force analysis of tail drive shaft micro-segment in the plane $x_1 O z_1$ and $y_1 O z_1$

分别为距尾传动轴左端面 z_1 处的尾传动轴截面几何中心沿坐标轴 x_1 、 y_1 的位移, θ_{y1} 为轴在 x_1Oz_1 平面内的转角, θ_{x1} 为轴在 y_1Oz_1 平面内的转角, M_{y1} 、 Q_{x1} 为 x_1Oz_1 平面内轴微段受到的弯矩和剪力, M_{x1} 、 Q_{y1} 为 y_1Oz_1 平面内轴微段受到的弯矩和剪力, m_{y1} 和 m_{x1} 为由陀螺效应引起的分布弯矩, F_{x1} 和 F_{y1} 为偏心引起的离心力分量, F_{a0} 为作用在尾传动轴上的定常轴向力, 且有

$$\begin{cases} M_{y1}(z_1, t) = EI \frac{\partial \theta_{y1}(z_1, t)}{\partial z_1} \\ Q_{x1}(z_1, t) = \kappa' GA \left[\theta_{y1}(z_1, t) - \frac{\partial u_{z1}(z_1, t)}{\partial z_1} \right] \\ m_{y1} = 2\rho I \omega_\phi \frac{\partial \Psi(z_1, t)}{\partial t} = 2\rho I \omega_\phi \frac{\partial \theta_{x1}(z_1, t)}{\partial t} \\ M_{x1}(z_1, t) = -EI \frac{\partial \theta_{x1}(z_1, t)}{\partial z_1} \\ Q_{y1}(z_1, t) = -\kappa' GA \left[\theta_{x1}(z_1, t) + \frac{\partial v_{z1}(z_1, t)}{\partial z_1} \right] \\ m_{x1} = -2\rho I \omega_\phi \frac{\partial \theta(z_1, t)}{\partial t} = -2\rho I \omega_\phi \frac{\partial \theta_{y1}(z_1, t)}{\partial t} \\ F_{x1} = \rho A e_{z1} \omega_\phi^2 \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) \\ F_{y1} = \rho A e_{z1} \omega_\phi^2 \sin(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) \end{cases} \quad (2)$$

式中 E 、 G 分别为材料的弹性模量和剪切弹性模量, e_{z1} 、 φ_{e0} 分别为尾传动轴截面质心相对几何中心的偏心距及其初始相位角, κ' 为尾传动轴截面的剪切形状系数. 对于空心轴, κ' 的计算公式为^[19]

$$\kappa' = \frac{6(1+\nu)^2(1+a^2)^2}{(7+12\nu+4\nu^2)(1+a^2)^2+4a^2(5+6\nu+2\nu^2)} \quad (3)$$

式中 ν 为材料的泊松比, a 为轴内外半径之比.

当直升机机动飞行时, 尾传动轴位于一个非惯性系中. 根据非惯性系中质点动力学基本方程

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_{x1}}{\partial z_1} - F_{a0} \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z_1^2} + K_{vu} v_{z1} + K_u u_{z1} + C_a \frac{\partial v_{z1}}{\partial t} = F_{x1} + F_u + F_{eu} \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{y1}}{\partial z_1} + Q_{x1} - m_{y1} = M_{xa} \\ \rho A \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_{y1}}{\partial z_1} - F_{a0} \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z_1^2} + K_{uv} u_{z1} + K_v v_{z1} - C_a \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} = F_{y1} + F_v + F_{ev} \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial t^2} + \frac{\partial M_{x1}}{\partial z_1} - Q_{y1} - m_{x1} = M_{ya} \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} K_u &= -\rho A (\dot{\theta}_{yr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) & K_{vu} &= \rho A (\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} - \ddot{\theta}_{zr}) & C_a &= -2\rho A \dot{\theta}_{zr} \\ K_v &= -\rho A (\dot{\theta}_{xr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) & K_{uv} &= \rho A (\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} + \ddot{\theta}_{zr}) \end{aligned}$$

可知: 在非惯性系下按牛顿第二定律建立相对运动微分方程时, 要加上牵连惯性力 F_{le} 和科氏惯性力 F_{lc} 两个修正项^[20]. 空间非惯性系下

$$\begin{cases} F_{le} = -\rho A dz_1 [\ddot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}] \\ F_{lc} = -2\rho A dz_1 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \end{cases} \quad (4)$$

其在相对坐标系上的坐标阵为

$$\begin{cases} F_{le} = -\rho A dz_1 (\ddot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{r}_s + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_s + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{R}}) \\ F_{lc} = -2\rho A dz_1 \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{r}}_s \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} & \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_{zr} & \dot{\theta}_{yr} \\ \dot{\theta}_{zr} & 0 & -\dot{\theta}_{xr} \\ -\dot{\theta}_{yr} & \dot{\theta}_{xr} & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_{zr} & \ddot{\theta}_{yr} \\ \ddot{\theta}_{zr} & 0 & -\ddot{\theta}_{xr} \\ -\ddot{\theta}_{yr} & \ddot{\theta}_{xr} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_s &= \begin{bmatrix} u_{z1} + e_{z1} \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) + u_0 \\ v_{z1} + e_{z1} \sin(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) + v_0 \\ z_1 + w_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一般情况下, 欧拉角 Ψ 和 θ 均为小量, 当直升机正常飞行时, 可近似认为: $\Psi = \theta_{x1}$, $\theta = \theta_{y1}$; 而当直升机机动飞行时, 根据文献[5], 则有: $\Psi = \theta_{x1} + \theta_{xr}$, $\theta = \theta_{y1} + \theta_{yr}$. 所以, 直升机的转动会产生阻碍尾传动轴转动运动的惯性力矩, 其表达式为

$$\begin{cases} M_{xa} = -\rho I \ddot{\theta}_{yr} + 2\rho I \omega_\phi \dot{\theta}_{xr} \\ M_{ya} = -\rho I \ddot{\theta}_{xr} - 2\rho I \omega_\phi \dot{\theta}_{yr} \end{cases} \quad (6)$$

由式(1)~式(6)可知, 考虑直升机的空间机动飞行时, 尾传动轴的运动微分方程为

$$\begin{aligned}
F_u &= \rho A (\dot{\theta}_{zr} \dot{Y}_0 - \dot{\theta}_{yr} \dot{Z}_0 - \ddot{X}_0) - K_{vu} v_0 - K_u u_0 - \rho A (\ddot{\theta}_{yr} + \dot{\theta}_{zr} \dot{\theta}_{zr}) (z_1 + w_0) \\
F_{eu} &= -e_{z1} (K_u + \omega_\phi C_a) \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) - e_{z1} K_{vu} \sin(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) \\
F_v &= \rho A (\dot{\theta}_{xr} \dot{Z}_0 - \dot{\theta}_{zr} \dot{X}_0 - \ddot{Y}_0) - K_{vv} v_0 - K_v v_0 + \rho A (\ddot{\theta}_{xr} - \dot{\theta}_{yr} \dot{\theta}_{zr}) (z_1 + w_0) \\
F_{ev} &= -e_{z1} (K_v + \omega_\phi C_a) \sin(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) - e_{z1} K_{vv} \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0})
\end{aligned}$$

本文方法建立的模型与采用文献[4]或文献[5]基于拉格朗日方程建立的模型完全一致,验证了本文模型的正确性.文献[4]或文献[5]的方法要求首先确定尾传动轴的能量.然而,考虑直升机空间机动飞行时,尾传动轴动能的计算公式十分复杂,使得运动方程的推导过程很烦琐,且惯性系下尾传动轴的模型改变时需重新推导方程,工作量较大.相对来说,本文的建模方法无需这些烦琐的推导,只需在惯性系下尾传动轴模型的基础上加上本文得到的附加惯性力即可.另外,当惯性系下尾传动轴的模型发生改变时,公式仍可用而无需重新推导方程,具有很好的通用性.所以,本文方法可以简化建模过程,更为直接和高效,且物理意义相当明确.

对比式(1)和式(7)可知,直升机的机动飞行会对尾传动轴的横向运动产生附加刚度(K_u , K_{vu} , K_v , K_{uv})、阻尼(C_a)和外激励(F_u , F_{eu} , F_v , F_{ev}),同时对尾传动轴的转动运动作用附加惯性力矩 M_{xa} 和 M_{ya} .因此,直升机机动飞行会改变轴心涡动轨迹的大小和涡动轨迹的中心位置.

4 机动飞行对尾传动轴临界转速的影响

受直升机机动飞行时产生的附加刚度和附加阻尼效应的影响,尾传动轴的临界转速会发生改变.当附加刚度使尾传动轴的弯曲刚度提高或附加阻尼为正时,机动飞行使得尾传动轴的临界转速增大.反之,当附加刚度使尾传动轴的弯曲刚度降低或附加阻尼为负时,机动飞行使得尾传动轴的临界转速减小.根据附加刚度和附加阻尼的表达式可知,直升机机动飞行时的所有平动运动分量均不影响尾传动轴的临界转速;影响尾传动轴临界转速的直升机转动运动分量有 $\dot{\theta}_{xr}$, $\dot{\theta}_{yr}$, $\dot{\theta}_{zr}$ 和 $\ddot{\theta}_{zr}$,其他转动运动分量对尾传动轴的临界转速无影响.

令式(7)中各等式右边的各项为零,即可得到尾传动轴的自由运动微分方程.消去自由运动微分方程中的 θ_{y1} 和 θ_{x1} ,得到仅含挠度分量 u_{z1} 和 v_{z1} 的运动控制方程为

$$\begin{aligned}
& \left(\rho A + \frac{4\rho^2 I \omega_\phi \ddot{\theta}_{zr}}{\kappa' G} \right) \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} - \left[F_{a0} - \frac{\rho E I}{\kappa' G} (\dot{\theta}_{yr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) \right] \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z_1^2} + E I \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa' G A} \right) \frac{\partial^4 u_{z1}}{\partial z_1^4} + \frac{\rho^2 I}{\kappa' G} \frac{\partial^4 u_{z1}}{\partial t^4} \\
& - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa' G} + \frac{F_{a0}}{\kappa' G A} \right) \frac{\partial^4 u_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t^2} - \rho A (\dot{\theta}_{yr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) u_{z1} + \rho A (\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} - \ddot{\theta}_{zr}) v_{z1} - \frac{\rho E I}{\kappa' G} (\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} - \ddot{\theta}_{zr}) \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z_1^2} \\
& - 2\rho I \left[\omega_\phi \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa' G A} \right) - \frac{E}{\kappa' G} \dot{\theta}_{zr} \right] \frac{\partial^3 v_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t} - 2\rho A \dot{\theta}_{zr} \frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + \frac{2\rho^2 I}{\kappa' G} \omega_\phi \frac{\partial^3 v_{z1}}{\partial t^3} - \frac{2\rho^2 I \omega_\phi}{\kappa' G} \frac{\partial [(\dot{\theta}_{yr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) v_{z1}]}{\partial t} \\
& + \frac{2\rho^2 I \omega_\phi}{\kappa' G} \frac{\partial [(\ddot{\theta}_{zr} + \dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr}) u_{z1}]}{\partial t} + \frac{\rho^2 I}{\kappa' G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} - \ddot{\theta}_{zr}) v_{z1} - (\dot{\theta}_{yr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) u_{z1} - 2\dot{\theta}_{zr} \frac{\partial v_{z1}}{\partial t}] = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\rho A + \frac{4\rho^2 I \omega_\phi \ddot{\theta}_{zr}}{\kappa' G} \right) \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial t^2} - \left[F_{a0} - \frac{\rho E I}{\kappa' G} (\dot{\theta}_{xr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) \right] \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z_1^2} + E I \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa' G A} \right) \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial z_1^4} + \frac{\rho^2 I}{\kappa' G} \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial t^4} \\
& - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa' G} + \frac{F_{a0}}{\kappa' G A} \right) \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \rho A (\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} + \ddot{\theta}_{zr}) u_{z1} - \rho A (\dot{\theta}_{zr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) v_{z1} - \frac{\rho E I}{\kappa' G} (\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} + \ddot{\theta}_{zr}) \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z_1^2} \\
& + 2\rho I \left[\omega_\phi \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa' G A} \right) - \frac{E}{\kappa' G} \dot{\theta}_{zr} \right] \frac{\partial^3 u_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t} + 2\rho A \dot{\theta}_{zr} \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} - \frac{2\rho^2 I \omega_\phi}{\kappa' G} \frac{\partial^3 u_{z1}}{\partial t^3} + \frac{2\rho^2 I \omega_\phi}{\kappa' G} \frac{\partial [(\dot{\theta}_{yr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) u_{z1}]}{\partial t} \\
& - \frac{2\rho^2 I \omega_\phi}{\kappa' G} \frac{\partial [(\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} - \ddot{\theta}_{zr}) v_{z1}]}{\partial t} + \frac{\rho^2 I}{\kappa' G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\dot{\theta}_{xr} \dot{\theta}_{yr} + \ddot{\theta}_{zr}) u_{z1} - (\dot{\theta}_{xr}^2 + \dot{\theta}_{zr}^2) v_{z1} + 2\dot{\theta}_{zr} \frac{\partial u_{z1}}{\partial t}] = 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

式(8)和式(9)中,含 $\frac{\rho^2 I}{\kappa' G}$ 的项相对于其他项而言是小量(量级通常为 10^{-9} 以下),可以忽略不计.因此,可

以将式(8)和式(9)简化为

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} - \left(F_{a0} + \frac{EIK_u}{\kappa'GA} \right) \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z_1^2} + EI \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \right) \frac{\partial^4 u_{z1}}{\partial z_1^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa'G} + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \right) \frac{\partial^4 u_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t^2} \\ + K_u u_{z1} + K_{vu} v_{z1} + C_a \frac{\partial v_{z1}}{\partial t} - \left[2\rho I \omega_\phi \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \right) + \frac{EIC_a}{\kappa'GA} \right] \frac{\partial^3 v_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t} - \frac{EIK_{vu}}{\kappa'GA} \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z_1^2} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial t^2} - \left(F_{a0} + \frac{EIK_v}{\kappa'GA} \right) \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z_1^2} + EI \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \right) \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial z_1^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa'G} + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \right) \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t^2} \\ + K_v v_{z1} + K_{uv} u_{z1} - C_a \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} + \left[2\rho I \omega_\phi \left(1 + \frac{F_{a0}}{\kappa'GA} \right) + \frac{EIC_a}{\kappa'GA} \right] \frac{\partial^3 u_{z1}}{\partial z_1^2 \partial t} - \frac{EIK_{uv}}{\kappa'GA} \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z_1^2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

为分析简便,本文考虑文献[4]给出的垂直爬升飞行、垂直俯冲飞行、水平盘旋飞行和横滚飞行几种典型机动飞行对尾传动轴临界转速的影响。对于这几种机动飞行, $\dot{\theta}_{xr}$ 和 $\dot{\theta}_{yr}$ 中总有一项为零,且 $\ddot{\theta}_{xr}$ 为零。所以,式(10)和式(11)中的 K_{uv} 和 K_{vu} 均为零。对于 K_{uv} 和 K_{vu} 不为零的情况,可以采用求解尾传动轴不平衡响应的方法进行临界转速的分析,鉴于其计算工作量太大,本文不涉及。

采用分离变量法将挠度 u_{z1} 和 v_{z1} 分解为空间函数和时间函数的乘积。二者为同一轴的动挠度在两个正交投影面上的分量,共享同一个空间函数,即可设尾传动轴具有如下形式的横向固有振动

$$\begin{bmatrix} u_{z1}(z_1, t) \\ v_{z1}(z_1, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \cos \omega t \\ V \sin \omega t \end{bmatrix} W(z_1) \quad (12)$$

式中 U, V 为对应横向位移的幅值, ω 为待求的固有频率, $W(z)$ 为振型函数,根据边界条件求得。

将直升机尾传动轴简化为两端铰支的旋转轴^[15],容易获得其振型函数^[16]。则轴的频率方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{B_1 + l^2 B_2 K_u}{\kappa'GA l^4} & \frac{\omega(B_2 C_a + B_3)}{\kappa'GA l^2} \\ \frac{\omega(B_2 C_a + B_3)}{\kappa'GA l^2} & \frac{B_1 + l^2 B_2 K_v}{\kappa'GA l^4} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} B_1 &= \kappa'GA r^2 \pi^2 l^2 F_{a0} + r^4 \pi^4 EI (\kappa'GA + F_{a0}) \\ &\quad - \rho \omega^2 l^2 [(EA + F_{a0}) r^2 \pi^2 I + \kappa'GA (Al^2 + r^2 \pi^2 I)] \\ B_2 &= EIr^2 \pi^2 + \kappa'GA l^2 \\ B_3 &= 2r^2 \pi^2 \rho I \omega_\phi (\kappa'GA + F_{a0}) \end{aligned}$$

其中 r 为振型的阶数。按一定步长选定 $\omega, \omega + \Delta\omega, \omega + 2\Delta\omega, \dots$ 为试算频率,其中 $\Delta\omega$ 为频率增量,代入式(13)中,若相邻两个试算频率使得式(13)异号,则二者之间必有一个频率值使得式(13)等于 0,该频率值即为临界角速度。然后,在这两个频率

值之间采用二分法搜索,即可逐渐逼近该频率值。计算时,取 $\omega_\phi = \omega$ 或 $\omega_\phi = -\omega$ 均可。由式(13)可求得两个临界转速值,较小值对应反进动时的临界转速,较大值对应正进动时的临界转速。

取尾传动轴的参数为:内径 $d = 84 \text{ mm}$,外径 $D = 90 \text{ mm}$,长度 $l = 1.65 \text{ m}$, $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$, $E = 70 \text{ GPa}$, $G = 27 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $F_{a0} = 0 \text{ N}$ 。

尾传动轴的前 3 阶临界转速随俯仰角速度 $\dot{\theta}_{yr}$ 的变化规律如图 3~图 5 所示。直升机垂直爬升时俯仰角速度为负,垂直俯冲时其为正,其他角速度和角加速度均为零。图 3~图 5 表明,变化曲线构成的图形近似呈以俯仰角速度为零的竖轴为对称轴且开口朝下的抛物线,且临界转速阶次越高,抛物线开口越大。因此,俯仰角速度使得尾传动轴的临界转速降低,爬升或俯冲角速度越大,尾传动轴临界转速的减小幅度越大,且随着临界转速阶次的提高,俯仰角速度对尾传动轴临界转速的影响变小。第 1, 2 和 3 阶正进动临界转速的最大变化幅度($\dot{\theta}_{yr} = 200 \text{ rad/s}$ 相对于 $\dot{\theta}_{yr} = 0 \text{ rad/s}$ 时的临界转速变化)分别为 -0.32% , -0.2% 和 -0.045% ,反进动临界转速的变化幅度分别为

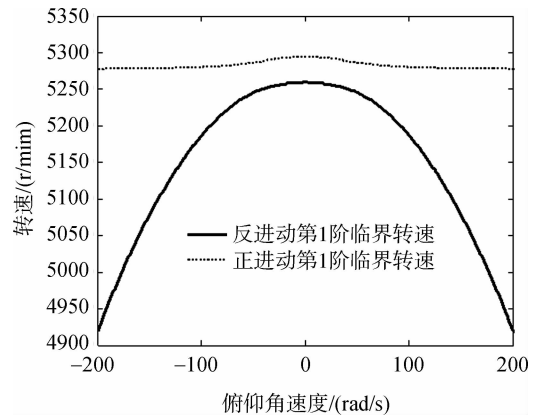


图 3 俯仰角速度对尾传动轴第 1 阶临界转速的影响

Fig. 3 Influence of pitching angular velocity on the first order critical speed of tail drive shaft

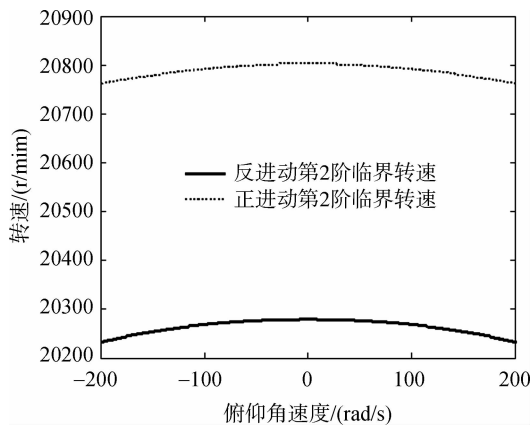


图 4 俯仰角速度对尾传动轴第 2 阶临界转速的影响

Fig. 4 Influence of pitching angular velocity on the second order critical speed of tail drive shaft

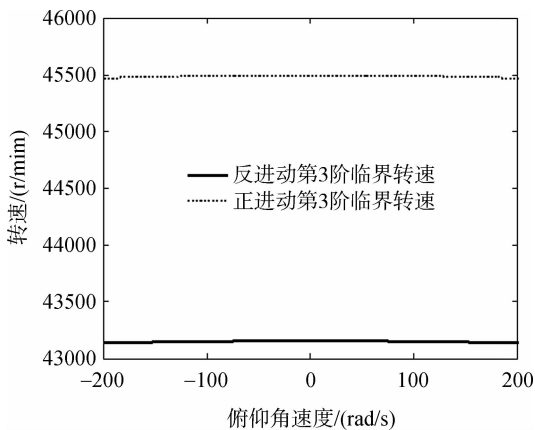


图 5 俯仰角速度对尾传动轴第 3 阶临界转速的影响

Fig. 5 Influence of pitching angular velocity on the third order critical speed of tail drive shaft

—6.45%，—0.23%和—0.05%。另外， $\dot{\theta}_{yr}$ 绝对值大于 100 rad/s 后基本不影响第 1 阶正进动临界转速。

对比俯仰角速度对正、反进动临界转速的影响可知，俯仰角速度对尾传动轴反进动第 1 阶临界转速的影响要远大于对尾传动轴正进动临界转速的影响；对于第 2 阶和第 3 阶临界转速，虽然俯仰角速度对尾传动轴反进动的影响仍然大于对正进动的影响，但二者之间的区别逐渐变小，说明临界转速阶次越高，二者之间的区别越小。值得注意的是，由图 3 可知，爬升或俯冲角速度增大，使得正、反进动临界转速之间的间隔增大，从而扩大了尾传动轴的不安全工作转速区域，设计时应予以考虑。

直升机水平盘旋时偏航角速度 $\dot{\theta}_{xr}$ 亦有正、负之分，且其余转动分量均为零，其对尾传动轴临界转速的影响规律与俯仰角速度完全相同，图略。

横滚飞行时横滚角速度 $\dot{\theta}_{xr}$ 不为零，其他转动分量均为零。横滚角速度（正向横滚为负值，反向横滚为正值）对尾传动轴临界转速的影响如图 6～图 8 所示，二者之间呈线性关系，且可表示为

$$n_{pc1} = \begin{cases} -9.59\dot{\theta}_{xr} + 5294 & -200 < \dot{\theta}_{xr} < 1.26 \\ 5283 & 1.26 \leq \dot{\theta}_{xr} \leq 2.46 \\ 9.44\dot{\theta}_{xr} + 5259.3 & 2.46 < \dot{\theta}_{xr} < 200 \end{cases} \quad (14)$$

$$n_{nc1} = \begin{cases} 9.48\dot{\theta}_{xr} + 5261 & -200 < \dot{\theta}_{xr} < 1.26 \\ 5271 & 1.26 \leq \dot{\theta}_{xr} \leq 2.46 \\ -9.57\dot{\theta}_{xr} + 5294 & 2.46 < \dot{\theta}_{xr} < 200 \end{cases} \quad (15)$$

$$n_{pc2} = \begin{cases} -9.68\dot{\theta}_{xr} + 20802.92 & -200 < \dot{\theta}_{xr} < 27.41 \\ 20542.01 & 27.41 \leq \dot{\theta}_{xr} \leq 28.13 \\ 9.17\dot{\theta}_{xr} + 20280.49 & 28.13 < \dot{\theta}_{xr} < 200 \end{cases} \quad (16)$$

$$n_{nc2} = \begin{cases} 9.22\dot{\theta}_{xr} + 20280.91 & -200 < \dot{\theta}_{xr} < 27.41 \\ 20527.16 & 27.41 \leq \dot{\theta}_{xr} \leq 28.13 \\ -9.67\dot{\theta}_{xr} + 20803.05 & 28.13 < \dot{\theta}_{xr} < 200 \end{cases} \quad (17)$$

$$n_{pc3} = \begin{cases} -9.68\dot{\theta}_{xr} + 20802.92 & -200 < \dot{\theta}_{xr} < 124.5 \\ 44270.59 & 124.5 \leq \dot{\theta}_{xr} \leq 126.5 \\ 9.17\dot{\theta}_{xr} + 20280.49, & 126.5 < \dot{\theta}_{xr} < 200 \end{cases} \quad (18)$$

$$n_{nc3} = \begin{cases} 9.22\dot{\theta}_{xr} + 20280.91 & -200 < \dot{\theta}_{xr} < 124.5 \\ 44252.49 & 124.5 \leq \dot{\theta}_{xr} \leq 126.5 \\ -9.67\dot{\theta}_{xr} + 20803.05 & 126.5 < \dot{\theta}_{xr} < 200 \end{cases} \quad (19)$$

式中 n_{pci} 和 n_{nci} ($i=1,2,3$) 分别表示尾传动轴的正进动和反进动临界转速。

对于第 1 阶临界转速，其变化曲线构成的图形以横滚角速度约为 1.86 rad/s 的竖轴（在此位

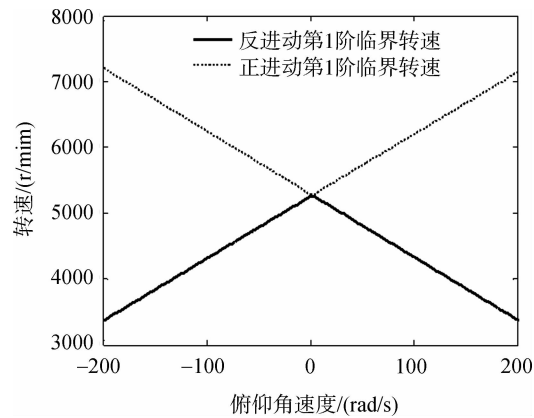


图 6 横滚角速度对尾传动轴第 1 阶临界转速的影响
Fig. 6 Influence of rolling angular velocity on the first order critical speed of tail drive shaft

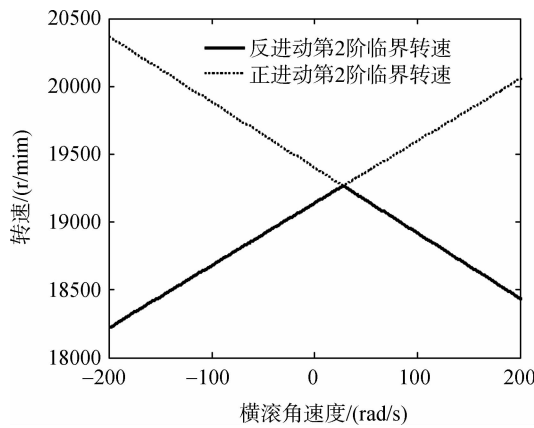


图 7 横滚角速度对尾传动轴第 2 阶临界转速的影响
Fig. 7 Influence of rolling angular velocity on the second order critical speed of tail drive shaft

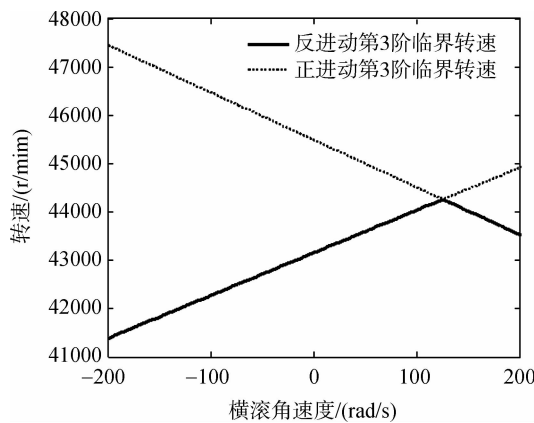


图 8 横滚角速度对尾传动轴第 3 阶临界转速的影响
Fig. 8 Influence of rolling angular velocity on the third order critical speed of tail drive shaft

置,正、反进动临界转速值非常接近)为分界线,左、右边对称;正向横滚角速度和大于 2.46 rad/s 的反向横滚角速度使得尾传动轴的正进动临界转速提高,而使得反进动临界转速降低,且横滚角速度越大,尾传动轴临界转速的变化幅度越大,斜率约为 9.5;而小于 1.26 rad/s 的反向横滚角速度使尾传动轴的正进动临界转速降低且使得反进动临界转速提高;在 1.26~2.46 rad/s 的角速度范围内,反向横滚对尾传动轴的临界转速不产生影响。

第 2 阶临界转速的情况与第 1 阶临界转速类似,其分界线为横滚角速度约等于 27.77 rad/s 的竖轴;不影响尾传动轴临界转速的反向横滚角速度范围为 27.41~28.13 rad/s;0~27.41 rad/s 范围内的反向横滚角速度使尾传动轴的正进动临界转速降低而使得反进动临界转速提高;正向横滚角速度以及大于 28.13 rad/s 的反向横滚角速度提高了尾传动轴的正进动临界转速,而降低了反进动临界转速。

第 3 阶临界转速的分界线为横滚角速度约等于 125.5 rad/s 的竖轴;不影响尾传动轴临界转速的反向横滚角速度范围为 124.5~126.5 rad/s;其他情况与第 1,2 阶临界转速类似。

综上所述,尾传动轴的临界转速随着横滚角速度变化的曲线为一折线且具有对称性;随着临界转速阶次的提高,折线的对称线向右偏移.对比横滚角速度对正、反进动临界转速的影响可知,横滚角速度对二者的影响相同,两条变化曲线构成轴对称图形.值得注意的是,与俯仰角速度对尾传动轴临界转速的影响规律不同,横滚角速度对尾传动轴临界转速的影响不会随着临界转速阶次的提高而减小,所以,对于任意阶次临界转速,横滚角速度都会使得正、反进动临界转速之间的间隔变大。

5 结 论

1) 将直升机空间机动飞行对尾传动轴的作用表征为影响尾传动轴平动运动的牵连惯性力和科氏惯性力和影响尾传动轴转动运动的非惯性力矩,推导了直升机空间机动飞行时三者的计算公式,建立了考虑直升机空间机动飞行的旋转 Timoshenko 梁模型,简化了建模过程,为非惯性系下尾传动轴的动力学建模提供了方法和参考。

2) 直升机机动飞行时的所有平动运动分量对尾传动轴的临界转速均没有影响,而影响尾传

动轴临界转速的直升机转动运动分量仅有俯仰角速度、偏航角速度、横滚角速度和角加速度 4 项。

3) 分析了俯仰角速度、偏航角速度和横滚角速度对尾传动轴前 3 阶临界转速的影响,得到了尾传动轴临界转速随其变化的规律,结果表明:横滚角速度对尾传动轴前 3 阶临界转速的影响均很大,二者之间呈线性关系;俯仰角速度和偏航角速度仅对反进动第 1 阶临界转速有较大影响,二者之间呈抛物线关系。

参考文献:

- [1] Lopez C A, Wells V L. Dynamics and stability of an auto-rotating rotor/wing unmanned aircraft [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(2): 258-270.
- [2] Ananthan S, Leishman J G. Transient helicopter rotor wakes in response to time-dependent blade pitch inputs [J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(5): 1025-1041.
- [3] Ananthan S, Leishman J G. Rotor wake aerodynamics in large amplitude maneuvering flight [J]. Journal of the American Helicopter Society, 2006, 51(3): 225-243.
- [4] 祝长生, 陈拥军. 机动飞行时航空发动机转子系统的振动特性[J]. 航空学报, 2006, 27(5): 825-841.
ZHU Changsheng, CHEN Yongjun. Vibration characteristics of aeroengine's rotor system during maneuvering flight [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(5): 825-841. (in Chinese)
- [5] 祝长生, 陈拥军. 机动飞行时发动机转子系统动力学统一模型[J]. 航空动力学报, 2009, 24(2): 371-377.
ZHU Changsheng, CHEN Yongjun. General dynamic model of aeroengine's rotor system during maneuvering flight [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(2): 371-377. (in Chinese)
- [6] 林富生, 孟光. 飞行器机动飞行时发动机转子等变速运动的动力学特性研究[J]. 航空学报, 2002, 23(4): 356-359.
LIN Fusheng, MENG Guang. Dynamics of a maneuvering rotor in constant acceleration and deceleration [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2002, 23(4): 356-359. (in Chinese)
- [7] LIN Fusheng, MENG Guang. Study on the dynamics of a rotor in a maneuvering aircraft [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2003, 125(2): 324-327.
- [8] 林富生, 孟光. 飞行器内 SFD-转子系统的动力学特性研究[J]. 振动工程学报, 2004, 17(4): 403-407.
LIN Fusheng, MENG Guang. Study on the dynamic characteristics of SFD-rotor system in aircrafts [J]. Journal of Vibration Engineering, 2004, 17(4): 403-407. (in Chinese)
- [9] 林富生, 孟光. 飞行器内碰摩转子模型的光滑处理及非线性研究[J]. 振动工程学报, 2004, 17(2): 184-188.
LIN Fusheng, MENG Guang. Study on the nonlinear characteristics of a maneuvering rotor system with smoothly

treated step impact-rubbing forces [J]. Journal of Vibration Engineering, 2004, 17(2): 184-188. (in Chinese)

- [10] 徐敏, 廖明夫, 刘启洲. 机动飞行条件下双盘悬臂转子的振动特性[J]. 航空动力学报, 2002, 17(1): 105-109.
XU Min, LIAO Mingfu, LIU Qizhou. The vibration performance of the double-disk cantilever rotor in flight mission [J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(1): 105-109. (in Chinese)
- [11] 徐敏, 廖明夫. 机动飞行条件下带挤压油膜阻尼器的 Jeffcott 转子系统的振动特性[J]. 航空动力学报, 2003, 18(3): 394-401.
XU Min, LIAO Mingfu. The vibration performance of the Jeffcott rotor system with SFD in maneuver flight [J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(3): 394-401. (in Chinese)
- [12] 顾致平, 于渊博. 飞机水平盘旋下弹性支承转子的特性研究[J]. 西安工业大学学报, 2008, 28(6): 589-593.
GU Zhiping, YU Yuanbo. Investigation of rotor characteristics with elastic support in aircraft of horizontal circling [J]. Journal of Xi'an Technological University, 2008, 28(6): 589-593. (in Chinese)
- [13] 杨永锋, 任兴民, 秦卫阳. 俯冲拉起下裂纹转子的非线性 [J]. 振动与冲击, 2007, 26(4): 21-24.
YANG Yongfeng, REN Xingmin, QIN Weiyang. Nonlinear response analysis of a cracked jeffcott rotor in action of dive-hike [J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(4): 21-24. (in Chinese)
- [14] 杨永锋, 任兴民, 秦卫阳. 水平盘旋下裂纹转子的非线性响应 [J]. 航空动力学报, 2007, 22(6): 1007-1012.
YANG Yongfeng, REN Xingmin, QIN Weiyang. Study of nonlinear response of cracked Jeffcott rotor in hovering state [J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(6): 1007-1012. (in Chinese)
- [15] 许兆棠. 多支点传动轴动力学的研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006.
XU Zhaotang. Research on dynamics of a drive shaft with multi-supports [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2006. (in Chinese)
- [16] Rao S S. Mechanical Vibrations [M]. Fourth Edition. New Jersey: Pearson Education Inc, 2004: 249-253.
- [17] 张文. 转子动力学理论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [18] Han S M, Benaroya H, Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 225(5): 935-988.
- [19] Hutchinson J R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory [J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(1): 87-92.
- [20] 惠旭升, 蔡安江, 张小龙. 转子在非惯性系中的动力学建模 [J]. 机械设计, 2009, 26(7): 35-37.
HUI Xusheng, CAI Anjiang, ZHANG Xiaolong. Dynamic modeling of rotor in non-inertia system [J]. Journal of Machine Design, 2009, 26(7): 35-37. (in Chinese)