

基于能量法的薄直齿轮自激振动预测

杨 琰^{1,2}, 王延荣^{1,2}

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;
2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191)

摘 要: 航空发动机中的齿轮常因振动而发生疲劳失效,分析其振动成因是必要且急需的. 基于能量法,对薄直齿轮的自激振动进行了研究,提出了一种可用于预测薄直齿轮发生横向自激振动的理论方法,推导了自激力和阻尼力对齿轮振动做功的表达式,通过分析系统能量的变化,理论上确认了薄直齿轮发生自激振动的可能性,并给出了发生自激振动时的条件及载荷. 通过数值模拟,分析了重合度、节径数和阻尼比对齿轮自激振动稳定性的影响. 结果表明:从动齿轮后行波和主动齿轮前行波在阻尼不足时会发生自激振动而失稳,在相同条件下,低节径振型更容易发生自激振动.

关 键 词: 直齿轮; 自激振动; 稳定性; 能量法; 预测方法

中图分类号: V232.8 **文献标志码:** A

Prediction on self-excited vibration of thin spur gear
based on energy method

YANG Long^{1,2}, WANG Yan-rong^{1,2}

(1. School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China)

Abstract: The fatigue failures caused by the vibration often happen in the gears of the aero-engines, so it is urgently necessary to analyze the cause of the vibration. The self-excited vibration of the thin spur gear was studied based on the energy method and a theoretical method used to predict the self-excited vibration was proposed. The expressions of the excitation work and damping work to the travelling wave vibration of the gear were derived. By analyzing the change of the system energy, the likelihood of the occurrence of the self-excited vibration for the thin spur gear was verified in theory, while the condition and gear load in occurrence of the self-excited vibration were also determined. Through the numerical simulation, the influences of the contact ratio, nodal diameter and damping ratio on the stability of the self-excited vibration were studied. Results show that the self-excited vibration will occur in the backward travelling wave of the driven gear and the forward travelling wave of the driving gear in the underdamped situation. For the same conditions, the self-excited vibration is more easily to occur in low nodal diameters vibration mode.

Key words: spur gear; self-excited vibration; stability; energy method; prediction method

齿轮是机械中常用和重要的传动件之一,齿轮传动可以满足复杂的空间环境要求,具有传动平稳、传递速度及功率范围大、使用寿命相对较长等特点^[1],因而为航空发动机等复杂机械所采用.特别是在航空工业中,为了满足其特殊的工作要求,一些航空用齿轮被设计得相当薄,同时其特殊的工作环境及使用要求也使得齿轮的转速越来越高,且具有负荷大、质量轻等特点^[2-3],导致齿轮的刚度相对较小,从而引起齿轮振动问题相对突出.此外,由于其横向弯曲振动固有频率较低,加上受到高速旋转和啮合力的影响,其激励力频率往往较高,因而很容易出现行波振动^[4].齿轮的失效形式不仅是轮齿的损坏,还很容易出现因振动过大而引起的疲劳裂纹或齿轮断块^[5],因而非常有必要对此类薄齿轮的横向振动进行分析.

在对齿轮进行横向振动分析时,常根据齿轮的特点,将其简化为不同厚度的环形圆板或圆柱壳^[6],应用不同的板壳理论进行分析,包括经典薄板理论、厚板剪切变形理论、三维弹性理论等^[7].平板的横向振动研究可以追溯到 19 世纪,Leissa^[8]和 Nevzat Özgüven, Houser^[9]分别对平板和齿轮的振动问题进行了详细的总结,促进了后续的研究工作. Sinha 研究了轮缘分布质量^[10]和加强环^[11]对旋转圆盘自由振动的影响,而 Cote 等人^[12]和 Suzuki 等人^[13]则分别研究了剪切变形和旋转惯性效应以及初始拉伸应力对旋转圆盘横向振动的影响.此外,Chen 等人^[14]通过理论推导,分析了 Sandwich 结构各向异性旋转圆盘的振动特性及稳定性.

近年来,随着有限元法和计算机技术的发展,以及实验测试技术的大幅提升,越来越多的研究人员开始采用有限元分析和实验测试等方法对齿轮的振动进行研究,但绝大部分的研究工作仍然局限于对齿轮固有振动特性的研究,包括齿轮的共振^[15]、模态识别^[16]、辐板厚度对固有频率的影响^[17]等.然而,高速旋转的航空齿轮,由于啮合频率很高,因而很容易发生行波振动.

最早在旋转圆盘的研究中考虑了行波振动,随后并进行了广泛的研究^[18-21],为行波振动理论的建立奠定了重要基础.在齿轮横向振动领域,齿轮行波振动研究主要开展了行波共振、数值模拟等工作^[2,4,22-23].但通过对近年几起航空齿轮断裂故障的分析可以发现,除了齿轮共振外,还可能存在其他因素引起齿轮的断裂,而行波自激振动就是其中之一.然而,目前对齿轮行波自激振动的研

究很少,本文的研究正是基于这种实际工程需求而进行的.

本文从理论上分析了齿轮发生行波自激振动的机理,并基于能量法确定了齿轮发生自激振动的条件,实现了对齿轮自激振动的理论预测.

1 理论分析

1.1 齿轮自激振动的原理

根据自激振动理论^[24],自激振动系统内部必须要有能量补充机制,并且能够根据系统状态的变化形成“反馈”信号.

对于啮合的齿轮系统,支承变形、安装误差等均会造成齿轮倾斜,进而引起齿轮发生横向振动,而该振动又会引起齿轮啮合力产生附加的轴向分量,并通过对齿轮横向振动做功为系统提供能量补充机制.另一方面,当系统横向振动状态发生改变时,附加轴向力也会随之发生改变,同时又会进一步通过做功影响齿轮的横向振动状态,从而形成反馈机制.旋转齿轮自激振动的原理可用图 1 所示的框图表示.

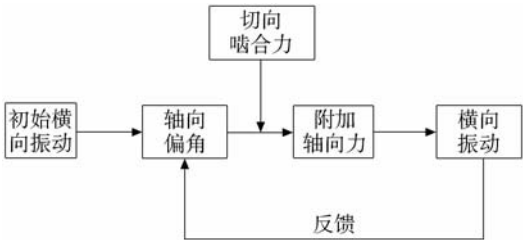


图 1 齿轮自激振动原理框图

Fig. 1 Block diagram of the mechanism for self-excited vibration of gears

本文所提出的能量法是通过分析自激励和阻尼力对齿轮行波振动所做的功,进而确定齿轮系统的振动能量变化,从而实现对齿轮自激振动的预测.

1.2 齿轮振动的自激励

旋转齿轮在外力作用下会发生行波振动,其横向振动位移表达式在与齿轮同速旋转的动坐标系中可表示为^[8]

$$w(r, \theta, t) = A(r) \cos(m\theta) \cdot \cos(\omega t) = \frac{1}{2} A(r) [\cos(m\theta - \omega t) + \cos(m\theta + \omega t)] \quad (1)$$

式中作三角分解后的等号右端第 1 项称为前行波,第 2 项称为后行波; $A(r)$ 是半径 r 处的中面振动幅值,仅为 r 的函数; $A(r) \cos m\theta$ 表征齿轮辐板

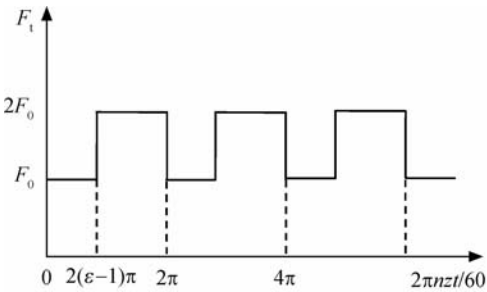
的整体振型, m 为节径数, θ 为周向位置角; $\cos \omega t$ 表征齿轮的横向振动为简谐振动, 且振动圆频率为 ω 。

根据齿轮的工作原理, 重合度为 ϵ ($1 < \epsilon < 2$) 的齿轮啮合, 一个啮合周期包含单齿啮合和双齿啮合两个阶段, 载荷也分别由一对轮齿和两对轮齿承担。虽然双齿啮合时两齿的载荷并不相等, 但为了简化分析, 此处假设两者相等。最终理论推导的结果也表明, 该假设并不影响最终结论。若传递的扭矩为 T_0 , 并以节圆直径 d_0 代替啮合点处的直径, 则每个轮齿在一个啮合周期中的名义啮合力(直接参与载荷传递的力)可近似表示为

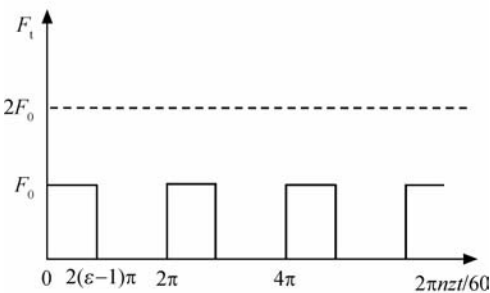
$$F_t(t) = \begin{cases} 2T_0/d_0 & \text{单齿啮合} \\ T_0/d_0 & \text{双齿啮合} \end{cases} \quad (2)$$

齿轮啮合时, 单齿啮合与双齿啮合过程是不断交互转化的, 而且在动坐标系下, 齿轮啮合点的位置也是沿着齿轮反向旋转的, 因而对整个齿轮而言, 名义啮合力是与时间有关的。取某轮齿上的啮合点为啮合点 1, 其相邻轮齿上进入双齿啮合区的啮合点为啮合点 2(如后图 4 所示), 令 $F_0 = T_0/d_0$, 经过坐标变换 $t' = 2\pi nzt/60$ 后, 啮合点 1 和啮合点 2 处的名义啮合力表达形式分别如图 2(a) 和图 2(b) 所示, 其中 n 和 z 分别为齿轮的转速(r/min)和齿数。

由前文分析可知, 附加轴向力与轮缘的横向



(a) 啮合点1处



(b) 啮合点2处

图 2 名义啮合力表达形式

Fig. 2 Expressions of the nominal mesh forces

振动变形有关。对于节径型振动, 若将轮缘的横向振动位移沿周向展开, 则轴向变形可近似看作余弦函数。图 3 是横向振动引起的自激力示意图, 其中的实线是从动齿轮轮缘振动变形沿周向展开后的结果, β 为横向振动引起的啮合力与轴向的夹角, $F_t(t)$ 为名义啮合力, $F_x(t)$ 为横向振动引起的自激力, $F'_t(t)$ 为主动齿轮的名义啮合力, 数值上与 $F_t(t)$ 相等, 方向相反。

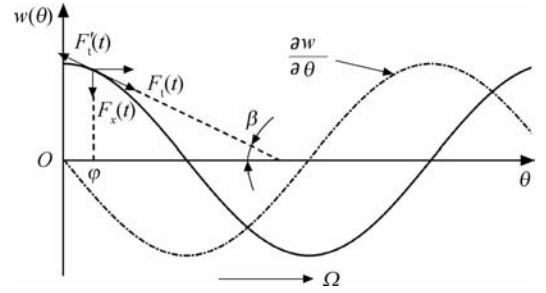


图 3 附加轴向力示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the additional axial force

若啮合点的周向位置为 φ , 将其代入到式(1)中, 因轮缘的振动可视为小幅振动, 通过求解该点的切线方程与坐标轴的交点, 即可得到

$$\sin \beta \approx \tan \beta = A_0 m \sin(m\theta) \cos(\omega t) \quad (3)$$

式中 A_0 为轮缘处的最大横向振动位移。取与 $w(\theta)$ 相同方向为正, 则齿轮的自激力可表示为

$$F_x(t) = F_t(t) \cdot (-A_0 m \sin m\theta \cos \omega t) = F_t(t) \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (4)$$

对于主动齿轮, 由于横向振动位移及名义啮合力的数值均与从动齿轮相同, 只有名义啮合力的方向与从动齿轮相反。因而, 主动齿轮自激力的大小与从动齿轮相同, 方向相反, 即

$$F'_x(t) = -F_t(t) \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (5)$$

1.3 自激力对齿轮振动的做功分析

自激力对齿轮横向振动所做的功 W_f 可表示为附加轴向力与啮合点速度乘积对时间的积分, 因而一个振动周期 T 内自激力所做的功可表示为

$$W_f = \int_0^T F_t(t) \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \cdot dt \quad (6)$$

需要注意的是, 在动坐标系中, 齿轮啮合点的位置是相对于齿轮反向旋转的, 若齿轮的转动角速度为 Ω , 则啮合点的周向位置角 θ (初始位置 $\theta=0$) 与时间 t 的关系为

$$\theta = -\Omega t \quad (7)$$

此外,由于两个啮合点不在同一个轮齿上,因而两个啮合点处的振动位移表达式不同,啮合点 2 要超前啮合点 1 相位角 ϕ ,如图 4 所示。

实际工作中,相位差 ϕ 随时间变化,为简化分析,假设该相位差 ϕ 为常值,即 $\phi = 1.5\beta' = 3\pi/2z$,其中 β' 为一个轮齿所对的中心角。以从动齿轮后行波为例进行分析,齿轮振动周期 $T = 2\pi/\omega$,引入如下自定义函数

$$T_c = 60/nz \tag{8}$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$\delta'(k) = \begin{cases} 0 & k = 1 \\ 1 & k = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \tag{9}$$

则自激力对从动齿轮后行波在一个振动周期内所做的功可表示为

若 $(k-1)T_c < T < (k+\epsilon-2)T_c$, 则

$$\begin{aligned} W_{\text{cbf}} = & \delta(k) \left[\text{Int}(0, T, 0) + \text{Int}\left(0, T, \frac{3\pi}{2z}\right) \right] + \delta'(k) \left\{ \text{Int}[(k-1)T_c, T, 0] + \right. \\ & \text{Int}\left[(k-1)T_c, T, \frac{3\pi}{2z}\right] + \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \text{Int}[(i-1)T_c, (i+\epsilon-2)T_c, 0] + \right. \\ & \left. 2\text{Int}[(i+\epsilon-2)T_c, iT_c, 0] + \text{Int}\left[(i-1)T_c, (i+\epsilon-2)T_c, \frac{3\pi}{2z}\right] \right\rangle \left. \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

若 $(k+\epsilon-2)T_c < T < kT_c$ 则

$$\begin{aligned} W_{\text{cbf}} = & \delta(k) \left\langle \text{Int}[0, (\epsilon-1)T_c, 0] + \text{Int}\left[0, (\epsilon-1)T_c, \frac{3\pi}{2z}\right] + 2\text{Int}[(\epsilon-1)T_c, T, 0] \right\rangle + \\ & \delta'(k) \left\{ 2\text{Int}[(k+\epsilon-2)T_c, T, 0] + \sum_{i=1}^k \left\langle \text{Int}[(i-1)T_c, (i+\epsilon-2)T_c, 0] + \right. \right. \\ & \left. \left. \text{Int}\left[(i-1)T_c, (i+\epsilon-2)T_c, \frac{3\pi}{2z}\right] \right\rangle + 2 \sum_i^{k-1} \text{Int}[(i+\epsilon-2)T_c, iT_c, 0] \right\} \end{aligned} \tag{11}$$

其中 k 为满足 $(k-1)T_c < T < (k+\epsilon-2)T_c$ 或 $(k+\epsilon-2)T_c < T < kT_c$ 的最大正整数,且自定义函数 $\text{Int}(a, b, \phi)$ 表达式为

$$\text{Int}(a, b, \phi) = \int_a^b \frac{1}{4} F_0 A_0^2 m (\omega - m\Omega) \sin^2[(\omega - m\Omega)t + m\phi] dt \tag{12}$$

其中 a, b, ϕ 均为输入参数。此外,对于从动齿轮前行波的分析,只需将(12)式替换为下式即可。

$$\text{Int}(a, b, \phi) = \int_a^b -\frac{1}{4} F_0 A_0^2 m (\omega + m\Omega) \sin^2[(\omega + m\Omega)t - m\phi] dt$$

对于主动齿轮,自激力对前、后行波振动做的功 $W_{\text{zff}}, W_{\text{zbf}}$ 与自激力对从动齿轮做的功 $W_{\text{cff}}, W_{\text{cbf}}$ 存在如下关系:

$$W_{\text{zff}} = -W_{\text{cff}} \quad W_{\text{zbf}} = -W_{\text{cbf}} \tag{13}$$

1.4 阻尼力对齿轮振动的做功分析

对于工作中的齿轮,其阻尼效应很复杂,影响因素也很多,因而在工程应用中,阻尼效应常常用等效阻尼比来表示。从做功本质上看,阻尼功实际上就是阻尼在一段时间内损耗的振动能量,因而

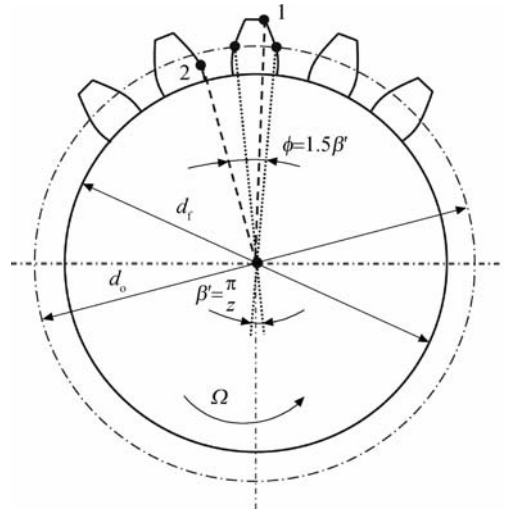


图 4 啮合点 1 和啮合点 2 相位差示意图
Fig. 4 Diagram of the phase between the mesh point 1 and mesh point 2

阻尼力对齿轮横向振动所做的功可以根据工程上常用的损耗因子 η 计算得到,其定义为^[25]

$$\eta = \frac{\Delta U}{2\pi U_{\text{max}}} \tag{14}$$

其中 ΔU 为一个阻尼周期(振动周期)内所损耗的能量,也就是阻尼力在一个振动周期内所做的功。 U_{max} 是系统初始时刻的能量,在小阻尼时,可近似等于系统初始时刻的最大动能 T_{max} 。

任意时刻,齿轮前、后行波的最振动大速度分别为

$$\left(\frac{\partial w_f}{\partial t}\right)_{\max} = \frac{1}{2}A(r)\omega \sin m\theta \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial w_b}{\partial t}\right)_{\max} = -\frac{1}{2}A(r)\omega \sin m\theta \tag{16}$$

其中 $A(r)=A_0R(r)$, $R(r)$ 是对轮缘最大振动位移进行归一化后的径向变形函数, 可以通过有限元模态分析, 提取从轮毂到轮缘最大变形处的轴向变形获得.

由式(15)和式(16)可知, 齿轮前、后行波的最大振动动能相等, 均为

$$T_{\max} = \frac{\rho h \pi \omega^2}{8} A_0^2 \int_{r_1}^{r_2} R^2(r) r dr \tag{17}$$

其中 r_1 和 r_2 分别为齿轮的轮毂和轮缘半径.

当阻尼较小时, 损耗因子 η 与等效的临界阻尼比 ζ 存在如下关系^[25]:

$$\eta = 2\zeta \tag{18}$$

将式(17)和式(18)代入到式(14)中, 即可得到阻尼力在一个振动周期内对齿轮前、后行波所做的功 W_c , 即

$$W_c = \frac{\rho h \zeta \pi^2 \omega^2}{2} A_0^2 \int_{r_1}^{r_2} R^2(r) r dr \tag{19}$$

式中的 $\int_{r_1}^{r_2} R^2(r) r dr$ 对于不同节径型振动, 其数值是不同的, 但可以利用有限元模态分析的结果进行数值积分求得, 即

$$\int_{r_1}^{r_2} R^2(r) r dr = \sum_{i=2}^l \frac{1}{2} (R_i^2 r_i - R_{i-1}^2 r_{i-1}) \cdot (r_i - r_{i-1}) \tag{20}$$

其中 l 为数值积分点的个数, r_i 为第 i 点处的半径值, R_i 为第 i 点处的归一化变形值.

1.5 齿轮自激振动的理论预测

从能量的角度看, 当自激力对齿轮行波振动所做的功为正, 且大于阻尼力所做的功时, 系统的振动能量会随着时间的推移而不断增加, 即系统存在能量补充机制. 同时, 自激力与横向振动位移之间的相互作用, 又构成了系统的反馈机制. 因此, 齿轮系统发生自激振动的条件为

$$W_f > W_c \tag{21}$$

根据自激力做功和阻尼力做功的具体表达式, 在给定齿轮模型和材料参数, 以及工作中的阻尼比后, 可以根据下式求得齿轮在发生自激振动时轮齿所承受的名义啮合力的临界幅值.

$$W_f = W_c \tag{22}$$

然而, 在实际工程应用中, 常用系统所传递的

功率来表征齿轮载荷传递的能力. 所以, 当根据式(22)确定了齿轮发生自激振动时的临界啮合力幅值后, 就可以根据传递功率的定义来确定齿轮发生自激振动时的临界传递功率, 即

$$P_0 = \frac{T_0 n}{9550} \tag{23}$$

从传递功率的角度看, 如果齿轮系统的实际传递功率 P 大于发生自激振动时的临界传递功率 P_0 , 那么齿轮就会发生横向自激振动, 系统也会因振动的不断放大而发生失稳, 进而造成齿轮因振动应力过大而发生疲劳破坏.

2 数值模拟分析

2.1 齿轮的数值分析模型

本文数值模拟针对一薄直齿轮进行, 齿轮齿数 $z=50$, 材料密度为 $7\,850\text{ kg/m}^3$, 弹性模量为 212 GPa , 泊松比为 0.284 . 齿轮模型参数及有限元模型分别如图 5 和图 6 所示.

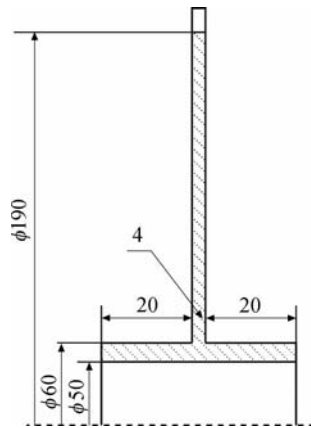


图 5 齿轮模型参数(单位:mm)

Fig. 5 Parameters of the gear model (unit:mm)

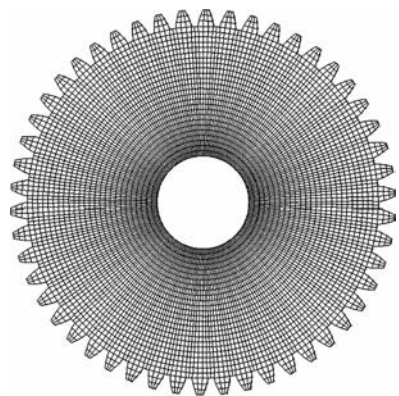


图 6 齿轮有限元模型

Fig. 6 Finite element model of the gear

2.2 数值模拟结果

以从动齿轮为例进行分析,图 7(a)和图 7(b)分别是不同重合度下,自激力对齿轮 2 节径前、后行波振动在一个周期内所做的功(图中纵坐标为自激力所做的功 W_f 与参数 $F_0 A_0^2$ 的比值)。

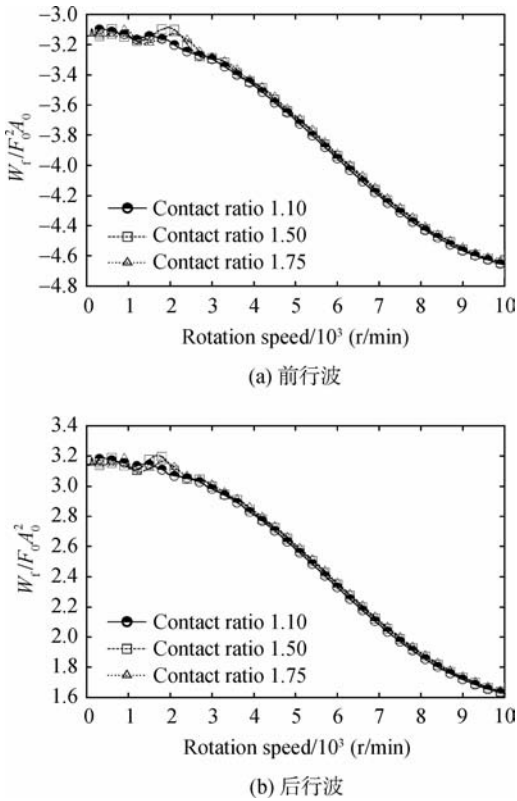


图 7 自激力对 2 节径振动做的功

Fig. 7 Work done by the self-excitation force on 2 nodal diameters

数值模拟中为确定不同参数对齿轮自激振动的影响,分别选取了重合度为 1.10,1.50,1.75,节径数为 2,3,4 和阻尼比为 0.1%,0.5%,1.0% 的不同参数进行了分析. 齿轮最大转速为 10 000 r/min,对多个不同转速进行了数值模拟,从而获得了临界啮合力和传递功率随转速的变化曲线,便于进行后续的稳定性的分析。

从图 7 中可以看出,自激力对从动齿轮前行波做负功,对后行波做正功. 也就是说,对于从动齿轮前行波振动,自激力在消耗能量,是一种阻尼效应,因而从动齿轮前行波振动会随着时间的推移而不断衰减,所以不会发生自激振动;而对于从动齿轮后行波振动,由于自激力做正功,因而会促进齿轮的后行波振动,且当阻尼的耗能不足以抵消自激力所做的功时,系统的振动能量就会随着时间的推移而不断增加,从而发生自激振动. 由于

自激力对主动齿轮前、后行波所做的功与从动齿轮相反,因而主动齿轮的前行波振动会发生自激振动。

此外,从图 7 中还可以看到,总体来说重合度对齿轮自激力做功的影响较小. 同时,对于其他节径型振动,也存在相似结论,此处不再重复。

图 8 和图 9 分别是重合度为 1.75、阻尼比为 0.5%、齿轮发生自激振动时,不同节径振型的临界啮合力和传递功率数值. 图中每条曲线都将图形划分为两个区域:即曲线上方(或左上方)为非稳定区和曲线下(或右下方)为稳定区. 由图中可以看出,高节径振型的稳定区要明显大于低节径振型的稳定区,因而对于齿轮的横向振动而言,在其它条件相同时,低节径振型更容易发生自激振动而失稳。

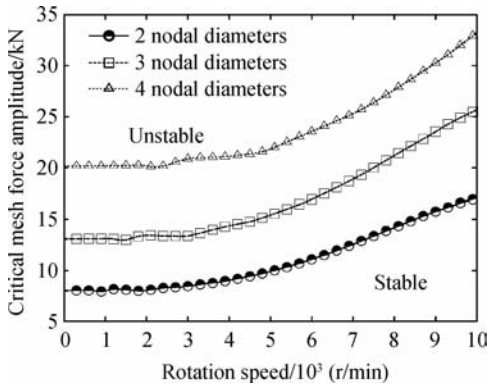


图 8 不同节径数振动的临界啮合力($\epsilon=1.75, \zeta=0.5\%$)

Fig. 8 Critical mesh force for the vibrations with different nodal diameters ($\epsilon=1.75, \zeta=0.5\%$)

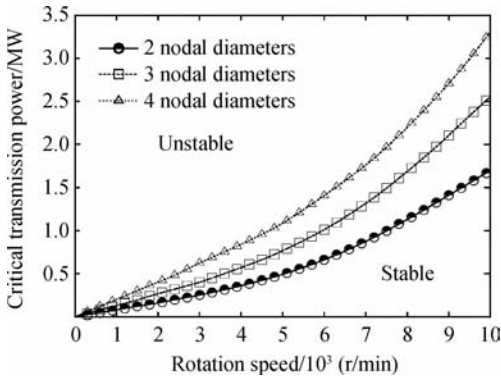


图 9 不同节径数振动的临界传递功率($\epsilon=1.75, \zeta=0.5\%$)

Fig. 9 Critical transmission power for the vibrations with different nodal diameters ($\epsilon=1.75, \zeta=0.5\%$)

图 10 和图 11 分别为不同阻尼比、重合度为 1.75 时,3 节径振动的临界啮合力和传递功率数值。从图中可以看到,不论是临界啮合力幅值还是临界传递功率,随着阻尼比的升高,其数值均随之成比例增大,与式(19)的理论结果一致。因此,在齿轮结构设计无法改变的情况下,增大阻尼比是提高齿轮自激振动稳定性的有效方法之一。

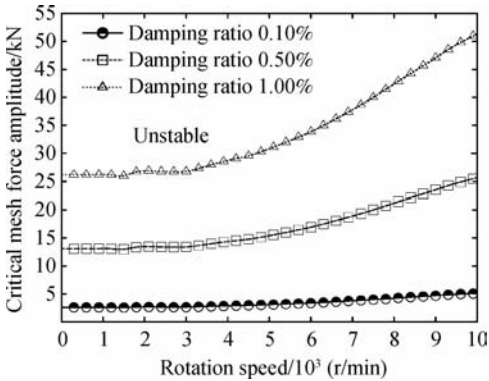


图 10 不同阻尼比时 3 节径振动的临界啮合力
Fig. 10 Critical mesh force for the 3 nodal diameter vibration with different damping ratios

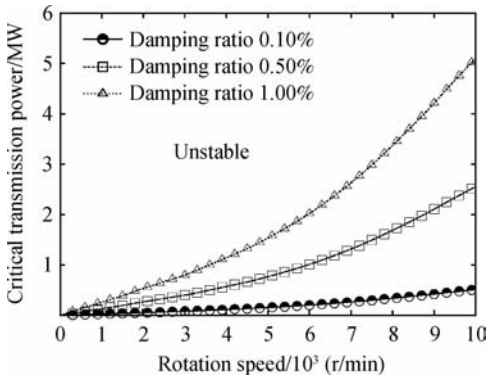


图 11 不同阻尼比时 3 节径振动的临界传递功率
Fig. 11 Critical transmission power for the 3 nodal diameter vibration with different damping ratios

由前文的分析可知,主动齿轮的数值模拟结果应与从动齿轮结果类似,只是主动齿轮前、后行波的相关结论与从动齿轮相反,本文这里将不再重复。

3 结 论

本文基于能量法的分析,理论上证实了薄直齿轮存在发生自激振动的可能性,并提出了一种预测方法,可以对齿轮的横向自激振动进行预测,确定了齿轮发生横向自激振动时的临界载荷,分

析讨论了重合度、节径数和阻尼比参数对齿轮自激振动稳定性的影响,得到的主要结论为

- 1) 自激力会促进从动齿轮后行波和主动齿轮前行波的振动,在这种情况下,齿轮会在阻尼不足时发生自激振动而失稳。
- 2) 齿轮啮合的重合度对自激力做功和齿轮自激振动稳定区域的影响较小。
- 3) 齿轮横向振动节径数对自激振动稳定区域的影响较大,在其他条件相同时,低节径型更容易发生横向自激振动。
- 4) 齿轮自激振动稳定区域随阻尼比的增加而增大。

本文的研究为提高齿轮自激振动稳定性奠定了理论基础,所提出的方法不仅可以应用于工程中齿轮断裂失效的故障排除,还可以在齿轮的设计初期为研发人员提供参考。

参考文献:

[1] 邹慧君,傅祥志,张春林,等. 机械原理[M]. 北京:高等教育出版社,1999.

[2] 任光明,晏砺堂. 旋转盘型齿轮的横向振动分析[J]. 机械科学与技术,2000,19(4):584-586.

REN Guangming, YAN Litang. Analysis of tranverse vibration of rotating disk-shaped gears[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(4): 584-586. (in Chinese)

[3] 晏砺堂,朱梓根,李其汉,等. 高速旋转机械振动[M]. 北京:国防工业出版社,1994.

[4] Carmignani C, Forte P, Melani G, et al. Numerical investigation on traveling wave vibration of bevel gears[C] // Proceeding of ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Las Vegas, Nevada, USA; American Society of Mechanical Engineers, 2007:385-393.

[5] Drago R J, Brown F W. The analytical and experimental evaluation of resonant response in high-speed, light-weight, highly loaded gearing[J]. Journal of Mechanical Design, 1981, 103(2):346-356.

[6] Byrtus M, Zeman V. On modeling and vibration of gear drives influenced by nonlinear couplings[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(3):375-397.

[7] Hosseini-Hashemi S, Es'haghi M, Taher H R D, et al. Exact closed-form frequency equations for thick circular plates using a third-order shear deformation theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(16):3382-3396.

[8] Leissa A W. Vibration of plates[R]. NASA SP-160, 1969.

[9] Nevzat Özgüven H, Houser D R. Mathematical models used in gear dynamics: a review[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 121(3):383-411.

[10] Sinha S K. Free vibrations of a thick spinning annular disk with distributed masses at the outer edge[J]. Journal of

Sound and Vibration,1988,122(2):217-231.

[11] Sinha S K. On free vibrations of a thin spinning disk stiffened with an outer reinforcing ring[J]. Journal of Vibration, Acoustics Stress and Reliability in Design,1988,110(4):507-514.

[12] Cote A, Atalla N, Nicolas J. Effects of shear deformation and rotary inertia on the free vibration of a rotating annular plate[J]. Journal of Vibration and Acoustics,1997,119(4):641-643.

[13] Suzuki K, Yoshida H, Zheng X. Influence of initial tension on out-plane vibrations of a rotating circular plate[J]. The Japan Society of Mechanical Engineers International Journal; Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing,2002,45(1):54-59.

[14] Chen Y R, Chen L W. Vibration and stability of rotating polar orthotropic sandwich annular plates with a viscoelastic core layer[J]. Composite Structures,2007,78(1):45-57.

[15] 许锬俊,梁世昌,常春江,等. 中央传动锥齿轮共振破坏的实验研究[J]. 航空动力学报,1988,3(3):193-198.

XU Erjun, LIANG Shichang, CHANG Chunjiang, et al. Bevel gear resonance failures in central gearing system of an aeroengine[J]. Journal of Aerospace Power, 1988, 3(3):193-198. (in Chinese)

[16] Bogacz R, Noga S. Free transverse vibration analysis of a toothed gear[J]. Archive of Applied Mechanics,2012,82(9):1159-1168.

[17] Qin H, Lü M, She Y, et al. Modeling and solving for transverse vibration of gear with variational thickness[J]. Journal of Central South University,2013,20(8):2124-2133.

[18] Honda Y, Matsuhisa H, Sato S. Modal response of a disk to a moving concentrated harmonic force[J]. Journal of Sound and Vibration,1985,102(4):457-472.

[19] Ouyang H, Mottershead J E. Unstable travelling waves in the friction-induced vibration of discs[J]. Journal of Sound and Vibration,2001,248(4):768-779.

[20] Lee C W, Kim M E. Separation and identification of traveling wave modes in rotating disk via directional spectral analysis[J]. Journal of Sound and Vibration,1995,187(5):851-864.

[21] Tian J, Hutton S G. Traveling-wave modal identification based on forced or self-excited resonance for rotating discs[J]. Journal of Vibration and Control,2001,7(1):3-18.

[22] 晏砺堂,李其汉. 盘型锥齿轮的横向振动特性分析[J]. 航空动力学报,1988,3(3):199-203.

YAN Litang, LI Qihan. Analysis of lateral vibration of a bevel gear[J]. Journal of Aerospace Power, 1988, 3(3):199-203. (in Chinese)

[23] Talbert P B, Gockel R R. Modulation of gear tooth loading due to traveling wave vibration[C]//Proceeding of ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Chicago, Illinois, USA; American Society of Mechanical Engineers,2003:223-230.

[24] 丁文镜. 自激振动[M]. 北京:清华大学出版社,2009.

[25] De Silva C W. Vibration damping, control, and design[M]. Boca Raton, Florida; CRC Press,2007.

(编辑:秦理曼、王碧琚)