

滤波减速器有限长轮齿接触表面 混合润滑分析

蒲伟¹, 王家序^{1,2}, 周广武¹, 李俊阳², 秦德成¹

(1. 四川大学 空天科学与工程学院, 成都 610065;

2. 重庆大学 机电传动与运载装备研究所, 重庆 400044)

摘 要: 综合考虑了轮齿接触几何、啮合点法向载荷、齿向参数、真实表面粗糙度、润滑剂流变特性等因素,建立了滤波减速器轮齿混合润滑数值分析模型,采用复合迭代法和快速傅里叶变换(FFT)方法分别求解 Reynolds 方程和弹性变形方程,获得了轮齿接触表面混合润滑分析完全数值解,得到了滤波减速器在啮入点、节点和啮出点的压力与平均油膜厚度,以及转速对轮齿接触表面平均油膜厚度和接触比的影响。结果表明:在啮入点、啮出点及节点处,沿齿宽方向的压力分布不相等,两侧压力较大,而在啮入点处的两侧压力突变相对较小,且平均油膜厚度最大;对于粗糙轮齿接触表面,随着滤波减速器转速逐渐降低,啮入点、节点及啮出点的平均油膜厚度随之减小,接触比增加,润滑效果变差,并且在同一工况下粗糙轮齿接触表面的啮合点平均油膜厚度小于光滑轮齿表面的平均油膜厚度。

关 键 词: 滤波减速器; 混合润滑; 有限长轮齿接触表面; 载荷分配; 表面粗糙度

中图分类号: V261; TH132

文献标志码: A

Mixed lubrication analysis in finite tooth contact surface of filtering reducer

PU Wei¹, WANG Jia-xu^{1,2}, ZHOU Guang-wu¹,

LI Jun-yang², QIN De-cheng¹

(1. School of Aeronautics and Astronautics,

Sichuan University, Chengdu 610065, China;

2. Institute of Electromechanical Transmission and Delivery Equipment,

Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The numerical analysis model for mixed lubrication of filtering reducer tooth was built considering the tooth contact geometry, normal load of meshing point, tooth parameters, real surface roughness, rheological behavior of lubricant. A completely numerical solution of mixed lubrication analysis in tooth contact surface was achieved by solving the Reynolds equations and elastic deformation equations using compound iteration method and fast Fourier transformation (FFT) method respectively. The pressure and average film thickness were obtained at engaging-in point, engaging-out point and pitch point of filtering reducer, and the effects of speed on the average film thickness and contact area ratio in tooth contact surface were also obtained. The results show that the pressure distribution along the tooth width direction is not equal at engaging-in point, engaging-out point and pitch point, and pressures on both sides are higher; the variation of pressure is smaller on both sides and

收稿日期: 2013-11-11

基金项目: 国家自然科学基金(51435001, 51375506); 高等学校博士学科点专项科研基金(2012018113001)

作者简介: 蒲伟(1989—), 男, 四川乐至人, 博士生, 研究方向为润滑与摩擦。

the average film thickness is greater at engaging-in point. When the tooth contact surface is rough, with the decrease of speed of filtering reducer, the average film thickness at engaging-in point, engaging-out point and pitch point is decreased, and the contact area ratio increases, leading to poor lubrication. Besides, the average film thickness of meshing points of rough tooth contact surface is less than that of smooth tooth contact surface under the same conditions.

Key words: filtering reducer; mixed lubrication; finite tooth contact surface; load distribution; surface roughness

在空间飞行器、机器人等特殊领域,传动装置需具备高精度、高效率、高可靠等优异性能的同时,装置的体积及质量也有严格要求.基于此应用背景,王家序等发明了一种在传动精度范围内具有变形协调能力的减速器——滤波减速器^[1].众所周知,绝大多数的减速器失效起源于轮齿接触表面,比如点蚀、胶合、磨损、裂纹等,产生这些失效的原因主要是轮齿接触表面润滑不良.因此,开展滤波减速器轮齿接触表面润滑机理分析研究,对滤波减速器性能提升具有很强的理论指导意义和工程实用价值.滤波减速器在传递运动与动力过程中,啮合点处接触几何、表面微观形貌、相对运动参数、接触压力等参数都会随着齿轮的运转而发生改变,导致轮齿接触表面润滑状态极为复杂,润滑分析具有强非线性、时变性等特点.

王家序等^[2]基于轮齿无限长假设对滤波减速器进行了润滑分析,其模型中考虑了啮合点载荷、二维表面粗糙度、流变特性等因素,得到了轮齿接触表面的油膜分布和压力分布,但是该模型忽略了轮齿的齿向参数及三维真实表面粗糙度的影响,导致以上条件的假设与实际情况有较大的差距.此外,随着弹流润滑的发展,国内外很多学者将其拓展到了轮齿接触表面润滑机理的研究^[3-8].Hua等^[3]对渐开线圆柱齿轮进行了润滑分析,其润滑模型中采用的是等温牛顿流体,考虑了瞬态效应;王优强等^[5]采用正弦模拟的表面粗糙度,得到了渐开线直齿瞬态微观热弹流润滑完全数值解,但模型化的近似处理并非真实表面粗糙度,不能表示实际的情况.另外,以上的研究中,轮齿在 y 方向都是采用了无限长假设,忽略了轮齿齿向参数的影响.Zhu等^[8]综合考虑了滚子几何、真实表面粗糙度等参数,采用三维线接触模型分析了倒角、鼓形等修形参数对圆柱滚子润滑性能的影响,结果表明,这些参数对润滑性能的影响不可忽略,且存在一个最优区间.

本文旨在综合考虑轮齿接触几何、啮合点法

向载荷、齿向参数、真实表面粗糙度、润滑剂流变特性等因素,利用复合迭代法和FFT方法获得轮齿接触表面混合润滑分析完全数值解,在此基础上,进一步分析滤波减速器轮齿的啮入点、啮出点及节点处的混合润滑状态,探讨转速对滤波减速器轮齿接触表面润滑状态的影响,为滤波减速器的摩擦学性能优化提供理论支撑.

1 润滑分析模型

1.1 轮齿间载荷分配计算

关于少齿差内啮合齿轮传动的轮齿间载荷分配计算方法,目前已较为成熟,滤波减速器在结构形式上属于少齿差内啮合齿轮传动(见图1),各啮合点的接触载荷计算公式如下^[9-10]:

$$\left. \begin{aligned} \theta'_1 &= \theta'_2 = \theta'_3 = \cdots = \theta'_l = \theta'_0 \\ \theta'_l &= \varphi_l + \frac{\delta_l}{r_{bk}} \\ \delta_l &= W_l C'_l / (Eb) \\ W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_i &= W_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 θ'_l 为外齿轮附加转角; δ_l 为啮合点法向形变量; W_l 为啮合点法向力; r_{bk} 为一对齿轮的基圆半径, $k=1,2$; W_n 为轮齿总载荷; C'_l 为齿轮副的法向柔度; l 为齿对编号; φ_l 为齿廓理论间隙角; E 为材料弹性模量; b 为齿宽.

1.2 轮齿接触几何及运动学参数^[7,11]

为避免应力集中,滤波减速器在齿端做了倒角修形处理,从图1中可以看出,轮齿上C点为初始啮合点,A点为脱离啮合点.

1.2.1 轮齿几何间隙

根据文献^[12]可以得出,滤波减速器啮合点可以简化为两个圆柱体之间的接触,综合考虑轮齿端面倒角参数,而且 y 方向为有限长,得出其有限长原始间隙模型如图2所示.

轮齿几何间隙可进一步可表示为

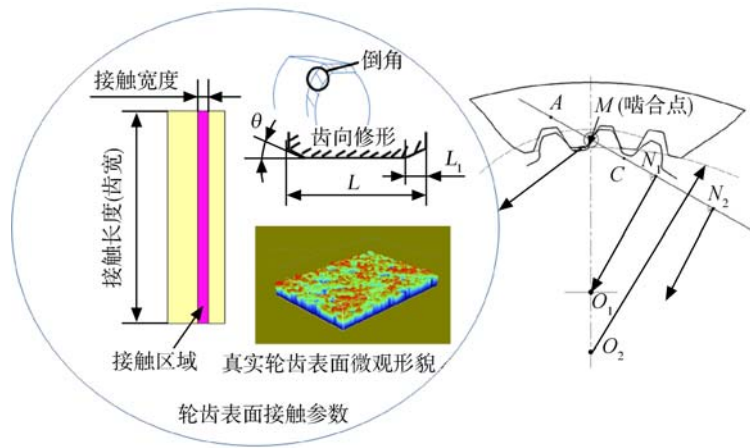


图1 内啮合齿轮齿对关系图

Fig. 1 Tooth relation diagram between a pair of inner meshing gears

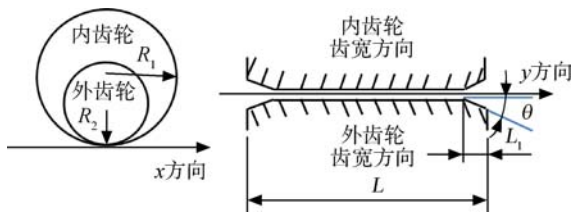


图2 有限长原始间隙模型

Fig. 2 Model of finite original clearance

$$f(x, y, t) = h_0 + D'(x, y, t) \quad (2)$$

式中 h_0 是初始中心油膜厚度, $D'(x, y, t)$ 表示间隙几何, 其表达式如下:

当 $y > L/2 - L_1$ 时

$$D'(x, y, t) = \frac{x^2}{2(R_1 - \Delta)(R_2 + \Delta)\tan\theta/(R_1 - R_2)} \quad (3)$$

当 $y < -L/2 + L_1$ 时

$$D'(x, y, t) = \frac{x^2}{2(R_1 + \Delta)(R_2 - \Delta)\tan\theta/(R_1 - R_2)} \quad (4)$$

当 $y \leq -L/2 + L_1$ 时

$$D'(x, y, t) = \frac{x^2}{2R_1 R_2 / (R_1 - R_2)} \quad (5)$$

其中 $\Delta = y \tan \theta - (L_1 \pm L/2) \tan \theta$, 当 $y \geq 0$ 时, 取“+”, 当 $y < 0$ 时, 取“-”, L_1 是倒角长度, L 是齿宽, θ 是倒角, R_1, R_2 分别为内、外齿轮啮合点曲率半径。

1.2.2 运动参数

在滤波减速器转速(n_1, n_2)已知的情况下, 啮合点处的相对运动参数可由下式计算:

$$\begin{aligned} |u| &= |u_1 - u_2| \\ u_1 &= \omega_1 (\overline{PN_1} - S) \\ u_2 &= \omega_2 (\overline{PN_2} - S) \end{aligned} \quad (6)$$

其中 P 为啮合齿对节点, S 为啮合线上啮合点到 P 的距离. $N_1 N_2$ 是内齿轮和外齿轮的基圆公切线, u 为啮合点的速度。

1.3 滤波减速器轮齿润滑方程组

Reynolds 方程^[8]为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \\ \frac{u_1 + u_2}{2} \cdot \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

油膜厚度方程为

$$\begin{aligned} h &= f(x, y, t) + \delta_1(x, y, t) + \\ &\delta_2(x, y, t) + V_e(x, y, t) \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\delta_1(x, y, t), \delta_2(x, y, t)$ 为表面粗糙度, $V_e(x, y, t)$ 为接触表面弹性变形, 表达式如下:

$$\begin{aligned} V_e(x, y, t) = \\ \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \zeta, t)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}} d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (9)$$

压力密度方程为

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{0.6 \times 10^{-9} p'}{1 + 1.7 \times 10^{-9} p'} \right] \quad (10)$$

压力黏度方程为

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_p \left\{ (\ln \eta_p + 9.67) \cdot \right. \\ &\left. [(1 + 5.1 \times 10^{-9} p')^Z - 1] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

载荷平衡方程为

$$W = \int_{x_{out}}^{x_{in}} p'(x) dx \quad (12)$$

以上公式中符号的含义参见文献[8].

2 数值计算

表面粗糙度是油膜厚度方程的组成项,求解真实表面粗糙度轮齿接触表面的润滑问题,关键在于处理雷诺方程右边的剪切流项 $\frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X}(\bar{\rho}, H, X, Y$ 是对 Reynolds 方程中的 ρ, h, x, y 进行量纲一化所得变量),该项中存在对表面粗糙度的求导,具体处理如下:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} = H \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial X} + \bar{\rho} \frac{\partial H}{\partial X} \quad (13)$$

其中含有表面粗糙度的方程求导为

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial S_{12}}{\partial X} + \frac{\partial D}{\partial X} \quad (14)$$

其中 G, S_{12}, D 分别代表量纲一化以后的原始间隙、表面粗糙度、弹性变形,量纲一化方法与参考文献[8]中相同.为了保证求解的稳定性和收敛性,采取先在表面粗糙度数据文件上求导再插值到求解域上的方法,求导方法采用1阶向后差分法.

采用FFT方法计算啮合点的弹性变形^[13-14],考虑篇幅问题,此处不作详细阐述.

根据复合迭代法^[15-17],把 Reynolds 方程右边卷吸流项中的油膜厚度也看成是未知节点压力的函数,从而在构造系数矩阵时,把卷吸流也包括在内.这样即使在重载低速工况下,系数矩阵仍能保持对角占优.离散后 Reynolds 方程的典型形式为

$$A_{i,j} p_{i-1,j} + B_{i,j} p_{i,j} + C_{i,j} p_{i+1,j} = F_{i,j} \quad (15)$$

式中

$$\begin{cases} A_{i,j} = A_{i,j}^p + A_{i,j}^w \\ B_{i,j} = B_{i,j}^p + B_{i,j}^w \\ C_{i,j} = C_{i,j}^p + C_{i,j}^w \\ F_{i,j} = F_{i,j}^p + F_{i,j}^w \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{i,j}^p = \frac{\epsilon_{i-\frac{1}{2},j}^x}{(\Delta X)^2} \\ B_{i,j}^p = -\frac{\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^x + \epsilon_{i-\frac{1}{2},j}^x}{(\Delta X)^2} - \frac{\epsilon_{i,j+\frac{1}{2}}^x + \epsilon_{i,j-\frac{1}{2}}^x}{(\Delta Y)^2} \\ C_{i,j}^p = \frac{\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^x}{(\Delta X)^2} \\ F_{i,j}^p = -\frac{\epsilon_{i,j+\frac{1}{2}}^y p_{i,j+1} + \epsilon_{i,j-\frac{1}{2}}^y p_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{i,j}^w = -\frac{\bar{\rho}_{i,j} D_{i-1,j}^{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j} D_{i-1,j}^{i-1,j}}{\Delta X} - \frac{\bar{\rho}_{i,j} D_{i-1,j}^{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j} D_{i-1,j}^{i-1,j}}{\Delta T} \\ B_{i,j}^w = -\frac{\bar{\rho}_{i,j} D_{i,j}^{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j} D_{i,j}^{i-1,j}}{\Delta X} - \frac{\bar{\rho}_{i,j} D_{i,j}^{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j} D_{i,j}^{i-1,j}}{\Delta T} \\ C_{i,j}^w = -\frac{\bar{\rho}_{i,j} D_{i+1,j}^{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j} D_{i+1,j}^{i-1,j}}{\Delta X} - \frac{\bar{\rho}_{i,j} D_{i+1,j}^{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j} D_{i+1,j}^{i-1,j}}{\Delta T} \\ F_{i,j}^w = \frac{1}{\Delta X} \{ \bar{\rho}_{i,j} [H_{i,j} - (D_{i-1,j}^{i,j} p_{i-1,j}^{\text{old}} + D_{i,j}^{i,j} p_{i,j}^{\text{old}} + D_{i+1,j}^{i,j} p_{i+1,j}^{\text{old}})] - \bar{\rho}_{i-1,j} [H_{i-1,j} - (D_{i-1,j}^{i-1,j} p_{i-1,j}^{\text{old}} + D_{i,j}^{i-1,j} p_{i,j}^{\text{old}} + D_{i+1,j}^{i-1,j} p_{i+1,j}^{\text{old}})] \} + \frac{1}{\Delta T} \{ \bar{\rho}_{i,j} [H_{i,j} - (D_{i-1,j}^{i,j} p_{i-1,j}^{\text{old}} + D_{i,j}^{i,j} p_{i,j}^{\text{old}} + D_{i+1,j}^{i,j} p_{i+1,j}^{\text{old}})] - \bar{\rho}_{i-1,j} [H_{i-1,j} - (D_{i-1,j}^{i-1,j} p_{i-1,j}^{\text{old}} + D_{i,j}^{i-1,j} p_{i,j}^{\text{old}} + D_{i+1,j}^{i-1,j} p_{i+1,j}^{\text{old}})] \} \end{cases}$$

由于篇幅限制,上式中符号含义参见文献[18].根据求解域划分的网格节点数建立未知量与方程个数相等的线性代数方程组,然后进行迭代求解,直到达到收敛精度.

$$e_{\text{err}} = \frac{\sum_{i=0}^{400} |\bar{p}_i^{m+1} - \bar{p}_i^m|}{\sum_{i=0}^{400} |\bar{p}_i^{m+1}|} < 0.0001$$

计算流程见图3.

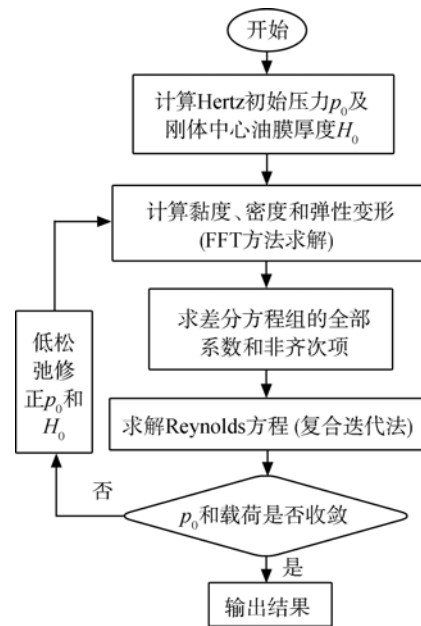


图3 计算流程图

Fig. 3 Calculation flowchart

3 结果与讨论

3.1 算例参数

滤波减速器基本参数如下:齿数 Z_1 为 40, Z_2 为 45,模数为 1,额定转速为 2 000 r/min,输出转矩为 80 N·m,齿宽为 3.5 mm, L_1 为 0.35 mm, θ 为 15°,轮齿材料弹性模量为 207.8 GPa,泊松比为 0.3. 润滑剂基本参数如下:初始黏度 $\eta = 0.095 \text{ Pa} \cdot \text{s}$,黏压系数 $\alpha = 1.82 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$,计算边界 $-3.1 \leq X \leq 1.5$, $-1.5 \leq Y \leq 1.5$. 滤波减速器轮齿接触表面三维形貌如图 4 所示,表面粗糙度方均根为 $0.5 \mu\text{m}$.

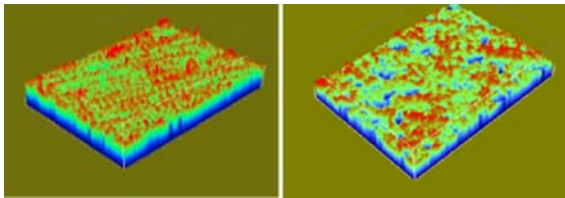


图 4 轮齿表面三维形貌

Fig. 4 Three-dimensional profile of tooth surface

滤波减速器在额定外载荷下,采用式(1)载荷分配模型,得出啮合点载荷及对应接触齿对如表 1 所示.

表 1 啮合点载荷及对应接触齿对

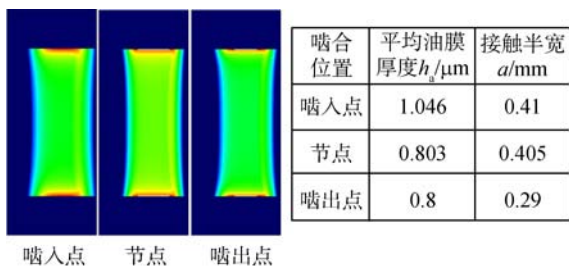
Table 1 Load at meshing points and related contact pair

k_i	W_i/N	$(W_i/W_n)/\%$
0	807	45.42
1	470	26.44
2	500	28.14

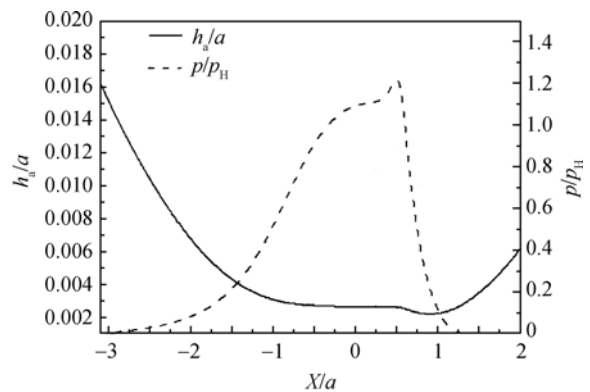
表 1 中 k_i 表示接触齿对编号,可以得出一共有 3 齿对处于啮合状态,载荷各不相同.

3.2 滤波减速器光滑轮齿接触表面润滑性能分析

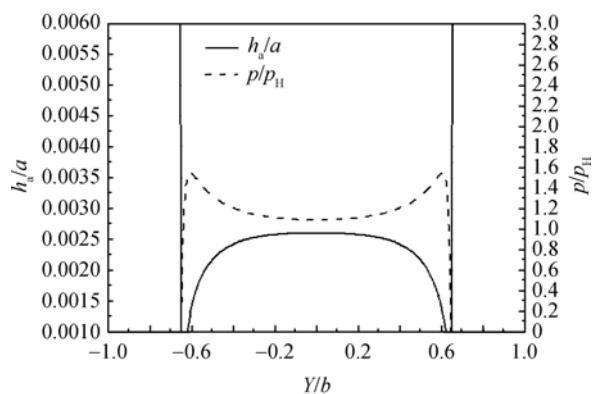
图 5 分别为啮入点、节点和啮出点处在额定



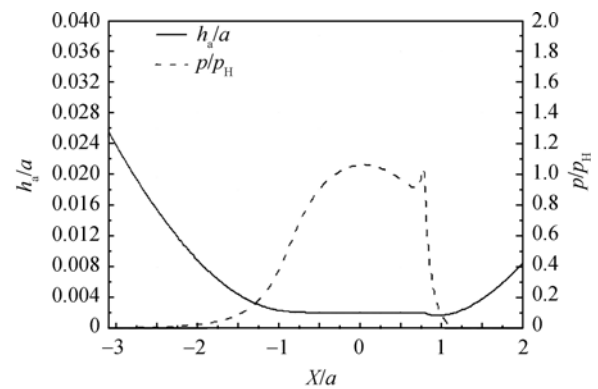
(a) 平均油膜厚度分布图



(b) 啮入点压力和平均油膜厚度



(c) 节点压力和平均油膜厚度



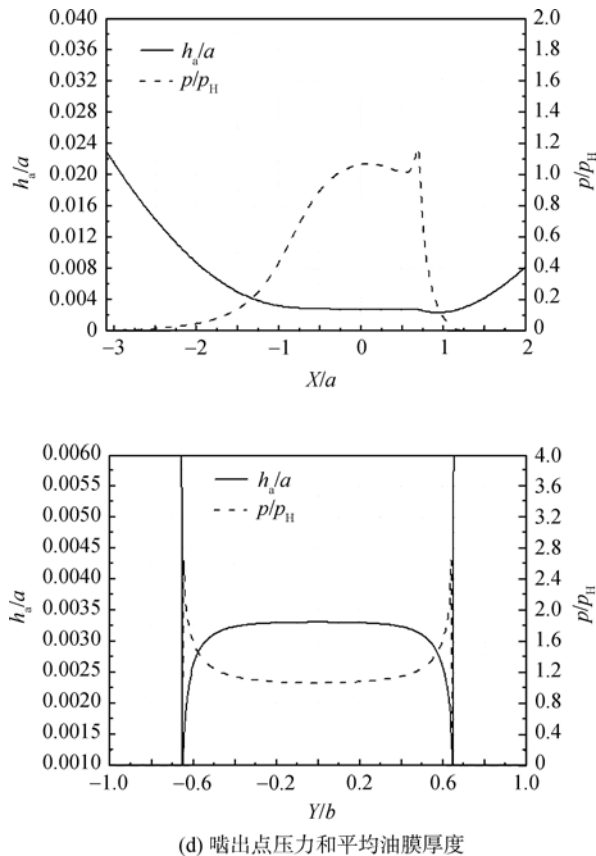


图5 压力和平均油膜厚度在啮入点、节点和啮出点的分布

Fig. 5 Pressure and average film thickness distribution at engaging-in point, pitch point and engaging-out point

外载荷和转速下,光滑轮齿接触表面分别沿 X 、 Y 方向的压力和平均油膜厚度分布曲线(p 为压力, p_H 为最大 Hertz 压力). 沿 X 方向分布时, $Y=0$; 沿 Y 方向分布时, $X=0$. 从图中可以得出,啮入点处的齿宽两侧压力突变相对较小,并且平均油膜厚度最大,其中平均油膜厚度 h_a 定义为 $2/3$ 的 Hertz 接触区域内的油膜厚度与该区域总面积的比值. 图中得出沿齿宽方向的压力和平均油膜厚度分布并不相等,两侧压力存在突变现象,因此齿向参数对压力分布具有很重要影响,可通过对轮齿进一步修形优化,得出较理想的压力分布.

3.3 滤波减速器粗糙轮齿接触表面润滑性能分析

图6分别是转速 n 为 2000, 1000, 500 r/min 时,啮入点、节点、啮出点真实粗糙轮齿接触表面的混合润滑数值解. 从图中可以得出,当转速为 2000 r/min 时,各啮合点平均油膜厚度最大,轮齿接触表面的接触比 A_c 最小,其中 A_c 定义为接触的面积与 Hertz 接触区域内总面积的比值. 当滤波减速器转速降低,各啮合点平均油膜厚度随之

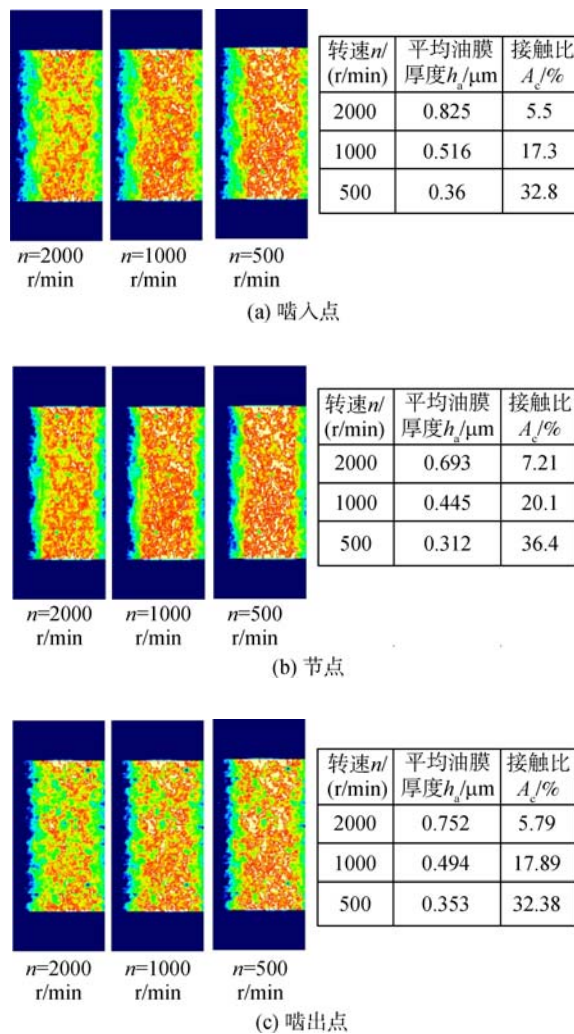
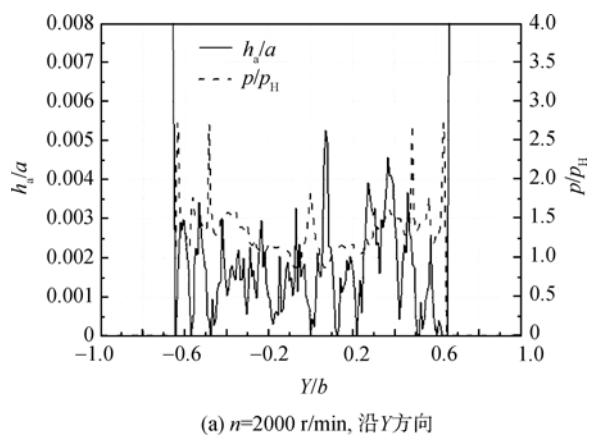


图6 不同转速的平均油膜厚度

Fig. 6 Average film thickness at different speeds

减小,接触比增加,润滑效果变差. 图7是不同转速下节点处沿 Y 方向的压力和平均油膜厚度分布,从图中可以得出,随着转速的降低,沿 Y 方向分布的油膜逐渐变小,干接触的比例逐渐增大. 同时,在同一工况下粗糙轮齿接触表面的啮合点平均油膜厚度较光滑轮齿接触表面的平均油膜厚度



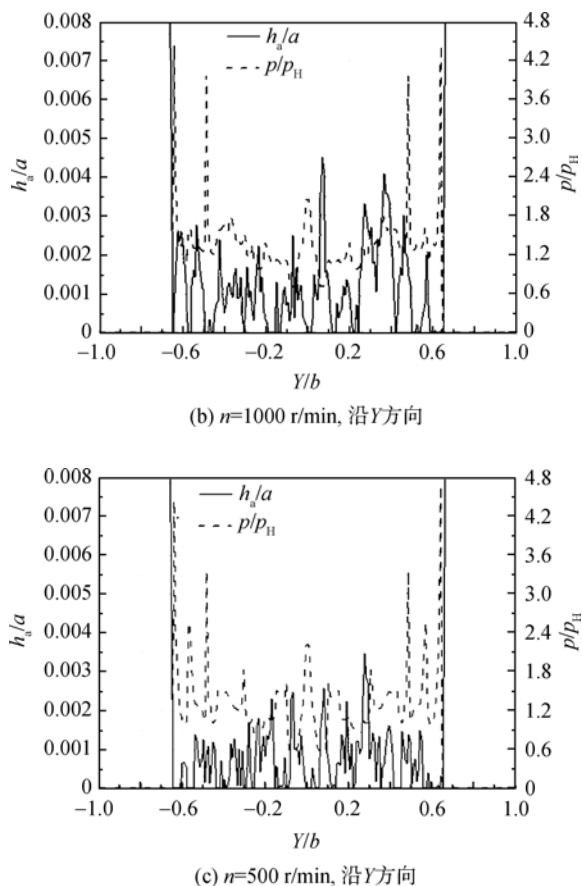


图7 节点压力和平均油膜厚度分布

Fig. 7 Pressure and average film thickness distribution at pitch point

薄. 因此, 为了更真实反映啮合点的润滑状态, 表面粗糙度的影响不可忽略.

4 结 论

综合考虑了滤波减速器轮齿的有限长、修形、表面粗糙度等因素, 建立了滤波减速器啮合点的混合润滑模型, 分析了滤波减速器轮齿的啮入点、啮出点及节点处的混合润滑状态; 探讨了转速对滤波减速器轮齿接触表面润滑状态的影响, 结论如下:

1) 在啮入点、节点和啮出点中, 齿宽两侧压力较大, 存在突变现象, 啮入点处的齿宽两侧压力突变相对较小, 在光滑轮齿接触表面情况下, 啮入点的平均油膜厚度较节点和啮出点大.

2) 沿齿宽方向的平均油膜厚度、压力分布并不相等, 可通过对轮齿进一步修形优化, 得出较理想的平均油膜厚度、压力分布. 因此, 本模型可用于基于润滑性能的轮齿修形优化设计.

3) 对于粗糙轮齿接触表面, 当转速为 2 000 r/min 时, 啮入点、节点、啮出点的平均油膜厚度最

大, 轮齿接触表面的接触比最小, 因此, 润滑性能最好, 当滤波减速器转速降低, 啮入点、节点、啮出点的平均油膜厚度随之减小, 接触比增加, 润滑效果变差.

参考文献:

- [1] 王家序, 肖科, 李俊阳, 等. 滤波减速器: 中国, ZL201010104359.5[P]. 2011-03-15.
- [2] 王家序, 秦德成, 张林川, 等. 滤波减速器轮齿表面瞬态微弹流润滑模型[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2013, 45(1): 202-207.
WANG Jiaxu, QIN Decheng, ZHANG Linchuan, et al. Transient thermal micro-elastohydrodynamic lubrication model of filtering reducer[J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2013, 45(1): 202-207. (in Chinese)
- [3] Hua D Y, Khonsari M M. Application of transient elastohydrodynamic lubrication analysis for gear transmissions[J]. Tribology Transactions, 1995, 38(8): 905-913.
- [4] 蒲伟, 王家序, 朱东, 等. 卷吸速度为任意方向的椭圆接触弹流润滑复合迭代解法[J]. 机械工程学报, 2014, 50(13): 106-112.
PU Wei, WANG Jiaxu, ZHU Dong, et al. Semisystem approach in elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts with arbitrary entrainment[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(13): 106-112. (in Chinese)
- [5] 王优强, 衣雪鹃, 杨沛然. 渐开线直齿轮瞬态微弹流润滑分析[J]. 机械工程学报, 2007, 43(11): 142-148.
WANG Youqiang, YI Xuejuan, YANG Peiran. Transient thermal micro-elastohydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(11): 142-148. (in Chinese)
- [6] PU Wei, WANG Jiaxu, YING Zhang, et al. A theoretical analysis of the mixed elastohydrodynamic lubrication in elliptical contacts with an arbitrary entrainment angle[J]. Journal of Tribology, 2014, 136(4): 041505. 1-041505. 11.
- [7] 蒲伟, 王家序, 李俊阳, 等. 齿向修形对滤波减速器润滑性能的影响分析[J]. 摩擦学学报, 2014, 34(4): 393-399.
PU Wei, WANG Jiaxu, LI Junyang, et al. Analysis of longitudinal modification on lubrication performance of filtering reducer[J]. Tribology, 2014, 34(4): 393-399. (in Chinese)
- [8] Zhu D, Wang J, Ren N, et al. Mixed elastohydrodynamic lubrication in finite roller contacts involving realistic geometry and surface roughness[J]. Journal of Tribology, 2012, 134(1): 011504. 1-011504. 10.
- [9] SHU Xiaolong. Determination of load sharing factor for planetary gearing with small tooth number difference[J]. Mechanism and Machine Theory, 1995, 30(2): 313-321.
- [10] 朱才朝, 黄健, 唐倩. 少齿差行星齿轮传动实际接触齿数及载荷分配的研究[J]. 中国机械工程, 2002, 13(18): 1586-1590.

- ZHU Caichao, HUANG Jian, TANG Qian. Study on contact teeth and load distribution of planetary gear with small tooth number difference[J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(18): 1586-1590. (in Chinese)
- [11] Bobach L, Beilicke R, Bartel D, et al. Thermal elastohydrodynamic simulation of involute spur gears incorporating mixed friction[J]. Tribology International, 2012, 48: 191-206.
- [12] 鲍培德, 谢俊, 尹小琴, 等. 行星齿轮变速传动的弹流润滑研究[J]. 润滑与密封, 2011, 36(2): 12-16.
- BAO Peide, XIE Jun, YIN Xiaoqin, et al. Study on elastohydrodynamic lubrication of planetary gear transmission [J]. Lubrication Engineering, 2011, 36(2): 12-16. (in Chinese)
- [13] Liu S B, Wang Q, Liu G. A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analysis[J]. Wear, 2000, 243(1/2): 101-110.
- [14] Ren N, Zhu D, Chen W W, et al. A three-dimensional deterministic model for rough surface line-contact EHL problems[J]. Journal of Tribology, 2009, 131(1): 011501. 1-011501. 9.
- [15] Ai X L. Numerical analysis of elastohydrodynamically lubricated line and point contacts with rough surfaces by using semi-system and multigrid methods[D]. Evanston: Northwestern University, 1993.
- [16] Zhu D. On some aspects in numerical solution of thin-film and mixed EHL[J]. Journal of Engineering Tribology, 2007, 221(5): 561-579.
- [17] Zhu D, Wang Q. Elastohydrodynamic lubrication (EHL), a gateway to interfacial mechanics: review and prospect[J]. Journal of Tribology, 2011, 133(4): 041001. 1-041001. 14.
- [18] REN Ning. Advanced modeling of mixed lubrication and its mechanical and biomedical applications [D]. Evanston: Northwestern University, 2009.