

对偶型最大熵概率密度函数模型及其优化解法

吴福仙, 温卫东

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 针对经典型最大熵概率密度函数模型及其计算目前存在的非线性程度高, 优化不收敛, 求解效率低等问题, 提出了一种对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化的方法。根据优化过程不稳定, 重新推导了拉格朗日系数的线性变换公式。针对几种常见及一种复杂的概率密度函数, 采用经典型与对偶型最大熵概率密度函数模型分别计算概率密度及可靠度的对比表明: 与经典型最大熵概率密度函数模型相比, 对偶型最大熵概率密度函数模型优化函数形式简单, 非线性程度低。逐次优化法求解拉格朗日系数不仅克服了初始值敏感性问题, 而且计算效率高。对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法与其他方法相比, 计算精度最高, 且能很好的应用于复杂概率分布及可靠性问题。

关 键 词: 概率密度函数; 最大熵; 对偶型; 逐次优化; 可靠性

中图分类号: V23; TK263.3

文献标志码: A

Dual maximum entropy probability density function model and optimization

WU Fu-xian, WEN Wei-dong

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Based on high nonlinearity, hard convergence, low computational efficiency in the computational process by the classic maximum entropy probability density function model, a method called dual maximum entropy probability density function model+sequential updating method was proposed. Because of the unsteady optimization routine, a transformation formula of Lagrangian coefficient was rededuced. The probability density function and reliability of several common distributions and one complex distribution was calculated by classic and dual maximum entropy probability density function models. This shows that compared with classic maximum entropy probability density function model, the optimization function of dual maximum entropy probability density function model has advantages of low nonlinearity and simple form, the sequential updating method not only overcomes the sensitivity problem of initial value but exhibits high computational efficiency; dual maximum entropy probability density function model+sequential updating method has the highest computational accuracy, and can be well applied to the reliability problems of complex distribution.

Key words: probability density function; maximum entropy; dual; sequential updating method; reliability

最大熵原理定义为最优的概率分布使熵在已知的信息约束条件下最大, 是解决概率类问题的有力工具。最大熵原理具有在拟合概率密度公式

时不事先假定概率分布, 公式统一, 适用性强等优点, 且在拟合复杂概率分布时能够克服常见概率分布的缺点。

文献[1-5]提出了经典最大熵概率密度函数模型+拟牛顿法确定概率密度公式.但由于经典最大熵概率密度函数的高度非线性和拟牛顿法的局限性使确定拉格朗日系数时容易计算不收敛且结果受初始点影响较大.文献[6-7]根据经典最大熵概率密度函数模型优化过程中出现计算溢出,将拉格朗日系数积分区间进行线性变换,计算线性变换后的拉格朗日系数再线性逆变换求出原问题的拉格朗日系数.但进行线性逆运算时需进行矩阵求逆,会引起奇异现象.

本文根据以上缺点进行了改进:①提出了对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法代替了经典最大熵概率密度函数模型+拟牛顿法,避免了初始点选择的影响且提高了计算精度.②重新推导了线性变换公式避免了矩阵求逆运算,使优化算法更加稳健.

1 对偶型最大熵概率密度函数模型及其计算机实现

1.1 经典最大熵概率密度函数模型

设变量 X 是一个连续随机变量,其熵 S 定义为^[8-18]

$$S = - \int_R f(x) \ln[f(x)] dx \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 为变量 X 的理论概率密度函数, R 为变量 X 的变化范围.

最大熵的基本方程为

$$\begin{aligned} \max S = & - \int_R f(x) \ln[f(x)] dx \\ \text{s. t. } & \int_R f(x) dx = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\int_R x^i f(x) dx = m_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中 m_i 为第 i 阶原点矩,其数值由样本确定.

现有文献[8-15]确定最大熵概率密度函数的解析式及其系数一般采用如下形式.

经典最大熵概率密度函数模型的解析形式为

$$f(x) = \exp \left[\lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i \right] \quad (3)$$

$$\lambda_0 = - \ln \left[\int_R \exp \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i \right] dx \right] \quad (4)$$

其中 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i$ 为拉格朗日系数.一般情况,利用最小二乘法原理,使残差余量 e_i 的平方和最小

的条件来确定 λ_i ^[8-15],即

$$\min e^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (5)$$

其中

$$e_i = 1 - \frac{\int_R x^i \exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \right) dx}{m_i \int_R \exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \right) dx} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

目前普遍采用拟牛顿迭代寻优求解上式.但是,采用拟牛顿迭代寻优求解存在如下不足,即初始点对寻优结果比较敏感.其一,初始点选取不合理,优化结果就不理想;其二,上述残差 e 是关于 λ_j 的高度非线性,往往造成寻优结果难以收敛.

1.2 对偶型最大熵概率密度函数模型

根据式(2),本文重新构造拉格朗日函数 T , 即有

$$\begin{aligned} \max T = & - \int_R f(x) \ln[f(x)] dx - (\lambda_0 - 1) \cdot \\ & \left[\int_R f(x) dx - 1 \right] - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\int_R x^i f(x) dx - m_i \right] \end{aligned} \quad (7)$$

由驻值条件 $\frac{\partial T}{\partial f(x)} = 0$, 得到对偶型最大熵概率密度函数模型的解析形式为

$$f(x) = \exp \left[- \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right] \quad (8)$$

为了确定 λ_0 与 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的关系,将式(8)代入约束条件 $\int_R f(x) dx = 1$ 中,得到

$$\lambda_0 = \ln \int_R \exp \left[- \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i \right] dx \quad (9)$$

将式(8)代入式(7),得到拉格朗日优化函数对偶形式 $\min Q$

$$\begin{aligned} \min Q = & - \int_R \exp \left[- \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right] \left(- \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right) dx - \\ & (\lambda_0 - 1) \left[\int_R \exp \left[- \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right] dx - 1 \right] - \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\int_R x^i \exp \left[- \sum_{j=0}^n \lambda_j x^j \right] dx - m_i \right] = \\ & \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)进行寻优即可得到拉格朗日系数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i$, 进而得到对偶型最大熵概率密度函

数模型(式(8)).

1.3 对偶型最大熵概率密度函数模型的优化

算法及计算机实现

为了进一步解决经典最大熵、对偶型最大熵概率密度函数模型(即式(5)、式(10))优化过程中寻优拉格朗日系数的初始点问题,即优化结果精度不高、计算不收敛和求解效率低等问题,本文采用逐次优化法来求解拉格朗日系数。

在 Bayes 分析及数据处理过程中,数据处理中的各阶样本原点矩 m_i 是不相干的^[5],所以本文的逐次优化法在寻优拉格朗日系数时,从低阶到高价逐次加入原点矩,并更新最大熵概率密度函数模型公式。

下面以对偶型最大熵概率密度函数模型的计算实现为例,来阐述本文提出的逐次优化步骤。设拉格朗日系数的个数为 M , $r=1, 2, \dots, M-1$, 那么

1) 当 $r=1$, 设优化变量为 $\mathbf{V}_1 = [\lambda_1]$, $\mathbf{V}_1 = [0]$ 为初始值,令 $\lambda_0 = \ln \int_R \exp(-\lambda_1 x) dx$, 根据优化函数 $\min Q = \lambda_0 + \lambda_1 m_1$, 采用单纯形优化算法求出最优变量为 $\mathbf{V}_1^* = [\lambda_1^{*(1)}]$ 。

2) $r=2$, 设优化变量为 $\mathbf{V}_2 = [\lambda_1 \quad \lambda_2]$, $\mathbf{V}_2 = [\lambda_1^{*(1)} \quad 0]$ 为初始值,令 $\lambda_0 = \ln \int_R \exp(-\sum_{i=1}^2 \lambda_i x^i) dx$, 根据优化函数 $\min Q = \lambda_0 + \sum_{i=1}^2 \lambda_i m_i$, 采用单纯形优化算法求出最优变量为 $\mathbf{V}_2^* = [\lambda_1^{*(2)} \quad \lambda_2^{*(2)}]$ 。

3) 增加 r 值,如此往复,直至 $r=M-1$ 步,求得最终的最优变量 $\mathbf{V}_r^*$, 并由 $\lambda_0 = \ln \int_R \exp(-\sum_{i=1}^r \lambda_i x^i) dx$ 得出 λ_0 。

4) 由最终的拉格朗日系数代入式(8),即可得到对偶型最大熵概率密度函数模型公式。

对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法的求解框图详见图 1。

1.4 积分区间变换

对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法寻优拉格朗日系数过程中,需计算 $\lambda_0 = \ln \int_R \exp\left[-\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i\right] dx$, 可以看出 λ_0 是关于积分变量 x 的高度非线性函数,在计算时会出现溢出现象,导致计算失败。

为了克服这个现象,文献[6]将 x 的积分区

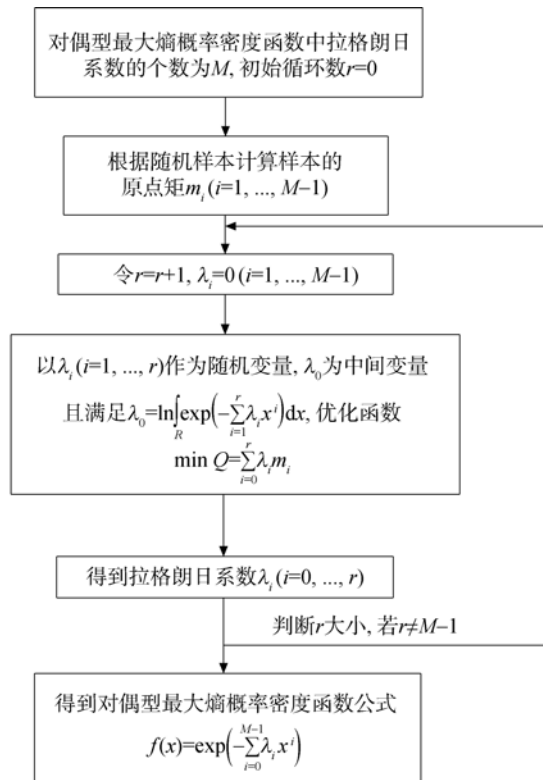


图 1 对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法
计算框图

Fig. 1 Diagram of the dual maximum entropy probability density function model+sequential optimization method

间变换到 $[0, 1]$, 求出变换后的拉格朗日系数 λ' , 再由线性变化前后拉格朗日系数的关系式 $\mathbf{H}\lambda^T = \lambda'^T$, 求出变换前的拉格朗日系数 λ , 从而得到原问题的对偶型最大熵概率密度函数模型公式。

但根据关系式 $\mathbf{H}\lambda^T = \lambda'^T$ 来确定变换前的拉格朗日系数时,需进行线性变换矩阵 $\mathbf{H}$ 的求逆运算,而有时矩阵 $\mathbf{H}$ 求逆会出现奇异现象,导致结果不正确。为了避免出现上述情况,本文重新推导了线性变化前后拉格朗日系数的关系式 $\lambda^T = \mathbf{G}\lambda'^T$, 推导内容如下:

设原问题的积分区间为 $l \leq x \leq u$, 线性变换为 $l' \leq x' \leq u'$, 则这两个积分区间表示的概率密度函数定义如下:

$$l \leq x \leq u \quad f_1(x) = \exp\left[-\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i\right] \quad (11)$$

$$l' \leq x' \leq u' \quad f_2(x') = \exp\left[-\sum_{i=0}^n \lambda'_i (x')^i\right] \quad (12)$$

$$\text{令} \quad S = \frac{u' - l'}{u - l} \quad (13)$$

$$A = \frac{Sl - l'}{S} \quad (14)$$

则

$$x = \frac{x' - l'}{S} + l = A + \frac{x'}{S} \quad (15)$$

根据概率论知识可知

$$f_1(x) = S f_2(x') \quad (16)$$

将式(16)代入式(12)可得

$$\frac{1}{S} f_1(x) = \exp \left\{ - \sum_{i=0}^n [\lambda'_i [S(x-A)]^i] \right\} \quad (17)$$

化简式(17)可得

$$f_1(x) = \exp \left\{ \ln S - \sum_{i=0}^n [\lambda'_i S^i (-A)^i] - \sum_{i=1}^n \left[\lambda'_i S^i \sum_{j=1}^i C_i^j x^j (-A)^{i-j} \right] \right\} \quad (18)$$

将式(18)与式(11)进行对比可得如下关系:

$$\lambda^T = G \lambda'^T \quad (19)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} C_0^0 S^0 (-A)^0 & C_1^0 S^1 (-A)^1 & C_2^0 S^2 (-A)^2 & \cdots & C_{n-1}^0 S^{n-1} (-A)^{n-1} & C_n^0 S^n (-A)^n \\ 0 & C_1^1 S^1 (-A)^0 & C_2^1 S^2 (-A)^1 & \cdots & C_{n-1}^1 S^{n-1} (-A)^{n-2} & C_n^1 S^n (-A)^{n-1} \\ 0 & 0 & C_2^2 S^2 (-A)^0 & \cdots & C_{n-1}^2 S^{n-1} (-A)^{n-3} & C_n^2 S^n (-A)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{n-1}^{n-1} S^{n-1} (-A)^0 & C_n^{n-1} S^n (-A)^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_n^n S^n (-A)^0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda' = [\lambda'_0 \quad \lambda'_1 \quad \lambda'_2 \quad \cdots \quad \lambda'_{n-1} \quad \lambda'_n]$$

$$\lambda = [\lambda_0 + \ln S \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{n-1} \quad \lambda_n]$$

利用式(19)即可避免线性变换矩阵的求逆运算,同时克服计算溢出现象.至此对偶型最大熵概率密度函数模型步骤如下:

- 1) 将随机变量 x 进行线性变换成 x' ;
- 2) 设拉格朗日系数个数为 $n+1$ 及求出 x' 的 n 阶原点矩 $m_i (i=1, 2, \dots, n)$.
- 3) 运用对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次寻优方法计算线性变换后的拉格朗日系数的 $[\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n]$;
- 4) 由式(19)求出线性变换前的拉格朗日系数的 $[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

- 5) 由式(8)得到原问题的对偶型最大熵概率密度函数模型公式.

2 算例分析与讨论

2.1 常见概率分布类型的对偶型最大熵概率密度函数模型计算分析

下面以正态分布、对数正态分布、威布尔分布、指数分布来说明对偶型最大熵概率密度函数模型具有很强的通用性.

通过 Monte Carlo 方法生成 1000 个样本,分别服从正态分布 $N(100, 10)$ (期望为 100, 标准差为 10)、对数正态分布 $\ln N(1, 0.2)$ (对数期望为 1, 对数标准差为 0.2)、威布尔分布 $W(2, 2, 5)$ (形状参数为 2, 位置参数为 2, 尺度参数为 5)、指数

分布 $E(0.5)$ (率参数为 0.5).

以样本的前 10 阶原点矩作为约束条件,应用对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法拟合样本数据,求出对偶型最大熵概率密度函数模型表达式,得到对偶型最大熵概率密度函数曲线与理论概率密度函数曲线对比见图 2.

从图 2 可以看出在大样本情况下对偶型最大熵概率密度函数曲线与理论概率密度函数曲线十分吻合,表明本文提出的对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化方法能够很好地拟合常见概率分布类型且公式表达式统一、简单.

2.2 对偶型最大熵与经典最大熵概率密度函数模型计算精度对比

通过 Monte Carlo 方法生成 1000 个样本,分别服从正态分布 $N(100, 10)$ (期望为 100, 标准差为 10)、对数正态分布 $\ln N(1, 0.2)$ (对数期望为 1, 对数标准差为 0.2)、威布尔分布 $W(2, 2, 5)$ (形状参数为 2, 位置参数为 2, 尺度参数为 5)、指数分布 $E(0.5)$ (率参数为 0.5).

将对偶型最大熵概率密度函数模型、经典最大熵概率密度函数模型与逐次优化算法、拟牛顿法组合来拟合这些样本,取样本的前 10 阶中心矩进行约束,得到不同组合的最大熵概率密度函数曲线与理论概率密度函数曲线的计算对比见图 3 及表 1.

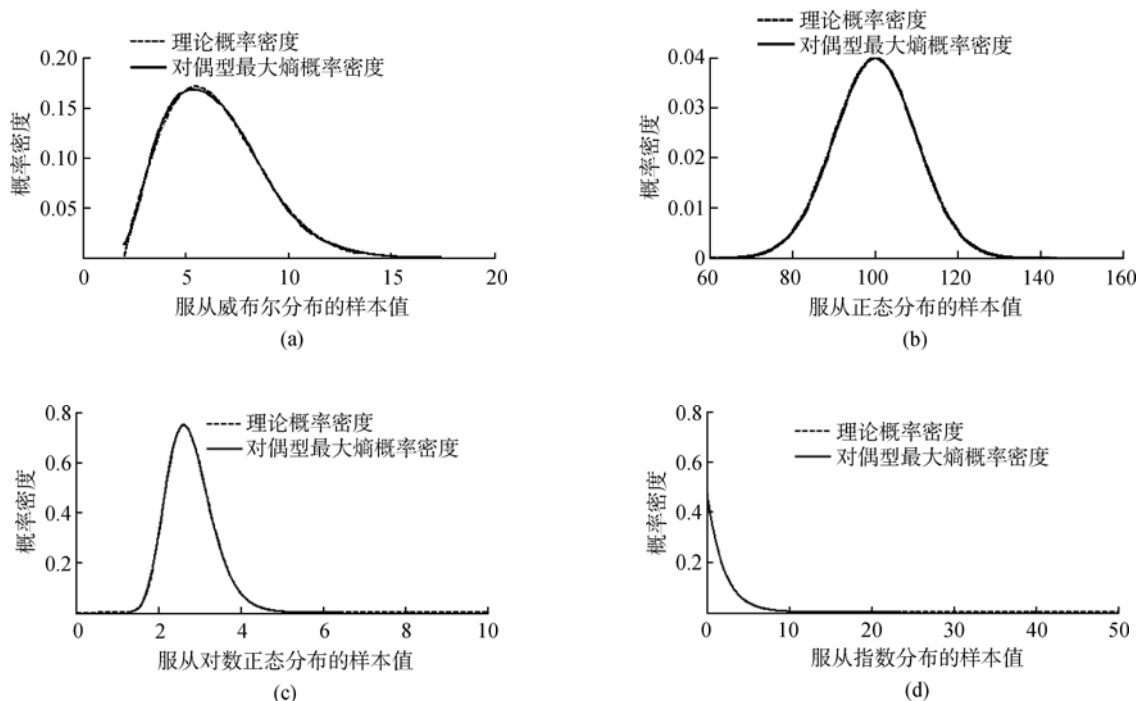


图 2 常见概率分布类型的对偶型最大熵概率密度函数曲线与理论概率密度函数曲线对比

Fig. 2 Comparison of the common probability distribution between dual maximum entropy probability density function curve and theoretical probability density function curve

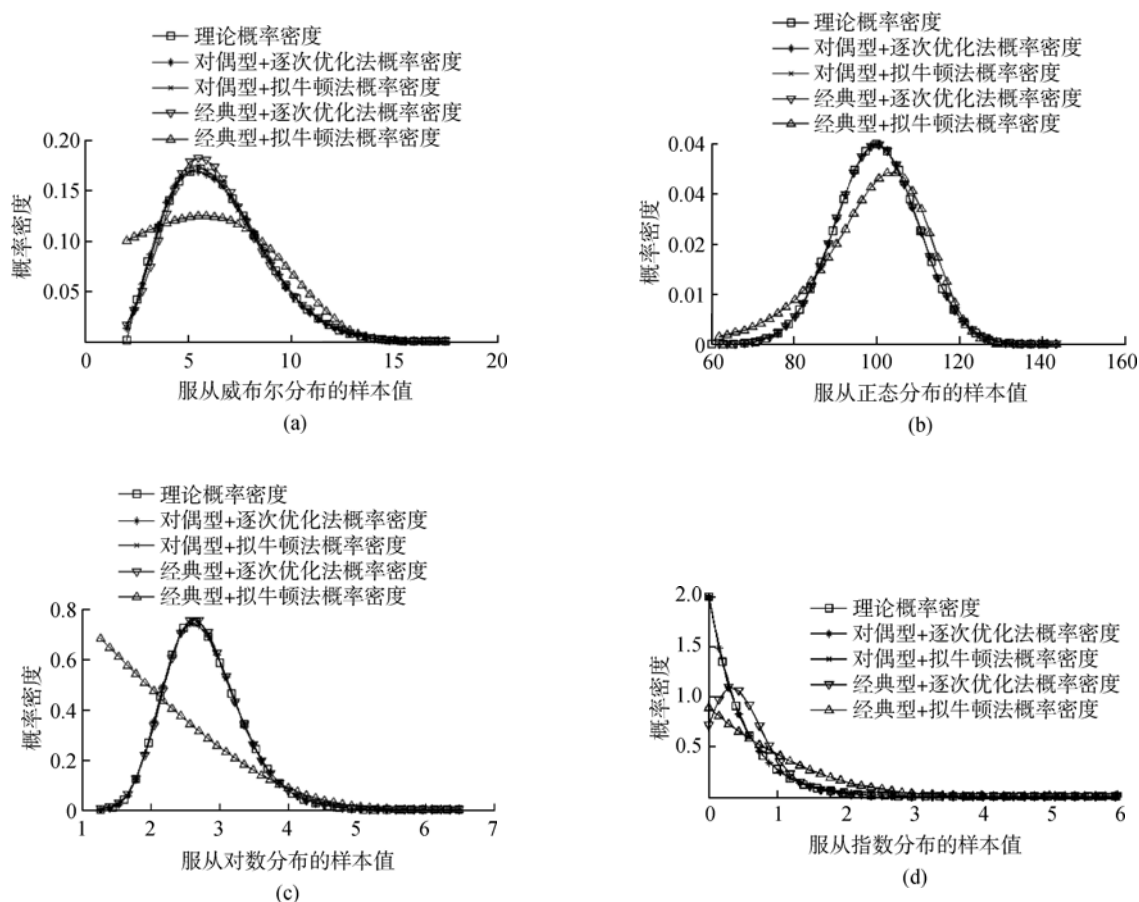


图 3 对偶型与经典型最大熵概率密度函数曲线对比

Fig. 3 Comparison between dual maximum entropy probability density function curve and classic maximum entropy probability density function curve

表 1 不同概率密度函数模型方法产生的方均根误差

Table 1 Root mean square error caused by different probability density function model

概率分布类型	方均根误差			
	对偶型+逐次优化法	对偶型+拟牛顿法	经典型+逐次优化法	经典型+拟牛顿法
威布尔分布	0.002 516	0.003 302	0.007 253	0.031 464
正态分布	0.000 089	0.000 104	0.000 061	0.005 447
对数正态分布	0.001 765	0.008 846	0.011 823	0.301 976
指数分布	0.004 209	0.003 256	0.507 664	0.530 094

从图 3 及表 1 可以看出概率密度函数曲线的拟合精度从高到低的排序为:对偶型+逐次优化法、对偶型+拟牛顿法、经典型+逐次优化法、经典型+拟牛顿法. 分析其原因如下:

1) 经典型+拟牛顿法精度最差, 偏离理论曲线较严重, 因为经典型最大熵概率密度函数模型的优化函数高度非线性存在寻优困难, 且拟牛顿法的精度受初始点的影响严重, 选择不当会导致优化不收敛. 本算例中由于初始点选取不当, 导致了优化不收敛.

2) 逐次优化法改善了拟牛顿法受初始点选择的限制, 优化过程得以收敛, 使经典型+逐次优化法较经典型+拟牛顿法有更高的计算精度.

3) 对偶型最大熵概率密度函数模型简化了优化函数, 使其不再具有高度非线性, 优化过程更易收敛, 较经典型最大熵概率密度函数模型得到的优化结果精度更高.

2.3 最大熵概率密度函数模型在复杂随机变量中的应用

最大熵概率密度函数模型不仅能方便用于常见的单峰随机变量(威布尔分布、正态分布、对数正态分布等), 而且对于复杂的随机变量也能很好地适应.

以轻型货车发动机为研究对象^[6], 其发动机最大转矩为 215.6 N·m, 为了便于数据处理, 将试验得到的发动机转矩除以发动机额定功率时的转矩, 得到相对转矩试验数据见表 2. 应用最大熵

表 2 轻型货车发动机相对转矩试验数据

Table 2 Relative torque data of light truck engine

相对转矩	相对频率/%	相对转矩	相对频率/%
-0.886 4	0.10	0.477 3	4.02
-0.750 0	0.18	0.613 6	6.50
-0.613 6	0.29	0.750 0	12.94

续表

相对转矩	相对频率/%	相对转矩	相对频率/%
-0.477 2	2.49	0.886 4	25.15
-0.340 9	14.62	1.022 7	1.04
-0.204 6	16.26	1.159 1	0.24
-0.068 1	6.25	1.295 5	0.08
0.068 1	4.12	1.431 8	0.04
0.204 5	2.25	1.568 2	0.01
0.340 9	2.21	1.704 5	0.03

概率密度函数模型计算出相对转矩试验数据的概率密度函数曲线见图 4 及概率密度函数方均根误差见表 3.

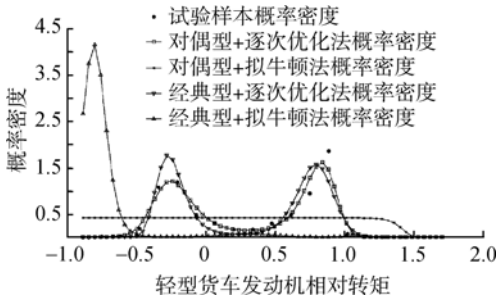


图 4 相对转矩概率密度函数曲线对比

Fig. 4 Comparison of relative torque probability density function curves

表 3 相对转矩概率密度函数估计方均根误差

Table 3 Root mean square error of relative torque maximum entropy probability density function

最大熵概率密度函数模型+优化方法	方均根误差
对偶型+逐次优化法	0.127 566
对偶型+拟牛顿法	0.473 550
经典型+逐次优化法	0.220 547
经典型+拟牛顿法	1.129 166

从图 4 及表 3 可以看出:对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法计算出的概率密度函数曲线与试验概率密度点十分吻合,表明了本文提出的方法能够应用于复杂概率分布类型的概率密度函数模型.

经典型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法计算的精度较对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法低,分析其原因为:经典型最大熵概率密度函数模型的优化函数关于拉格朗日系数高度非线性,造成优化困难.

经典型最大熵概率密度函数模型+拟牛顿法及对偶型最大熵概率密度函数模型+拟牛顿法与试验样本概率密度点偏离较大.分析其原因为:拟牛顿法的局限性使优化结果受初始点的选取影响很大.本算例中由于初始点的选取不当导致优化不收敛,优化结果偏离试验值.

2.4 最大熵概率密度函数模型在可靠性理论的应用

可靠性理论中经常要求给定寿命求出对应的可靠度,最大熵概率密度函数模型可方便地计算出随机变量的可靠度.对最大熵概率密度函数模型积分便可得到可靠度公式,对偶型最大熵形式的可靠度公式可表示为 $R(t) = 1 - \int_{-\infty}^t \exp(-\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i) dx$, 失效概率公式为 $F(t) = \int_{-\infty}^t \exp(-\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i) dx$.

通过 Monte Carlo 方法生成 1000 个样本,分别服从威布尔分布 $W(2,2,0.5)$ (形状参数为 2,位置参数为 2,尺度参数为 0.5)、正态分布 $N(1,0.2)$ (期望为 1,标准差为 0.2)、对数正态分布 $\text{Log } N(0,0.3)$ (对数期望为 0,对数标准差为 0.3)、指数分布 $E(4)$ (率参数为 4).以样本前 10 阶原点矩为约束条件进行最大熵可靠度曲线拟合,计算对比见图 5 及表 4.

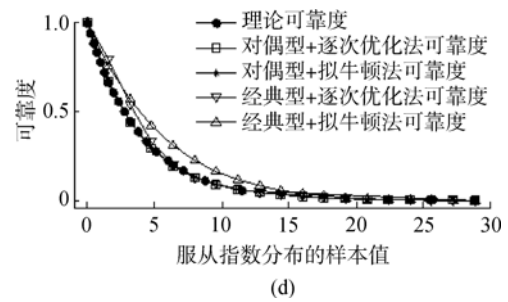
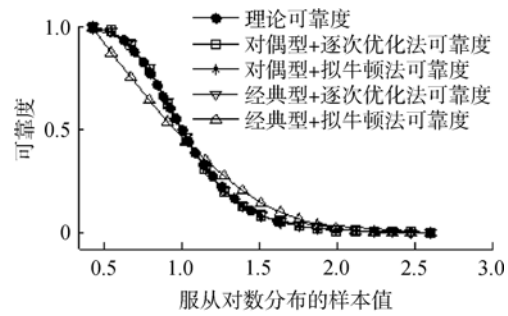
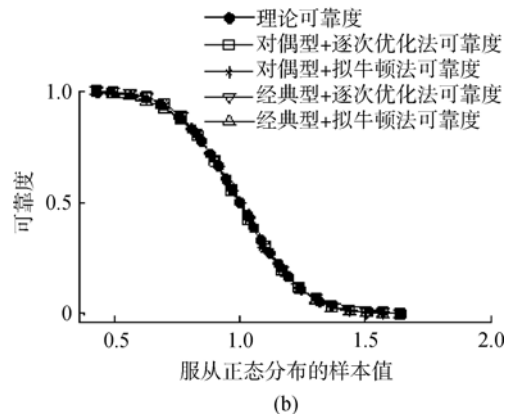
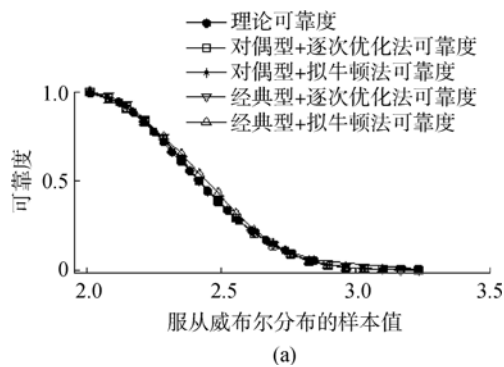


图 5 常见概率分布类型的可靠度曲线对比

Fig. 5 Comparison of reliability curves of the common probability distribution

表 4 可靠度估计方均根误差

Table 4 Root mean square error of the reliability estimation

概率分布类型	方均根误差			
	对偶型+逐次优化法	对偶型+拟牛顿法	经典型+逐次优化法	经典型+拟牛顿法
威布尔分布	0.001913	0.002527	0.008255	0.047703
正态分布	0.001203	0.001204	0.001178	0.036806
对数正态分布	0.001200	0.006240	0.008008	0.183995
指数分布	0.001173	0.001095	0.111421	0.190814

从图5及表4可以看出:对偶型+逐次优化法、对偶型+拟牛顿法、经典型+逐次优化法得到的可靠度曲线与理论可靠度曲线拟合较好,其中对偶型+逐次优化法最优.经典型+拟牛顿法得到的可靠度曲线与理论曲线相差较大,其原因为优化函数高度非线性、优化过程受初始点影响较大,导致优化不收敛.

3 结 论

1) 基于拉格朗日乘子对偶法推导建立的对偶型最大熵概率密度函数模型与经典型最大熵概率密度函数模型相比,优化函数形式简单,非线性程度低,不论采用逐次优化法还是拟牛顿法,计算精度均较高.

2) 本文提出的逐次优化法求解拉格朗日系数不仅克服了初始值敏感性问题,优化收敛好,而且计算效率高.

3) 重新推导了拉格朗日系数积分区间的线性变换公式,避免了优化过程中线性变换矩阵求逆引起的奇异现象,使算法更加稳健.

4) 本文提出的对偶型最大熵概率密度函数模型+逐次优化法与其他方法相比,计算精度最高.且能很好地应用于复杂概率分布及可靠性问题.

参考文献:

- [1] Zhang L, Singh V P. Probability distribution of rainfall-runoff using entropy theory[J]. Transactions of the ASABE, 2012, 55(5): 1733-1744.
- [2] Tian P C. Estimation of wind energy potential using different probability density functions[J]. Applied Energy, 2011, 88(5): 1848-1856.
- [3] LI Chuanqi, WANG Wei, WANG Shuai. Maximum entropy Monte Carlo method for the evaluation of dam overtopping probability[J]. Disaster Advances, 2012, 5(4): 1143-1147.
- [4] Ramire Z P, Carta J A. The use of wind probability distributions derived from the maximum entropy principle in the analysis of wind energy: a case study[J]. Energy Conversion and Management, 2006, 47(15/16): 2564-2577.
- [5] WU Ximing. Calculation of maximum entropy densities with application to income distribution [J]. Journal of Econometrics, 2003, 115(2): 347-354.
- [6] 高翔, 郑建祥. 基于最大熵概念的复杂随机变量统计模型[J]. 农业机械学报, 2008, 39(2): 43-46.
- GAO Xiang, ZHENG Jianxiang. Statistical distribution modal of complicated random variables based on maximum entropy concept[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2008, 39(2): 43-46. (in Chinese)
- [7] 吕文. 最大熵原理与贝叶斯方法在测量数据处理中的应用[D]. 成都: 电子科技大学, 2006.
- LÜ Wen. Maximum entropy and Bayesian method application on the data processing[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2006. (in Chinese)
- [8] Barducci A. Emissivity and temperature assessment using a maximum entropy estimator: structure and performance of the MaxEnTES algorithm[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53(2): 738-751.
- [9] Jacobs D J. Best probability density function for random sampled data[J]. Entropy, 2009, 11(4): 1001-1024.
- [10] ZHANG Hua, YU Yongjing, LIU Zhiyuan. Study on the maximum entropy principle applied to the annual wind speed probability distribution: a case study for observations of intertidal zone anemometer towers of Rudong in East China Sea[J]. Applied Energy, 2014, 114: 931-938.
- [11] SHI Xinghua, Teixeira A P, ZHANG Jing, et al. Structural reliability analysis based on probabilistic response modeling using the maximum entropy method[J]. Engineering Structures, 2014, 70(9): 106-116.
- [12] Bee M. A maximum entropy approach to loss distribution analysis[J]. Entropy, 2013, 15(3): 1100-1117.
- [13] Lynn K R, Reza A M. Maximum entropy estimation of the probability density function from the histogram using order statistic constraints [C] // 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vancouver: IEEE, 2013: 6407-6410.
- [14] Bretthorst G L. The maximum entropy method of moments and bayesian probability theory[J]. Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, 2013, 1553(1): 3-15.
- [15] Olivares S, Pairs M G A. About the probability distribution of a quantity with given mean and variance[J]. Metrologia, 2012, 49(3): L14-L16.
- [16] ZHU Hehua, ZUO Yulong, LI Xiaojun. Estimation of the fracture diameter distributions using the maximum entropy principle[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2014, 72: 127-137.
- [17] Yu L J, Zhang X N. Maximum entropy models for mode split forecasting[M]. New York: IEEE, 2009: 609-613.
- [18] Deng J, Pandey M D, Xie W C. Maximum entropy principle and partial probability weighted moments[J]. AIP Conference Proceedings, 2012, 1443(1): 190-197.

(编辑: 陈 越)